Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Славнов, Интегральные представления для корреляционных функций XXZ -цепочки Гейзенберга, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 3, 452–461

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:08:11

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ XXZ -ЦЕПОЧКИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассматриваются новые интегральные представления для двухточечных корреляционных функций локальных спинов $1/2$ в XXZ -цепочке Гейзенберга.

Ключевые слова: решеточные модели, корреляционные функции, интегральные представления.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ БЛОКИ

XXZ -магнетик Гейзенберга описывает одномерную цепочку квантовых спиновых частиц с взаимодействием ближайших соседей. Гамильтониан модели спина $1/2$ во внешнем магнитном поле имеет вид

$$H = \sum_{m=1}^M (\sigma_m^x \sigma_{m+1}^x + \sigma_m^y \sigma_{m+1}^y + \Delta(\sigma_m^z \sigma_{m+1}^z - 1)) - hS_z, \quad (1.1)$$

где

$$S_z = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sigma_m^z, \quad [H, S_z] = 0, \quad (1.2)$$

Δ – параметр анизотропии, h – внешнее классическое магнитное поле, $\sigma_m^{x,y,z}$ – операторы спина $1/2$ (матрицы Паули), ассоциированные с узлом m цепочки. Граничные условия предполагаются периодическими: $\sigma_{M+1}^\alpha = \sigma_1^\alpha$, $\alpha = x, y, z$. Гамильтониан (1.1) является матрицей размера $2^M \times 2^M$, которая действует в 2^M -мерном пространстве $\mathcal{H} = \bigotimes_{m=1}^M \mathcal{H}_m$, где $\mathcal{H}_m \sim \mathbb{C}^2$. Операторы σ_k^α действуют как соответствующие матрицы Паули в локальном пространстве $\mathcal{H}_k$ и как единичный оператор в остальных пространствах.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: nslavnov@mi.ras.ru

Ниже рассматриваются двухточечные корреляционные функции локальных спинов в основном состоянии $|\psi_g\rangle$ гамильтониана H ,

$$g_m^{\alpha\beta} = \langle \psi_g | \sigma_k^\alpha \sigma_{k+m}^\beta | \psi_g \rangle. \quad (1.3)$$

В силу трансляционной инвариантности в дальнейшем без ограничения общности предполагается, что $k = 1$. Кроме того, будет рассмотрен лишь термодинамический предел $M \rightarrow \infty$, хотя существующие методы позволяют вычислять корреляторы и в цепочках с конечным числом узлов. Для корреляционных функций в термодинамическом пределе будет использоваться обозначение $g_m^{\alpha\beta} = \langle \sigma_1^\alpha \sigma_{m+1}^\beta \rangle$.

Следует отметить, что в работах [1]–[5] уже были получены интегральные представления для так называемых *элементарных блоков* (см. определение ниже), которые формально позволяют вычислять любые, в том числе и двухточечные, корреляторы. В действительности, однако, подобные формулы оказываются крайне громоздкими и неудобными, что делает весьма актуальным поиск новых представлений, специально ориентированных на вычисление двухточечных функций. Сформулируем вкратце основные результаты упомянутых выше работ и прежде всего дадим определение элементарного блока.

Рассмотрим четыре (2×2) -матрицы $E^{\epsilon, \epsilon'}$ ($\epsilon, \epsilon' = 1, 2$) с элементами $(E^{\epsilon, \epsilon'})_{jk} = \delta_{\epsilon_j} \delta_{\epsilon'_k}$. Очевидно, что матрицы $E^{\epsilon, \epsilon'}$ образуют базис в пространстве операторов, действующих в $\mathbb{C}^2$. В полной аналогии с локальными операторами σ_m^α введем $(2^M \times 2^M)$ -матрицы $E_m^{\epsilon, \epsilon'}$, действующие в $\mathcal{H}$, но нетривиально лишь в своем локальном пространстве $\mathcal{H}_m$. Элементарным блоком называется среднее

$$F_m(\{\epsilon_j\}, \{\epsilon'_j\}) = \left\langle \prod_{j=1}^m E_j^{\epsilon_j, \epsilon'_j} \right\rangle. \quad (1.4)$$

Основным результатом работ [1]–[5] является вывод интегральных представлений для элементарных блоков (1.4)

$$F_m(\{\epsilon_j\}, \{\epsilon'_j\}) = \int d\lambda_1 \cdots \int d\lambda_m \mathcal{F}_m(\{\lambda\} | \{\epsilon_j\}, \{\epsilon'_j\}). \quad (1.5)$$

Отметим, что в этих представлениях кратность интеграла всегда равна числу операторов $E_j^{\epsilon_j, \epsilon'_j}$ в элементарном блоке. Описать в общем случае подынтегральную функцию $\mathcal{F}_m(\{\lambda\} | \{\epsilon_j\}, \{\epsilon'_j\})$ достаточно сложно. Подробности можно найти в указанных оригинальных работах. Мы же в качестве примера приведем явное выражение для одного из наиболее простых элементарных блоков $F_m(\{2\}, \{2\})$ при $|\Delta| < 1$ и $h = 0$,

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{j=1}^m E_j^{2,2} \right\rangle &= (-1)^m \left(-\frac{\pi}{\zeta} \right)^{m(m+1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda_1}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda_m}{2\pi} \prod_{a>b}^m \frac{\text{sh} \frac{\pi}{\zeta} (\lambda_a - \lambda_b)}{\text{sh}(\lambda_a - \lambda_b - i\zeta)} \times \\ &\times \prod_{j=1}^m \frac{\text{sh}^{j-1}(\lambda_j - i\zeta/2) \text{sh}^{m-j}(\lambda_j + i\zeta/2)}{\text{ch}^m \frac{\pi}{\zeta} \lambda_j}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $\cos \zeta = \Delta$.

Ясно, что для любой матрицы $\mathcal{O}$, действующей в $\mathcal{H}$, среднее $\langle \mathcal{O} \rangle$ может быть получено в виде линейной комбинации элементарных блоков, поэтому формально мы имеем возможность вычислять любые корреляционные функции в основном состоянии гамильтониана. Однако, как видно из приведенной выше явной формулы для $F_m(\{2\}, \{2\})$, вычисление интеграла даже для одного элементарного блока представляет известные сложности. При вычислении же двухточечных корреляторов мы сталкиваемся с еще более серьезными проблемами.

Рассмотрим в качестве примера корреляционную функцию третьих компонент спина $g_m^{zz} = \langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle$. Нетрудно непосредственно выразить коррелятор g_m^{zz} через элементарные блоки. Мы, однако, воспользуемся другим способом вычисления g_m^{zz} , а именно через специальный производящий функционал [6]. При этом недостатки подхода, основанного на элементарных блоках, будут видны наиболее отчетливо. Пусть

$$Q_{k,m} = \frac{1}{2} \sum_{j=k}^m (1 - \sigma_j^z). \quad (1.7)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} (1 - \sigma_1^z)(1 - \sigma_{m+1}^z) &= 2(Q_{1,m+1}^2 - Q_{1,m}^2 - Q_{2,m+1}^2 + Q_{2,m}^2), \\ 1 - \sigma_{m+1}^z &= 2(Q_{1,m+1} - Q_{1,m}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Следовательно, если ввести производящий функционал $\langle e^{\beta Q_{1,m}} \rangle$, то

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = \left(2\mathcal{D}_m^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - 4\mathcal{D}_m \frac{\partial}{\partial \beta} + 1 \right) \langle e^{\beta Q_{1,m}} \rangle \Big|_{\beta=0}, \quad (1.9)$$

где символами $\mathcal{D}_m$ и $\mathcal{D}_m^2$ обозначены первая и вторая производные на решетке,

$$\mathcal{D}_m f(m) \equiv f(m+1) - f(m), \quad \mathcal{D}_m^2 f(m) \equiv f(m+1) + f(m-1) - 2f(m). \quad (1.10)$$

Соотношение

$$e^{\beta Q_{1,m}} = \prod_{j=1}^m (E_j^{11} + e^{\beta} E_j^{22}) \quad (1.11)$$

позволяет легко свести задачу вычисления g_m^{zz} к элементарным блокам. Для этого необходимо в правой части (1.11) раскрыть все скобки. В результате среднее $\langle e^{\beta Q_{1,m}} \rangle$ выразится в виде суммы из 2^m элементарных блоков:

$$\langle e^{\beta Q_{1,m}} \rangle = \sum_{\epsilon_j=1,2} \exp \left[\frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^m (1 + (-1)^{\epsilon_j}) \right] \left\langle \prod_{j=1}^m E_j^{\epsilon_j, \epsilon_j} \right\rangle. \quad (1.12)$$

Таким образом, в рамках описываемого метода двухточечные корреляционные функции задаются не одним m -кратным интегралом, а суммой из 2^m m -кратных интегралов. Один из этих интегралов (при $|\Delta| < 1$ и $h = 0$) приведен в формуле (1.6), остальные

имеют похожую структуру. Если при малых m еще можно смириться с наличием 2^m m -кратных интегралов, то в случае общего положения ситуация становится абсолютно неприемлемой. Проблема даже не в том, чтобы вычислить соответствующие интегралы, а в том, чтобы явно выписать интегральные представления для всех элементарных блоков, входящих в (1.12).

Недостатки данного подхода становятся еще более наглядными, если в формуле (1.12) положить $\beta = 0$. Очевидно, что в этом случае

$$1 = \sum_{\epsilon_j=1,2} \left\langle \prod_{j=1}^m E_j^{\epsilon_j, \epsilon_j} \right\rangle. \quad (1.13)$$

Однако доказать это элементарное равенство путем непосредственного вычисления и суммирования всех интегралов, входящих в правую часть, до сих пор никому не удалось. Фактически мы приходим к выводу, что метод элементарных блоков не позволяет вычислить среднее даже от единичного оператора.

Тождество (1.13) наводит на мысль о существовании некоторого механизма взаимного сокращения интегралов для соответствующих элементарных блоков. Представляется необычайно важным найти такой механизм, поскольку, не умея вычислять среднее от единичного оператора, было бы наивно браться за вычисление более сложных объектов. Именно этой проблеме и посвящен следующий раздел данной статьи.

2. НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Метод получения новых интегральных представлений для двухточечных корреляционных функций основан на алгебраическом анзаце Бете. Подробности читатель может найти в работах [5], [7], мы же ограничимся лишь основными идеями и минимальным набором необходимых формул.

В рамках алгебраического анзаца Бете осуществляется переход от локальных спинных операторов σ_k^α (или, что то же самое, от матриц $E_k^{\epsilon, \epsilon'}$) к матрице монодромии. Для XXZ -цепочки матрица монодромии $T(\lambda)$ имеет вид

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где матричные элементы $T_{jk}(\lambda)$ являются операторами, действующими в $\mathcal{H}$ и зависящими от комплексного параметра λ . Локальные операторы $E_k^{\epsilon, \epsilon'}$ выражаются через $T_{jk}(\lambda)$ по формулам [4], [8]

$$E_k^{\epsilon, \epsilon'} = T^{k-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) T_{\epsilon' \epsilon} \left(\frac{\eta}{2} \right) T^{-k} \left(\frac{\eta}{2} \right), \quad T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda), \quad (2.2)$$

где $\text{ch } \eta = \Delta$. Коммутационные соотношения между элементами матрицы монодромии задаются с помощью R -матрицы,

$$R(\lambda - \mu) (T(\lambda) \otimes T(\mu)) = (T(\mu) \otimes T(\lambda)) R(\lambda - \mu), \quad (2.3)$$

где

$$R(\lambda) = \frac{1}{\text{sh}(\lambda + \eta)} \begin{pmatrix} \text{sh}(\lambda + \eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sh} \lambda & \text{sh} \eta & 0 \\ 0 & \text{sh} \eta & \text{sh} \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sh}(\lambda + \eta) \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

В рамках алгебраического анзаца Бете пространство состояний $\mathcal{H}$ строится путем последовательного применения оператора $B(\lambda)$ к циклическому вектору $|0\rangle$:

$$|\psi\rangle = \prod_{j=1}^N B(\lambda_j)|0\rangle, \quad N = 0, 1, \dots, M. \quad (2.5)$$

Вектор $|0\rangle$ (псевдовакуум) является состоянием, в котором все спины направлены вверх,

$$|0\rangle = \bigotimes_{m=1}^M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_m, \quad (2.6)$$

и характеризуется свойствами

$$C(\mu)|0\rangle = 0, \quad A(\mu)|0\rangle = |0\rangle, \quad D(\mu)|0\rangle = d(\mu)|0\rangle, \quad (2.7)$$

где

$$d(\mu) = \left(\frac{\text{sh}(\mu - \eta/2)}{\text{sh}(\mu + \eta/2)} \right)^M. \quad (2.8)$$

Собственные функции гамильтониана H являются одновременно собственными функциями оператора $\mathcal{T}(\mu)$ и имеют вид (2.5) при условии, что набор параметров $\{\lambda\}$ удовлетворяет системе уравнений Бете

$$d(\lambda_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k + \eta)}{\text{sh}(\lambda_j - \lambda_k - \eta)} = 1, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2.9)$$

Соответствующее собственное значение $\tau(\mu, \{\lambda_j\})$ оператора $\mathcal{T}(\mu)$ имеет вид

$$\tau(\mu, \{\lambda\}) = \prod_{j=1}^N \frac{\text{sh}(\lambda_j - \mu + \eta)}{\text{sh}(\lambda_j - \mu)} + d(\mu) \prod_{j=1}^N \frac{\text{sh}(\mu - \lambda_j + \eta)}{\text{sh}(\mu - \lambda_j)}. \quad (2.10)$$

Дуальные собственные функции строятся с помощью операторов $C(\lambda)$,

$$\langle\psi| = \langle 0| \prod_{j=1}^N C(\lambda_j), \quad N = 0, 1, \dots, M. \quad (2.11)$$

Здесь $\langle 0| = |0\rangle^T$ и

$$\langle 0|B(\mu) = 0, \quad \langle 0|A(\mu) = \langle 0|, \quad \langle 0|D(\mu) = d(\mu)\langle 0|. \quad (2.12)$$

Параметры $\{\lambda\}$ в (2.11) также должны удовлетворять системе (2.9).

Рассмотрим теперь основную идею вычисления корреляционных функций в рамках алгебраического анзаца Бете. Для простоты ограничимся коррелятором g_m^{zz} и будем вычислять его через производящий функционал $\langle e^{\beta Q_{1,m}} \rangle$. Согласно формулам (1.11) и (2.2) имеем

$$e^{\beta Q_{1,m}} = \left(A \left(\frac{\eta}{2} \right) + e^{\beta D} \left(\frac{\eta}{2} \right) \right)^m \mathcal{T}^{-m} \left(\frac{\eta}{2} \right). \quad (2.13)$$

Отсюда для нормированного среднего оператора $e^{\beta Q_{1,m}}$ по некоторому собственному состоянию $|\psi\rangle = \prod_{k=1}^N B(\lambda_k)|0\rangle$ получаем

$$\langle \psi | e^{\beta Q_{1,m}} | \psi \rangle = \tau^{-m} \left(\frac{\eta}{2}, \{\lambda\} \right) \frac{\langle 0 | \prod_{k=1}^N C(\lambda_k) (A(\eta/2) + e^{\beta D}(\eta/2))^m \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) | 0 \rangle}{\langle 0 | \prod_{k=1}^N C(\lambda_k) \prod_{k=1}^N B(\lambda_k) | 0 \rangle}. \quad (2.14)$$

Один из способов вычисления (2.14) состоит в том, чтобы представить произведение $(A(\eta/2) + e^{\beta D}(\eta/2))^m$ в виде, аналогичном (1.12), т.е.

$$\left(A \left(\frac{\eta}{2} \right) + e^{\beta D} \left(\frac{\eta}{2} \right) \right)^m = \sum_{\epsilon_j=1,2} \exp \left[\frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^m (1 + (-1)^{\epsilon_j}) \right] \prod_{j=1}^m T_{\epsilon_j \epsilon_j} \left(\frac{\eta}{2} \right). \quad (2.15)$$

В этом случае производящий функционал $\langle \psi | e^{\beta Q_{1,m}} | \psi \rangle$ записывается в виде суммы 2^m мономов $T_{\epsilon_1 \epsilon_1}(\eta/2) \dots T_{\epsilon_m \epsilon_m}(\eta/2)$. В свою очередь, вычисление среднего от каждого такого монома сводится к хорошо известным формулам алгебраического анзаца Бете [4], [5], [9]–[11]. Однако именно этот способ действий в конечном итоге и приводит к представлению двухточечной корреляционной функции g_m^{zz} через сумму 2^m элементарных блоков, т.е. к представлению, обладающему существенными изъянами.

Другой метод, предложенный в работе [7], заключается в вычислении действия оператора $(A(\eta/2) + e^{\beta D}(\eta/2))^m$ на состояние $|\psi\rangle$, однако теперь этот оператор на мономы (2.15) не разлагается. Центральное место в этом методе занимает следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $x_1, \dots, x_m$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ суть произвольные комплексные числа. Тогда

$$\begin{aligned} \langle 0 | \prod_{k=1}^N C(\lambda_k) \prod_{a=1}^m (A(x_a) + e^{\beta D}(x_a)) = \\ = \sum_{n=0}^p \sum_{\substack{\{\lambda\} = \{\lambda_{\alpha_+}\} \cup \{\lambda_{\alpha_-}\} \\ \{x\} = \{x_{\gamma_+}\} \cup \{x_{\gamma_-}\} \\ |\alpha_+| = |\gamma_+| = n}} R_n(\{x\} | \{\lambda\}) \langle 0 | \prod_{a \in \gamma_+} C(x_a) \prod_{b \in \alpha_-} C(\lambda_b), \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $p = \min(m, N)$. Суммирование ведется по всевозможным разбиениям наборов $\{\lambda\}$ и $\{x\}$ на непересекающиеся подмножества $\{\lambda\} = \{\lambda_{\alpha_+}\} \cup \{\lambda_{\alpha_-}\}$ и $\{x\} =$

$\{x_{\gamma_+}\} \cup \{x_{\gamma_-}\}$. При этом число элементов в подмножествах $\{x_{\gamma_+}\}$ и $\{\lambda_{\alpha_+}\}$ одно и то же и равно n . Коэффициент $R_n(\{x\}|\{\lambda\})$ имеет явный вид

$$R_n(\{x\}|\{\lambda\}) = \frac{\prod_{a \in \gamma_-} (U_a^+ + e^\beta d(x_a) U_a^-)}{\prod_{\substack{a > b \\ a, b \in \alpha_+}} \text{sh}(\lambda_a - \lambda_b) \prod_{\substack{a < b \\ a, b \in \gamma_+}} \text{sh}(x_a - x_b)} \det_n (M_{jk}^+ - e^\beta d(\lambda_j) M_{jk}^-), \quad (2.17)$$

где

$$U_a^\pm = \prod_{b \in \gamma_+} \frac{\text{sh}(x_b - x_a \pm \eta)}{\text{sh}(x_b - x_a)} \prod_{b \in \alpha_-} \frac{\text{sh}(\lambda_b - x_a \pm \eta)}{\text{sh}(\lambda_b - x_a)}, \quad (2.18)$$

$$M_{jk}^\pm = \frac{\text{sh} \eta}{\text{sh}(x_k - \lambda_j) \text{sh}(x_k - \lambda_j \pm \eta)} \prod_{b \in \alpha_-} \frac{\text{sh}(\lambda_b - \lambda_j \pm \eta)}{\text{sh}(\lambda_b - \lambda_j)} \prod_{b \in \gamma_+} \text{sh}(x_b - \lambda_j \pm \eta). \quad (2.19)$$

Использование формулы (2.16) приводит к совершенно новым интегральным представлениям для корреляционных функций. Опуская многочисленные технические детали (см. [7]), приведем окончательный ответ для производящего функционала $\langle \psi | e^{\beta Q_{1,m}} | \psi \rangle$ в термодинамическом пределе $M \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \langle e^{\beta Q_{1,m}} \rangle &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{(n!)^2} \oint_{\Gamma} \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i} \int_C d^n \lambda \prod_{a=1}^n \left(\frac{\text{sh}(z_a + \eta/2) \text{sh}(\lambda_a - \eta/2)}{\text{sh}(z_a - \eta/2) \text{sh}(\lambda_a + \eta/2)} \right)^m \times \\ &\times \prod_{a=1}^n \prod_{b=1}^n \frac{\text{sh}(\lambda_a - z_b + \eta)}{\text{sh}(z_a - z_b + \eta)} \det_n [\widetilde{M}_{jk}^+ + e^\beta \widetilde{M}_{jk}^-] \det_n [\rho(\lambda_j, z_k)], \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$\widetilde{M}_{jk}^\pm = \frac{\text{sh} \eta}{\text{sh}(z_k - \lambda_j) \text{sh}(z_k - \lambda_j \pm \eta)} \prod_{a=1}^n \frac{\text{sh}(z_a - \lambda_j \pm \eta)}{\text{sh}(\lambda_a - \lambda_j \pm \eta)}. \quad (2.21)$$

Контур интегрирования Γ охватывают точку $\eta/2$ и не содержат больше никаких других особенностей подынтегральной функции. Контур интегрирования C и функция $\rho(\lambda, z)$ зависят от фазы модели, т.е. от параметров Δ и h . Вообще говоря, функция $\rho(\lambda, z)$ является решением интегрального уравнения Либба [12]

$$-2\pi i \rho(\lambda, z) + \int_C \frac{(\text{sh} 2\eta) \rho(\mu, z) d\mu}{\text{sh}(\lambda - \mu + \eta) \text{sh}(\lambda - \mu - \eta)} = \frac{\text{sh} \eta}{\text{sh}(\lambda - z) \text{sh}(\lambda - z + \eta)} \quad (2.22)$$

и при $z = \eta/2$ совпадает со спектральной плотностью основного состояния, через которую выражаются все физические наблюдаемые XXZ -цепочки. В безмассовом режиме $|\Delta| < 1$ контур C в (2.20) и (2.22) является интервалом вещественной оси $[-\Lambda_h, \Lambda_h]$. При этом параметр η чисто мнимый, например $\eta = -i\zeta$, $\zeta > 0$. В частном случае при $h = 0$ $\Lambda_h \rightarrow \infty$ и уравнение (2.22) решается явно:

$$\rho(\lambda, z) = \frac{i}{2\zeta \text{sh} \frac{\pi}{\zeta}(\lambda - z)}, \quad |\Delta| < 1, \quad \zeta = i\eta. \quad (2.23)$$

Для $\Delta > 1$ ($\eta < 0$) интеграл берется по некоторому интервалу мнимой оси. При значениях магнитного поля, меньших критической величины h_c (равной величине щели в спектре гамильтониана), границы интервала интегрирования $\Lambda_h = i\pi/2$, что позволяет выразить решение уравнения (2.22) через тета-функции:

$$\rho(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}} \right)^2 \frac{\vartheta_3(i(z - \lambda), q)}{\vartheta_4(i(z - \lambda), q)}, \quad \Delta > 1, \quad q = e^\eta. \quad (2.24)$$

В случае общего положения границы интервала интегрирования однозначно, хотя и неявно, определяются через Δ и h , но уравнение (2.22) не решается в терминах известных элементарных или специальных функций.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Обсудим теперь некоторые особенности нового интегрального представления (2.20). Прежде всего отметим, что матрица $\widetilde{M}_{jk}^+ + e^\beta \widetilde{M}_{jk}^-$ имеет собственный вектор с нулевым собственным значением при $\beta = 0$ [7]. Поэтому ее детерминант обращается в нуль при $n > 0$ и, следовательно, в сумме (2.20) остается всего одно слагаемое, отвечающее $n = 0$. Таким образом, среднее от единичного оператора автоматически оказывается равным единице, причем независимо от значений параметров, определяющих модель. Мы уже упоминали, что этот, казалось бы, очевидный факт до сих пор не был доказан в рамках подхода, основанного на элементарных блоках.

Другим простым случаем, в котором формула (2.20) сразу приводит к ответу, является предел свободных фермионов $\Delta = 0$ [13]. Корреляционные функции XXZ -цепочки при $\Delta = 0$ могут быть достаточно легко изучены с помощью координатного анзаца Бете [14]–[16]. Однако техника элементарных блоков не работает и в этом случае. В то же время представление (2.20) при $\eta = -i\pi/2$ (напомним, что $\Delta = \text{ch } \eta$) сильно упрощается, и все интегралы вычисляются явно.

Легко видеть, что при $\eta = -i\pi/2$ матрица $\widetilde{M}_{jk}^+ + e^\beta \widetilde{M}_{jk}^-$ принимает вид

$$\widetilde{M}_{jk}^+ + e^\beta \widetilde{M}_{jk}^- = \frac{2(e^\beta - 1)}{\text{sh } 2(\lambda_j - z_k)}, \quad \eta = -\frac{i\pi}{2}, \quad (3.1)$$

и, следовательно, ее детерминант пропорционален $(e^\beta - 1)^n$. Поскольку для вычисления коррелятора g_m^{zz} необходимо продифференцировать функционал $\langle e^{\beta Q_{1,m}} \rangle$ не более двух раз по β , после чего положить $\beta = 0$ (см. (1.9)), то все члены суммы с $n > 2$ заведомо не дают вклада в искомый результат. Отметим также, что при $\eta = -i\pi/2$ интегральное уравнение (2.22) становится тривиальным и функция $\rho(\lambda, z)$ равна

$$\rho(\lambda, z) = \frac{i}{\pi \text{sh } 2(\lambda - z)}, \quad \eta = -\frac{i\pi}{2}. \quad (3.2)$$

В случае нулевого магнитного поля после элементарных преобразований получаем следующие представления для средних:

$$\langle Q_{1,m} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma} dz \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^m(z) \varphi^{-m}(\lambda) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh}^2(\lambda - z)}, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \langle Q_{1,m}^2 \rangle &= \langle Q_{1,m} \rangle + \\ &+ \frac{1}{32\pi^4} \oint_{\Gamma} d^2 z \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \lambda \prod_{a=1}^2 (\varphi^m(z_a) \varphi^{-m}(\lambda_a)) \left(\det_2 \frac{1}{\operatorname{sh}(\lambda_j - z_k)} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\varphi(z) = \frac{\operatorname{sh}(z - i\pi/4)}{\operatorname{sh}(z + i\pi/4)}. \quad (3.5)$$

Оба интеграла (3.3) и (3.4) легко вычисляются. Рассмотрим, например, первый из них. Поскольку контур Γ содержит единственную сингулярность функции $\varphi(z)$ в точке $z = -i\pi/4$, то интеграл по z равен вычету подынтегральной функции в этой точке. Однако при больших m вычислить соответствующий вычет было бы затруднительно. Вместо этого мы можем деформировать исходный контур Γ в бесконечную горизонтальную полосу шириной $i\pi$. В силу периодичности подынтегральной функции интеграл по границам полосы равен нулю. Следовательно, интеграл по z сводится к вычету в полюсе второго порядка при $z = \lambda$, который мы пересекаем при деформации исходного контура. В результате получаем

$$\langle Q_{1,m} \rangle = \frac{m}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} (\ln \varphi(\lambda))' d\lambda = \frac{m}{2}. \quad (3.6)$$

Аналогично вычисляется и второй интеграл (3.4). В итоге при $h = 0$ находим

$$\langle \sigma_1^z \sigma_{m+1}^z \rangle = \frac{2}{\pi^2 m^2} ((-1)^m - 1). \quad (3.7)$$

Случай ненулевого магнитного поля рассмотрен в работе [13].

В заключение остановимся на вопросе об асимптотическом поведении корреляционной функции g_m^{zz} при больших m . В отличие от прежних формул, в интегральных представлениях (2.20) параметр m входит только в виде степени функций

$$\frac{\operatorname{sh}(z + \eta/2)}{\operatorname{sh}(z - \eta/2)} \quad \text{и} \quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda - \eta/2)}{\operatorname{sh}(\lambda + \eta/2)}. \quad (3.8)$$

Поэтому естественно перейти от интегрирования по контурам C и Γ к интегрированию по контурам наискорейшего спуска для функций (3.8). В этом случае вклад от интегралов будет мал (причем тем меньше, чем больше число интегралов), и асимптотика корреляционной функции будет определяться вычетами в полюсах, которые мы пересекаем в процессе деформации исходных контуров.

Благодарности. Работа была выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00484 и грант поддержки ведущих научных школ № 00-15-96046), программы “Нелинейная динамика и солитоны” и Фонда содействия отечественной науке.

Список литературы

- [1] *M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, A. Nakayashiki.* Phys. Lett. A. 1992. V. 168. P. 256.
- [2] *M. Jimbo, T. Miwa.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 2923.
- [3] *М. Джимбо, Т. Миwa.* Алгебраический анализ точно решаемых решеточных моделей. Ижевск: Изд. дом Удмуртский университет, 2000.
- [4] *N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 554 [FS]. P. 647; math-ph/9807020.
- [5] *N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 567 [FS]. P. 554; math-ph/9907019.
- [6] *A. G. Izergin, V. E. Korepin.* Commun. Math. Phys. 1985. V. 99. P. 271.
- [7] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. Slavnov, V. Terras.* Spin-spin correlation functions of the XXZ -1/2 Heisenberg chain in a magnetic field. hep-th/0201045.
- [8] *J. M. Maillet, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 575. P. 627; hep-th/9911030.
- [9] *Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* ТМФ. 1979. Т. 40. № 2. С. 194.
- [10] *Н. А. Славнов.* ТМФ. 1989. Т. 79. № 2. С. 232.
- [11] *Н. А. Славнов.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 245. С. 270.
- [12] *E. Lieb, W. Liniger.* Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 1605.
- [13] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. Slavnov, V. Terras.* Correlation functions of the XXZ spin-1/2 Heisenberg chain at free fermion point from their multiple integral representations. hep-th/0203169.
- [14] *H. Bethe.* Z. Phys. 1931. V. 71. P. 205.
- [15] *T. T. Wu.* Phys. Rev. 1966. V. 149. P. 380.
- [16] *B. M. McCoy.* Phys. Rev. 1968. V. 173. P. 531.