Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Соответствия Беклунда для эволюционных уравнений в многомерном пространстве, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 1, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2019>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:05:18

© 2006 г.

В. В. Жаринов*

СООТВЕТСТВИЯ БЕКЛУНДА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Цель предлагаемой статьи – развитие техники вычислений, позволяющей осуществлять эффективный алгебро-геометрический (групповой) анализ уравнений в частных производных с произвольным числом независимых переменных. Дано полное описание важного класса уравнений многомерной эволюции, допускающих соответствия Беклунда заданного вида. В частности, оказалось, что изученный класс достаточно широк, хотя в одномерном случае он богаче благодаря отсутствию условия равенства смешанных производных.

Ключевые слова: соответствие Беклунда, эволюционные системы, дифференциальные связи.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем использовать следующие мультииндексные обозначения: t – независимая переменная (время); $x = (x^\alpha)$ – независимые переменные (пространство), $1 \leq \alpha \leq D$; u, v – зависимые переменные; $\mathbf{u} = (u, u_x, u_{xx}, \dots)$, $\mathbf{v} = (v, v_x, v_{xx}, \dots)$ – дифференциальные переменные, где $u_x = (u_\alpha)$, $v_x = (v_\alpha)$, $u_{xx} = (u_{\alpha\beta} = u_{\beta\alpha})$, $v_{xx} = (v_{\alpha\beta} = v_{\beta\alpha})$, $\dots$, $1 \leq \alpha, \beta, \dots \leq D$.

Соответствие Беклунда для двух эволюционных уравнений

$$u_t = f(t, x, \mathbf{u}), \quad v_t = g(t, x, \mathbf{v})$$

есть дифференциальная связь

$$R_\alpha(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq D,$$

обладающая следующим характеризующим свойством: всякое решение $u = U(t, x)$ уравнения $u_t = f$ после подстановки в уравнения связи $R_\alpha = 0$ приводит к максимально переопределенной системе уравнений

$$R_\alpha(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v})|_{\mathbf{u}=\mathbf{U}(t,x)} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq D,$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

для нахождения семейства решений $v = V(t, x)$ уравнения $v_t = g$, и аналогичным свойством, позволяющим по данному решению уравнения $v_t = g$ строить семейство решений уравнения $u_t = f$. Здесь и ниже

$$U_\alpha(t, x) = \frac{\partial U(t, x)}{\partial x^\alpha}, \quad U_{\alpha\beta}(t, x) = \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \quad \dots, \quad 1 \leq \alpha, \beta, \dots \leq D.$$

Заметим, что такая конструкция не является *преобразованием* в обычном смысле в силу своей взаимной неоднозначности, так что естественно использовать более обтекаемый термин *соответствие*. В общем виде соответствия Беклунда для систем уравнений в частных производных описаны в работах [1], [2] (см. также [3]). В частности, система $R_\alpha = 0$, $1 \leq \alpha \leq D$, будет обладать требуемыми свойствами тогда и только тогда, когда выполнено *условие согласования*

$$\overline{\partial_t R_\alpha} \equiv [\partial_t R_\alpha]|_{\mathcal{R}} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq D, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \left(u_\alpha \frac{\partial}{\partial u} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial v} \right) + \sum_\beta \left(u_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial u_\beta} + v_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \right) + \dots, \quad 1 \leq \alpha \leq D; \\ \partial_t &= \frac{\partial}{\partial t} + \left(f \frac{\partial}{\partial u} + g \frac{\partial}{\partial v} \right) + \sum_\beta \left((\partial_\beta f) \frac{\partial}{\partial u_\beta} + (\partial_\beta g) \frac{\partial}{\partial v_\beta} \right) + \dots; \\ \mathcal{R} &= \{ R_\alpha = \partial_\beta R_\alpha = \partial_\gamma \partial_\beta R_\alpha = \dots = 0, \quad 1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq D \}; \end{aligned}$$

запись $\overline{F}$ или $F|_{\mathcal{R}}$ означает сужение функции F на поверхность $\mathcal{R}$ в пространстве переменных $t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Полные дифференцирования ∂_α характеризуются свойством

$$[\partial_\alpha F(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v})]|_{\mathbf{u}=\mathbf{U}(t,x), \mathbf{v}=\mathbf{V}(t,x)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [F(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v})|_{\mathbf{u}=\mathbf{U}(t,x), \mathbf{v}=\mathbf{V}(t,x)}]$$

для всех функций $F(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, $U(t, x)$, $V(t, x)$ и всех $1 \leq \alpha \leq D$. В свою очередь, эволюционное дифференцирование ∂_t характеризуется следующим свойством: для данных функций $U(t, x)$, $V(t, x)$ равенство

$$[\partial_t F(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v})]|_{\mathbf{u}=\mathbf{U}(t,x), \mathbf{v}=\mathbf{V}(t,x)} = \frac{\partial}{\partial t} [F(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v})|_{\mathbf{u}=\mathbf{U}(t,x), \mathbf{v}=\mathbf{V}(t,x)}]$$

справедливо для всех функций $F(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ тогда и только тогда, когда $U(t, x)$ и $V(t, x)$ суть решения уравнений $u_t = f$ и $v_t = g$, соответственно. Очевидно, что коммутаторы $[\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0$, $[\partial_\alpha, \partial_t] = 0$, $1 \leq \alpha, \beta \leq D$. Для произвольных функций $R_\alpha(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v})$, $1 \leq \alpha \leq D$, поверхность $\mathcal{R}$ характеризуется следующим свойством: полные дифференцирования ∂_α допускают сужения $\overline{\partial}_\alpha$ с пространства переменных $t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ на $\mathcal{R}$, так что

$$\overline{\partial_\alpha F} = \overline{\partial}_\alpha \overline{F}, \quad 1 \leq \alpha \leq D,$$

для всех $F(t, x, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ (напомним, что черта сверху означает сужение на поверхность $\mathcal{R}$).

В предлагаемой работе рассматривается случай

$$u_t = f = \sum_{\alpha, \beta} a^{\alpha\beta}(u, u_x) u_{\alpha\beta} + \phi(u, u_x), \quad (1.2)$$

$$v_t = g = \sum_{\alpha, \beta} b^{\alpha\beta}(v, v_x) v_{\alpha\beta} + \psi(v, v_x), \quad (1.3)$$

$$R_\alpha = R_\alpha(u, u_x, v, v_x) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq D, \quad (1.4)$$

причем налагаются естественные условия невырожденности, которые будут конкретизированы ниже. Учитывая, что почти во всех известных примерах соответствий Беклунда размерность пространства $D = 1$, основное внимание уделяется случаю $D \geq 2$. Работа выполнена в рамках алгебро-геометрического подхода к уравнениям в частных производных (см., например, [2], [4]). В частности, по умолчанию все функции предполагаются достаточно гладкими, т.е. имеющими непрерывные частные производные необходимых порядков, а все рассуждения носят локальный характер, т.е. справедливы в какой-либо окрестности фиксированной точки общего положения (примерно так, как это делается в теореме о неявной функции).

2. ДОПУСТИМЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СВЯЗИ

Пусть $D \geq 2$ и выполнены условия невырожденности:

$$\det \left\| \frac{\partial R_\alpha}{\partial u_\beta} \right\| \neq 0, \quad \det \left\| \frac{\partial R_\alpha}{\partial v_\beta} \right\| \neq 0. \quad (2.1)$$

В частности, система (1.4) разрешима относительно переменных v_α ,

$$v_\alpha = r_\alpha(u, u_x, v), \quad 1 \leq \alpha \leq D, \quad \det \left\| \frac{\partial r_\alpha}{\partial u_\beta} \right\| \neq 0.$$

Явный вид функций r_α определяется условием равенства смешанных производных:

$$v_{\alpha\beta} = \partial_\alpha v_\beta = \partial_\beta v_\alpha = v_{\beta\alpha}, \quad (2.2)$$

т.е.

$$\overline{\partial_\alpha r_\beta} = \overline{\partial_\beta r_\alpha}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq D,$$

или, подробнее,

$$r_{\beta u} u_\alpha + \sum_{\gamma} r_{\beta u_\gamma} u_{\alpha\gamma} + r_{\beta v} r_\alpha = r_{\alpha u} u_\beta + \sum_{\gamma} r_{\alpha u_\gamma} u_{\beta\gamma} + r_{\alpha v} r_\beta, \quad (2.3)$$

где индексы $u, v, u_\alpha, \dots$ означают соответствующие частные производные, например, $r_{\beta u} = \partial r_\beta / \partial u$. Несложный, хотя и кропотливый анализ показывает, что равенство (2.3) имеет место тогда и только тогда, когда существуют функция $R(u, v)$, $R_u \neq 0$, $R_v \neq 0$, и постоянные c_α такие, что

$$r_\alpha = -\frac{R_u u_\alpha + c_\alpha}{R_v}, \quad 1 \leq \alpha \leq D.$$

В симметричной форме допустимая дифференциальная связь имеет вид

$$R_\alpha = \partial_\alpha R(u, v) + c_\alpha = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq D. \quad (2.4)$$

3. ПЕРВЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ

Подставляя выражение (2.4) в условие согласования (1.1), получим

$$\begin{aligned}\overline{\partial_t R_\alpha} &= \overline{\partial_t(\partial_\alpha R(u, v) + c_\alpha)} = \overline{\partial_t \partial_\alpha R} = \bar{\partial}_\alpha(\overline{\partial_t R}) = \\ &= \bar{\partial}_\alpha(R_u \bar{u}_t + R_v \bar{v}_t) = \bar{\partial}_\alpha(R_u \bar{f} + R_v \bar{g}) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq D.\end{aligned}$$

В нашем случае согласно (1.2) и (1.3)

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \sum_{\beta, \gamma} \overline{a^{\beta\gamma} u_{\beta\gamma}} + \bar{\phi} = \sum_{\beta, \gamma} \overline{a^{\beta\gamma} u_{\beta\gamma}} + \dots, \\ \bar{g} &= \sum_{\beta, \gamma} \overline{b^{\beta\gamma} v_{\beta\gamma}} + \bar{\psi} = \sum_{\beta, \gamma} \overline{b^{\beta\gamma} v_{\beta\gamma}} + \dots,\end{aligned}$$

где многоточия здесь и далее обозначают члены, содержащие дифференциальные переменные низших порядков. Следовательно,

$$\bar{\partial}_\alpha \sum_{\beta, \gamma} (R_u \overline{a^{\beta\gamma} u_{\beta\gamma}} + R_v \overline{b^{\beta\gamma} v_{\beta\gamma}}) + \dots = \sum_{\beta, \gamma} (\overline{a^{\beta\gamma} R_u u_{\alpha\beta\gamma}} + \overline{b^{\alpha\beta\gamma} R_v v_{\beta\gamma}}) + \dots = 0.$$

Учитывая, что

$$\overline{\partial_\alpha \partial_\beta R_\gamma} = \bar{\partial}_\alpha \bar{\partial}_\beta \bar{\partial}_\gamma R = R_u \overline{u_{\alpha\beta\gamma}} + R_v \overline{v_{\alpha\beta\gamma}} + \dots = 0,$$

получаем

$$\sum_{\beta, \gamma} (\overline{a^{\beta\gamma}} - \overline{b^{\beta\gamma}}) R_u \overline{u_{\alpha\beta\gamma}} + \dots = 0,$$

так что

$$\overline{a^{\alpha\beta}} = \overline{b^{\alpha\beta}}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq D. \quad (3.1)$$

4. УТОЧНЕНИЕ ВИДА ДОПУСТИМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

Согласно (2.4) можно положить $\overline{v_x} = -(R_u u_x + c_x)/R_v$, считая переменные $u_x = (u_\alpha)$ частью координат на поверхности $\mathcal{R}$. Тогда равенство (3.1) примет вид

$$a^{\alpha\beta}(u, u_x) = b^{\alpha\beta}(v, \overline{v_x}).$$

В частности,

$$a_{u_\gamma}^{\alpha\beta}(u, u_x) = \sum_{\delta} b_{v_\delta}^{\alpha\beta}(v, \overline{v_x}) \frac{\partial \overline{v_\delta}}{\partial u_\gamma} = -\frac{R_u}{R_v} b_{v_\gamma}^{\alpha\beta}(v, \overline{v_x}),$$

или, в симметричном виде,

$$R_v \overline{a_{u_\gamma}^{\alpha\beta}} + R_u \overline{b_{v_\gamma}^{\alpha\beta}} = 0. \quad (4.1)$$

Далее,

$$a_u^{\alpha\beta}(u, u_x) = \sum_{\gamma} b_{v_\gamma}^{\alpha\beta}(v, \overline{v_x}) \frac{\partial \overline{v_\gamma}}{\partial u} = -\sum_{\gamma} b_{v_\gamma}^{\alpha\beta}(v, \overline{v_x}) \left[\left(\frac{R_u}{R_v} \right)_u u_\gamma + c_\gamma \left(\frac{1}{R_v} \right)_u \right],$$

так что

$$a_u^{\alpha\beta}(u, u_x) = \sum_{\gamma} \frac{R_v}{R_u} a^{\alpha\beta}(u, u_x) \left[\left(\frac{R_u}{R_v} \right)_u u_{\gamma} + \left(\frac{1}{R_v} \right)_u c_{\gamma} \right]. \quad (4.2)$$

Взяв производную по v от обеих частей последнего равенства, получим

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{R_v}{R_u} \right) \left(\frac{R_u}{R_v} \right)_u \right]_v &= 0, & \Rightarrow & \quad \left(\ln \frac{R_u}{R_v} \right)_{uv} = 0, \\ \left[\left(\frac{R_v}{R_u} \right) \left(\frac{1}{R_v} \right)_u \right]_v &= 0, & & \quad \left(\frac{R_{uv}}{R_u R_v} \right)_v = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Аналогичным образом выводим

$$b_v^{\alpha\beta}(v, v_x) = \sum_{\gamma} \frac{R_u}{R_v} b^{\alpha\beta}(v, v_x) \left[\left(\frac{R_v}{R_u} \right)_v v_{\gamma} + \left(\frac{1}{R_u} \right)_v c_{\gamma} \right] \quad (4.4)$$

и

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{R_u}{R_v} \right) \left(\frac{R_v}{R_u} \right)_v \right]_u &= 0, & \Rightarrow & \quad \left(\ln \frac{R_v}{R_u} \right)_{uv} = 0, \\ \left[\left(\frac{R_u}{R_v} \right) \left(\frac{1}{R_u} \right)_v \right]_u &= 0, & & \quad \left(\frac{R_{uv}}{R_u R_v} \right)_u = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Общее решение системы (4.3), (4.5) записывается в виде

$$R(u, v) = -\frac{1}{c} \ln(M(u) - N(v)), \quad c = \text{const},$$

где M, N – произвольные функции, причем в силу условия невырожденности (2.1) $M_u \neq 0, N_v \neq 0$. Без ограничения общности можно положить $c = -1$, так что дифференциальная связь (2.4) принимает вид

$$R_{\alpha} = \frac{(M_u u_{\alpha} - N_v v_{\alpha}) + c_{\alpha}(M - N)}{M - N} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq D,$$

или, эквивалентно,

$$R_{\alpha} = (\partial_{\alpha} + c_{\alpha})M - (\partial_{\alpha} + c_{\alpha})N = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq D. \quad (4.6)$$

5. КООРДИНАТЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

Произведем замену переменных в пространстве дифференциальных переменных $u, v, u_x, v_x, u_{xx}, v_{xx}, \dots$, а именно, переменные u, v сохраним, переменные первого порядка:

$$\begin{aligned} u_{\alpha}, & \quad \rho_{\alpha} = (\partial_{\alpha} + c_{\alpha})M, & \tau_{\alpha} = \frac{\rho_{\alpha} + \sigma_{\alpha}}{2}, \\ \longleftrightarrow & & \longleftrightarrow & \quad 1 \leq \alpha \leq D, \\ v_{\alpha}, & \quad \sigma_{\alpha} = (\partial_{\alpha} + c_{\alpha})N, & \theta_{\alpha} = \frac{\rho_{\alpha} - \sigma_{\alpha}}{2}, \end{aligned}$$

переменные второго порядка:

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta}, & \quad \rho_{\alpha\beta} = (\partial_{\alpha}\partial_{\beta} - c_{\alpha}c_{\beta})M, & \tau_{\alpha\beta} = \frac{\rho_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}}{2}, \\ \longleftrightarrow & & \longleftrightarrow & \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq D, \\ v_{\alpha\beta}, & \quad \sigma_{\alpha\beta} = (\partial_{\alpha}\partial_{\beta} - c_{\alpha}c_{\beta})N, & \theta_{\alpha\beta} = \frac{\rho_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}}{2}, \end{aligned}$$

и т.д. (например, $\rho_{\alpha\beta\gamma} = (\partial_\alpha\partial_\beta\partial_\gamma + c_\alpha c_\beta c_\gamma)M$). В переменных $u, v, \tau_x, \theta_x, \tau_{xx}, \theta_{xx}, \dots$ уравнение поверхности дифференциальных связей имеет простой вид:

$$\mathcal{R} = \{\theta_x = \theta_{xx} = \dots = 0\}, \quad (5.1)$$

а переменные $u, v, \tau_x, \tau_{xx}, \dots$ суть координаты на $\mathcal{R}$. Сужение функции $F(u, v, \tau_x, \theta_x, \tau_{xx}, \theta_{xx}, \dots)$ на поверхность $\mathcal{R}$ имеет вид

$$\bar{F}(u, v, \tau_x, \tau_{xx}, \dots) = F(u, v, \tau_x, 0, \tau_{xx}, 0, \dots),$$

а суженные полные дифференцирования –

$$\bar{\partial}_\alpha = \bar{u}_\alpha \frac{\partial}{\partial u} + \bar{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial v} + \sum_\beta (\tau_{\alpha\beta} + \tau_\alpha c_\beta) \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} + \sum_{\beta, \gamma} (\tau_{\alpha\beta\gamma} - \tau_\alpha c_\beta c_\gamma) \frac{\partial}{\partial \tau_{\beta\gamma}} + \dots,$$

где

$$\bar{u}_\alpha = \frac{1}{M_u}(\tau_\alpha - c_\alpha M), \quad \bar{v}_\alpha = \frac{1}{N_v}(\tau_\alpha - c_\alpha N), \quad 1 \leq \alpha \leq D. \quad (5.2)$$

В новых координатах

$$a^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}(u, \rho_x), \quad b^{\alpha\beta} = b^{\alpha\beta}(v, \sigma_x),$$

и равенство (3.1) дает

$$a^{\alpha\beta}(u, \tau_x) = b^{\alpha\beta}(v, \tau_x) = \chi^{\alpha\beta}(\tau_x), \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq D.$$

Итак, допустимые уравнения (1.2), (1.3) и дифференциальная связь (1.4) имеют вид

$$u_t = \sum_{\alpha, \beta} \chi^{\alpha\beta}(\rho_x) u_{\alpha\beta} + \phi(u, \rho_x), \quad (5.3)$$

$$v_t = \sum_{\alpha, \beta} \chi^{\alpha\beta}(\sigma_x) v_{\alpha\beta} + \psi(v, \sigma_x), \quad (5.4)$$

$$R_\alpha = \rho_\alpha - \sigma_\alpha = (\partial_\alpha + c_\alpha)R = 0, \quad R = M(u) - N(v), \quad 1 \leq \alpha \leq D, \quad (5.5)$$

где $\chi^{\alpha\beta}$, ϕ , ψ , M , N – некоторые функции, $M_u \neq 0$, $N_v \neq 0$.

6. СООТВЕТСТВИЯ БЕКЛУНДА. $D > 1$

Приступим к анализу уравнений (5.3)–(5.5). Условие согласования (1.1) имеет вид

$$\overline{\partial_t R_\alpha} = \overline{\partial_t (\partial_\alpha + c_\alpha) R} = \overline{(\partial_\alpha + c_\alpha) (\partial_t R)} = (\bar{\partial}_\alpha + c_\alpha) (\bar{\partial}_t \bar{R}) = 0.$$

Используя новые переменные, получаем

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_t \bar{M} &= M_u \bar{u}_t = \sum_{\alpha, \beta} \chi^{\alpha\beta}(\tau_x) M_u \bar{u}_{\alpha\beta} + M_u \phi(u, \tau_x) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \chi^{\alpha\beta}(\tau_x) (\tau_{\alpha\beta} - M_{uu} \bar{u}_\alpha \bar{u}_\beta + c_\alpha c_\beta M) + M_u \phi(u, \tau_x) \end{aligned}$$

и аналогичное выражение для $\overline{\partial_t N}$, так что

$$\overline{\partial_t R} = \overline{\partial_t M}_{\text{ess}}(u, \tau_x) - \overline{\partial_t N}_{\text{ess}}(v, \tau_x),$$

где

$$\begin{aligned} \overline{\partial_t M}_{\text{ess}} &= \sum_{\alpha, \beta} \chi^{\alpha\beta}(\tau_x) (-M_{uu} \overline{u_\alpha u_\beta} + c_\alpha c_\beta M) + M_u \phi(u, \tau_x), \\ \overline{\partial_t N}_{\text{ess}} &= \sum_{\alpha, \beta} \chi^{\alpha\beta}(\tau_x) (-N_{vv} \overline{v_\alpha v_\beta} + c_\alpha c_\beta N) + N_v \psi(v, \tau_x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\overline{\partial_t R}_\alpha = (\bar{\partial}_\alpha + c_\alpha)(\overline{\partial_t R}) = \sum_\beta (\overline{\partial_t R})_{\tau_\beta} \tau_{\alpha\beta} + \dots = 0,$$

так что $(\overline{\partial_t R})_{\tau_\alpha} = 0$, $1 \leq \alpha \leq D$, и, значит,

$$\overline{\partial_t R} = \overline{\partial_t M}_{\text{ess}}(u, \tau_x) - \overline{\partial_t N}_{\text{ess}}(v, \tau_x) = P(u) - Q(v),$$

где P, Q – некоторые функции. Следовательно,

$$\overline{\partial_t M}_{\text{ess}}(u, \tau_x) - P(u) = \overline{\partial_t N}_{\text{ess}}(v, \tau_x) - Q(v) = S(\tau_x),$$

где S – еще одна функция. Таким образом,

$$\overline{\partial_t M}_{\text{ess}} = P(u) + S(\tau_x), \quad \overline{\partial_t N}_{\text{ess}} = Q(v) + S(\tau_x). \quad (6.1)$$

Далее, для $1 \leq \alpha \leq D$ имеем

$$\overline{\partial_t R}_\alpha = (\bar{\partial}_\alpha + c_\alpha)(P - Q) = (P_u \overline{u_\alpha} + c_\alpha P) - (Q_v \overline{v_\alpha} + c_\alpha Q) = 0,$$

откуда в силу (5.2)

$$\frac{P_u}{M_u}(\tau_\alpha - c_\alpha M) + c_\alpha P = \frac{Q_v}{N_v}(\tau_\alpha - c_\alpha N) + c_\alpha Q,$$

так что

$$\frac{P_u}{M_u} = \frac{Q_v}{N_v} = c = \text{const}, \quad -cc_\alpha M + c_\alpha P = -cc_\alpha N + c_\alpha Q$$

и, значит,

$$P(u) = cM(u) + k, \quad Q(v) = cN(v) + k, \quad k = \text{const}.$$

Без ограничения общности можно положить $k = 0$; подставляя полученные выражения в (6.1), получаем

$$\overline{\partial_t M}_{\text{ess}} = \sum_{\alpha, \beta} \chi^{\alpha\beta} (-M_{uu} \overline{u_\alpha u_\beta} + c_\alpha c_\beta M) + M_u \phi = cM + S, \quad (6.2)$$

$$\overline{\partial_t N}_{\text{ess}} = \sum_{\alpha, \beta} \chi^{\alpha\beta} (-N_{vv} \overline{v_\alpha v_\beta} + c_\alpha c_\beta N) + N_v \psi = cN + S. \quad (6.3)$$

Эти равенства завершают описание соответствий Беклунда в изучаемом классе, а именно, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. В случае $D > 1$ уравнения (1.2), (1.3) связаны соответствием Беклунда (1.4) тогда и только тогда, когда

$$a^{\alpha\beta}(u, u_x) = \chi^{\alpha\beta}(\rho_x), \quad b^{\alpha\beta}(v, v_x) = \chi^{\alpha\beta}(\sigma_x), \quad (6.4)$$

$$\phi(u, u_x) = \frac{1}{M_u} \left(\sum_{\alpha, \beta} \chi^{\alpha\beta}(\rho_x) (M_{uu} u_\alpha u_\beta - c_\alpha c_\beta M) + cM + S(\rho_x) \right), \quad (6.5)$$

$$\psi(v, v_x) = \frac{1}{N_v} \left(\sum_{\alpha, \beta} \chi^{\alpha\beta}(\sigma_x) (N_{vv} v_\alpha v_\beta - c_\alpha c_\beta N) + cN + S(\sigma_x) \right), \quad (6.6)$$

$$R_\alpha = (\partial_\alpha + c_\alpha)M - (\partial_\alpha + c_\alpha)N = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq D, \quad (6.7)$$

где $\chi^{\alpha\beta}(\tau_x)$, $M(u)$, $N(v)$, $S(\tau_x)$ – некоторые функции, c_α , c – некоторые постоянные, $\rho_\alpha = (\partial_\alpha + c_\alpha)M$, $\sigma_\alpha = (\partial_\alpha + c_\alpha)N$, $1 \leq \alpha, \beta \leq D$, причем $\chi^{\alpha\beta} = \chi^{\beta\alpha}$, $M_u \neq 0$, $N_v \neq 0$.

7. СООТВЕТСТВИЯ БЕКЛУНДА. $D = 1$

В этом случае уравнения (1.2)–(1.4) принимают вид (в индексах $\alpha, \beta, \dots$ больше нет необходимости)

$$u_t = f = a(u, u_x)u_{xx} + \phi(u, u_x), \quad (7.1)$$

$$v_t = g = b(v, v_x)v_{xx} + \psi(v, v_x), \quad (7.2)$$

$$R = R(u, u_x, v, v_x) = 0, \quad (7.3)$$

условие (2.2) равенства смешанных производных отсутствует, а условие невырожденности (2.1) имеет вид

$$R_{u_x} \neq 0, \quad R_{v_x} \neq 0. \quad (7.4)$$

В частности, уравнение (7.3) разрешимо относительно переменной v_x :

$$v_x = r(u, u_x, v), \quad r_{u_x} \neq 0,$$

и условие согласования (1.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \overline{\partial_t(v_x - r)} &= \overline{b_{v_{xx}}} + \overline{b_{v_x}v_{xx}}^2 + \dots - r_{u_x}(au_{xxx} + a_{u_x}u_{xx}^2 + \dots) + \dots = \\ &= r_{u_x}(\bar{b} - a)u_{xxx} + (\bar{b}r_{u_x u_x} + \overline{b_{v_x}r_{u_x}^2} - r_{u_x}a_{u_x})u_{xx}^2 + \dots = 0, \end{aligned}$$

поскольку

$$\overline{v_{xx}} = r_{u_x}u_{xxx} + \dots, \quad \overline{v_{xxx}} = r_{u_x}u_{xxxx} + r_{u_x u_x}u_{xx}^2 + \dots.$$

Отсюда

$$\bar{b} - a = 0, \quad \bar{b}r_{u_x u_x} + r_{u_x}(\overline{b_{v_x}r_{u_x}} - a_{u_x}) = 0. \quad (7.5)$$

Из первого из этих равенств следует $\overline{b_{v_x}r_{u_x}} - a_{u_x} = 0$, так что второе равенство сводится к условию $r_{u_x u_x} = 0$, откуда $r(u, u_x, v) = A(u, v)u_x + B(u, v)$ с некоторыми функциями A и B . Аналогично $\bar{b}_{v_x}r_u - a_u = 0$, откуда

$$\frac{a_u}{a_{u_x}} = \frac{r_u}{r_{u_x}} = \frac{A_u u_x + B_u}{A} = \frac{A_u}{A} u_x + \frac{B_u}{A}$$

и, значит,

$$\left(\frac{A_u}{A}\right)_v = 0, \quad \left(\frac{B_u}{A}\right)_v = 0.$$

Последовательно решая эти уравнения, находим

$$A(u, v) = \frac{m(u)}{n(v)}, \quad B(u, v) = \frac{F(u) - G(v)}{n(v)},$$

где $m \neq 0$, $n \neq 0$, F, G – некоторые функции. Таким образом, дифференциальная связь (7.3) записывается как

$$v_x = \frac{m(u)}{n(v)}u_x + \frac{F(u) - G(v)}{n(v)}$$

или, в симметричном виде,

$$R = (\partial_x M + F) - (\partial_x N + G) = 0, \quad M(u)_u = m(u), \quad N(v)_v = n(v).$$

Произведем замену переменных

$$\begin{array}{ccc} u_x & \rho_x = \partial_x M + F & \tau_x = \frac{\rho_x + \sigma_x}{2} \\ \longleftrightarrow & & \longleftrightarrow \\ v_x & \sigma_x = \partial_x N + G & \theta_x = \frac{\rho_x - \sigma_x}{2} \end{array}$$

затем

$$\begin{array}{ccc} u_{xx} & \rho_{xx} = \partial_x \rho_x & \tau_{xx} = \frac{\rho_{xx} + \sigma_{xx}}{2} \\ \longleftrightarrow & & \longleftrightarrow \\ v_{xx} & \sigma_{xx} = \partial_x \sigma_x & \theta_{xx} = \frac{\rho_{xx} - \sigma_{xx}}{2} \end{array}$$

и т.д. (например, $\rho_{xxx} = \partial_x \rho_{xx} = \partial_x^2 \rho_x$). В новых переменных уравнение поверхности дифференциальных связей имеет вид

$$\mathcal{R} = \{\theta_x = \theta_{xx} = \dots = 0\},$$

а суженное полное дифференцирование –

$$\bar{\partial}_x = \bar{u}_x \frac{\partial}{\partial u} + \bar{v}_x \frac{\partial}{\partial v} + \tau_{xx} \frac{\partial}{\partial \tau_x} + \tau_{xxx} \frac{\partial}{\partial \tau_{xx}} + \dots,$$

где

$$\bar{u}_x = \frac{1}{M_u}(\tau_x - F), \quad \bar{v}_x = \frac{1}{N_v}(\tau_x - G).$$

Далее, $a = a(u, \rho_x)$, $b = b(v, \sigma_x)$, и первое из равенств (7.5) дает

$$a(u, \tau_x) = b(v, \tau_x) = \chi(\tau_x). \quad (7.6)$$

Итак, допустимые уравнения (7.1), (7.2) и дифференциальная связь (7.3) имеют вид

$$u_t = \chi(\rho_x)u_{xx} + \phi(u, \rho_x), \quad (7.7)$$

$$v_t = \chi(\sigma_x)v_{xx} + \psi(v, \sigma_x), \quad (7.8)$$

$$R = \rho_x - \sigma_x = 0, \quad (7.9)$$

где $\rho_x = \partial_x M(u) + F(u)$, $\sigma_x = \partial_x N(v) + G(v)$, а $\chi, \phi, \psi, M, F, N, G$ – некоторые функции, $M_u \neq 0$, $N_v \neq 0$.

Условие согласования (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\partial_t R} &= (\overline{\partial_t \partial_x M} + \overline{\partial_t F}) - (\overline{\partial_t \partial_x N} + \overline{\partial_t G}) = \\ &= (\bar{\partial}_x + \mu)\overline{\partial_t M} - (\bar{\partial}_x + \nu)\overline{\partial_t N} = 0, \quad \mu = \frac{F_u}{M_u}, \quad \nu = \frac{G_v}{N_v}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\overline{\partial_t M} = \chi(\tau_x)\tau_{xx} + K, \quad K(u, \tau_x) = -\chi(\tau_x)(M_{uu}\overline{u_x}^2 + F_u\overline{u_x}) + M_u\bar{\phi}, \quad (7.10)$$

$$\overline{\partial_t N} = \chi(\tau_x)\tau_{xx} + L, \quad L(v, \tau_x) = -\chi(\tau_x)(N_{vv}\overline{v_x}^2 + G_v\overline{v_x}) + N_v\bar{\psi}, \quad (7.11)$$

так что

$$\begin{aligned} \overline{\partial_t R} &= [\bar{\partial}_x K + \mu(\chi\tau_{xx} + K)] - [\bar{\partial}_x L + \nu(\chi\tau_{xx} + L)] = \\ &= [(K + \mu X) - (L + \nu X)]_{\tau_x} \tau_{xx} + [(K_u\overline{u_x} + \mu K) - (L_v\overline{v_x} + \nu L)] = 0, \end{aligned}$$

где

$$\chi(\tau_x) = X_{\tau_x}(\tau_x), \quad X(0) = 0.$$

Итак,

$$\begin{aligned} [(K + \mu X) - (L + \nu X)]_{\tau_x} &= 0, \\ (K_u\overline{u_x} + \mu K) - (L_v\overline{v_x} + \nu L) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$K + \mu X = P(u) + S(\tau_x), \quad K_u\overline{u_x} + \mu K = T(\tau_x), \quad (7.12)$$

$$L + \nu X = Q(v) + S(\tau_x), \quad L_v\overline{v_x} + \nu L = T(\tau_x), \quad (7.13)$$

где P, Q, S, T – некоторые функции, причем без ограничения общности считаем $S(0) = 0$. Полный анализ уравнений (7.12), (7.13) требует рассмотрения ряда частных случаев и является достаточно громоздким. Поскольку наша цель – изучение преобразований Беклунда эволюционных систем в многомерном пространстве ($D > 1$), мы ограничимся здесь случаем $\mu = \text{const} \neq 0$, $\nu = \text{const} \neq 0$. Тогда без ограничения общности можно считать $F = \mu M$, $G = \nu N$ (заметим, что функции $M(u)$, $N(v)$ определены с точностью до постоянной), и правые уравнения системы (7.12), (7.13) имеют общие решения

$$K(u, \tau_x) = \frac{T(\tau_x)}{\mu} + \kappa(\tau_x)(\tau_x - F(u)), \quad L(v, \tau_x) = \frac{T(\tau_x)}{\nu} + \lambda(\tau_x)(\tau_x - G(v)), \quad (7.14)$$

где κ, λ – некоторые функции. Далее, левые уравнения системы (7.12), (7.13) дают $\kappa = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$ и

$$P(u) = -\kappa F(u) + \frac{T(0)}{\mu}, \quad S(\tau_x) = \frac{T(\tau_x) - T(0)}{\mu} + \kappa\tau_x + \mu X(\tau_x), \quad (7.15)$$

$$Q(v) = -\lambda G(v) + \frac{T(0)}{\nu}, \quad S(\tau_x) = \frac{T(\tau_x) - T(0)}{\nu} + \lambda \tau_x + \nu X(\tau_x) \quad (7.16)$$

(напомним, что $S(0) = 0$). Эти рассуждения приводят к следующему достаточному условию существования соответствия Беклунда.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $D = 1$ и

$$\phi(u, u_x) = \frac{1}{M_u} \left(\chi(\rho_x)(M_{uu}u_x^2 + \mu M_u u_x) + \frac{T(\rho_x)}{\mu} + \kappa M_u u_x \right), \quad (7.17)$$

$$\psi(v, v_x) = \frac{1}{N_v} \left(\chi(\sigma_x)(N_{vv}v_x^2 + \nu N_v v_x) + \frac{T(\sigma_x)}{\nu} + \lambda N_v v_x \right), \quad (7.18)$$

где $\rho_x = (\partial_x + \mu)M$, $\sigma_x = (\partial_x + \nu)N$, $\chi(\tau_x) = X_{\tau_x}(\tau_x)$, $M(u)$, $N(v)$ – произвольные функции, а функции $T(\tau_x)$, $X(\tau_x)$ и постоянные μ , ν , κ , λ удовлетворяют условию согласования

$$\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \right) T(\tau_x) + (\kappa - \lambda) \tau_x + (\mu - \nu) X(\tau_x) = 0. \quad (7.19)$$

Тогда уравнения (7.7), (7.8) связаны соответствием Беклунда (7.9).

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главный итог предлагаемой работы – демонстрация возможности эффективного алгебро-геометрического анализа уравнений в частных производных с произвольным числом независимых переменных. Конкретным результатом является полное описание важного класса уравнений многомерной эволюции, допускающих соответствия Беклунда заданного вида. В частности, оказалось, что изученный класс достаточно широк, хотя в одномерном случае он богаче благодаря отсутствию условия равенства смешанных производных.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-01-00769) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1542.2003.1).

Список литературы

- [1] В.В. Жаринов, *Матем. сб.*, **136(178)**:2 (1988), 274–291.
- [2] V.V. Zharinov, *Lecture Notes on Geometrical Aspects of Partial Differential Equations*, (Ser. Sov. Fas Eur. Math., Vol. 9), World Scientific, Singapore, 1992.
- [3] I.S. Krasil'shchik, A.M. Vinogradov, *Acta. Appl. Math.*, **15** (1989), 161–209.
- [4] Л.В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978; Н.Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, М., 1983; П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям*, Мир, М., 1989; А.М. Виноградов, И.С. Красильщик (ред.), *Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики*, Факториал, М., 1997; B.J. Cantwell, *Introduction to Symmetry Analysis*, Camb. Univ. Press, Cambridge, 2002.

Поступила в редакцию 21.XI.2005 г.