Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, Квантовые матричные алгебры $GL(m|n)$ -типа: структура характеристической подалгебры и ее спектральная параметризация, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 1, 14–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2020>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:51:43

© 2006 г. Д. И. Гуревич*, П. Н. Пятов†, П. А. Сапонов‡

КВАНТОВЫЕ МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ $GL(m|n)$ -ТИПА: СТРУКТУРА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПОДАЛГЕБРЫ И ЕЕ СПЕКТРАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

Продолжено исследование квантовых матричных алгебр $GL(m|n)$ -типа. Для тождества Гамильтона–Кэли найдены три альтернативные формы записи и, что наиболее важно, тождество представлено в факторизованном виде. Факторизация позволяет естественным образом разделить спектр квантовой суперматрицы на подмножества “четных” и “нечетных” собственных значений. Такое разделение приводит к параметризации характеристической подалгебры (подалгебры спектральных инвариантов) в терминах суперсимметрических полиномов от собственных значений квантовой матрицы.

Построения опираются на два вспомогательных результата, имеющих самостоятельный интерес. Во-первых, выведено правило умножения функций Шура $s_\lambda(M)$, образующих линейный базис для характеристической подалгебры квантовой матричной алгебры геккевского типа. Структурные константы умножения в этом базисе совпадают с коэффициентами Литтлвуда–Ричардсона. Во-вторых, доказана серия билинейных соотношений в градуированном кольце Λ симметрических функций счетного числа переменных.

Ключевые слова: квантовые группы, суперматрицы, теорема Гамильтона–Кэли, правила Литтлвуда–Ричардсона.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье мы продолжаем исследование суперсимметричных квантовых матричных алгебр $GL(m|n)$ -типа, начатое в работе [1]. Напомним кратко историю вопроса.

Первые примеры квантовых матричных алгебр возникли в основополагающих работах Дринфельда [2] и Решетихина, Тахтаджяна, Фаддеева [3], где рассматри-

---

*Université de Valenciennes, Valenciennes, France. E-mail: gurevich@univ-valenciennes.fr

†Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany; Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Россия. E-mail: pyatov@thsun1.jinr.ru

‡Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл, Россия. E-mail: Pavel.Saponov@ihep.ru

вались алгебры квантовых функций на группах (в дальнейшем кратко именуемые РТФ-алгебрами). Вскоре после этого был введен в рассмотрение другой важный класс квантовых матричных алгебр (см., например, [4]) – так называемые алгебры уравнения отражения, или, кратко, RE-алгебры (от английского термина “reflection equation”). Общее определение квантовой матричной алгебры возникло при попытке дать РТФ- и RE-алгебрам единое описание [5]. На первый взгляд такая идея не кажется естественной, поскольку теории представлений РТФ- и RE-алгебр существенно различны. Однако проведенные независимо исследования РТФ-алгебр [6] и RE-алгебр [7], [8] обнаружили замечательное сходство структуры этих алгебр и классической матричной алгебры. Как выяснилось, и для RE-алгебр, и для РТФ-алгебр можно сформулировать некоммутативное обобщение теоремы Гамильтона–Кэли. Кроме того, в обоих случаях оказалось возможным определить понятие спектра для некоммутативной матрицы, построенной из генераторов алгебры. На основе этих наблюдений определение квантовой матричной алгебры независимым образом воспроизводилось в работе [9]. Там же некоммутативная версия теоремы Гамильтона–Кэли была доказана для алгебр общего линейного типа [9]–[11].

Опыт исследования квантовых матричных алгебр $GL(m)$ -типа явился хорошей основой для дальнейших построений. В исследовании других серий квантовых матричных алгебр можно выделить два направления – исследование семейств алгебр типа алгебры Гекке и семейств алгебр типа алгебры Бирман–Мураками–Венция (БМВ-алгебры). Отличие этих семейств заключается в том, что при построении квантовой матричной алгебры используются R -матричные представления различных фактор-алгебр групповой алгебры группы кос (соответственно алгебры Гекке и БМВ-алгебры).

Семейство алгебр БМВ-типа содержит серии ортогональных и симплектических квантовых матричных алгебр и их суперсимметричные обобщения. Изучение этого случая начато в работе [12], где доказывается тождество Гамильтона–Кэли и определяется спектр квантовых матриц для алгебр ортогональной и симплектической серий.

Семейство алгебр геккевского типа включает общие линейные алгебры, а также их суперсимметричные аналоги – квантовые матричные алгебры $GL(m|n)$ -типа. Серии алгебр $GL(m|n)$ -типа рассматривались в нашей предыдущей статье [1], где было дано определение серии и была доказана теорема Гамильтона–Кэли для данной серии. Работа [1] обобщает, с одной стороны, результаты Кантора и Тришина [13], [14] по характеристическим тождествам для классических суперматриц (инвариантное тождество Гамильтона–Кэли, по терминологии авторов), с другой стороны, исследования Грина и Джарвиса [15] по характеристическим тождествам для линейных супералгебр Ли.

Настоящая статья посвящена определению спектра квантовой суперматрицы

$GL(m|n)$ -типа¹⁾, или, иными словами, проблеме параметризации характеристической подалгебры в $GL(m|n)$ -случае (т.е. абелевой подалгебры в квантовой матричной алгебре, содержащей коэффициенты тождества Гамильтона–Кэли). С этой целью нам также приходится подробно исследовать структуру характеристической подалгебры в геккевском случае и выводить несколько серий билинейных соотношений в кольце Λ симметрических функций от счетного числа переменных (определение см. в книге [17]). Полученные комбинаторные соотношения, на наш взгляд, могут представлять самостоятельный интерес.

Статья устроена следующим образом. В п. 2.1 следующего раздела выводятся правила умножения для специального линейного базиса образующих характеристической подалгебры геккевской квантовой матричной алгебры – так называемых функций Шура $s_\lambda(M)$ (обозначения объяснены ниже). Структурные константы умножения в этом базисе совпадают с известными коэффициентами Литтлвуда–Ричардсона. Можно сказать, что мы определяем гомоморфизм кольца Λ симметрических функций на характеристическую подалгебру квантовой матричной алгебры геккевского типа. Этот гомоморфизм в дальнейшем позволяет в геккевском случае проецировать соотношения, доказываемые в кольце Λ , на характеристическую подалгебру. Первая такая серия билинейных соотношений на симметрические функции Шура $s_\lambda \in \Lambda$ доказывается в п. 2.2²⁾. Их вывод основан на формулах Якоби–Труди и на соотношениях Плюккера для произведений детерминантов матриц. Подобный метод использовался ранее в работах [18], [19] для вывода (других) билинейных соотношений. Отметим также, что полученные нами билинейные соотношения родственны формулам факторизации суперсимметрических функций [20], [21].

В третьем разделе мы используем полученные ранее результаты при выводе нескольких (эквивалентных) представлений для тождества Гамильтона–Кэли $GL(m|n)$ -типа [1] (см. теорему 1 ниже). В п. 3.1 левая часть тождества Гамильтона–Кэли преобразуется в произведение двух полиномов степени m и n . Подчеркнем, что для этой факторизации не требуется расширения исходной алгебры собственными значениями квантовой суперматрицы. Насколько нам известно, данный факт ранее не наблюдался даже в случае классических суперматриц. Факторизация позволяет “ковариантным” образом (т.е. не задавая явно $\mathbb{Z}_2$ -градуировки матричных элементов) разделить “четные” и “нечетные” собственные значения квантовой суперматрицы. Таким образом, сам факт факторизации характеристического полинома задает понятие четности в квантовых матричных алгебрах $GL(m|n)$ -типа.

В п. 3.2 выводятся два представления для тождества Гамильтона–Кэли в терминах (косо)симметрических степеней квантовой матрицы³⁾. Эти представления яв-

¹⁾Здесь мы решаем вопрос для общей квантовой матричной алгебры $GL(m|n)$ -типа. На уровне конечномерных представлений семейства RE-алгебр эта проблема рассматривалась в [16].

²⁾Следует различать элементы $s_\lambda \in \Lambda$ и их гомоморфные образы $s_\lambda(M)$ в характеристической подалгебре. В последнем случае аргумент M обозначает матрицу генераторов квантовой матричной алгебры.

³⁾Понятие кососимметрической степени матрицы было введено А. М. Лопшицем (см. [22], с. 342).

ляются обобщением соответствующих результатов работ [14], [23] на случай $q \neq 1$. При выводе мы используем еще одну серию билинейных соотношений для симметрических функций Шура s_λ (см. лемму 1). Эти же соотношения применяются в последнем разделе, посвященном параметризации функций Шура $s_\lambda(M)$.

Наконец, в разделе 4 выводятся формулы для коэффициентов тождества Гамильтона–Кэли квантовой матричной алгебры $GL(m|n)$ -типа в терминах собственных значений квантовой суперматрицы. Показано, что элементы характеристической подалгебры в $GL(m|n)$ -случае параметризуются суперсимметрическими полиномами (их определение см. в [24], а также в [17], раздел 1.3, упражнения 23 и 24). Отметим, что суперсимметрические полиномы были введены в рассмотрение Березиным [25] при решении задачи описания инвариантных полиномов на супералгебре Ли $\mathfrak{gl}(m|n)$ (см. также [26] и приведенные там ссылки).

В приложении доказаны вспомогательные комбинаторные формулы, используемые в доказательстве теоремы 2.

Повсюду в дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями статьи [1]. Ссылки на результаты этой работы будут даваться в сокращенном виде, например, символ (I-3.21) означает ссылку на формулу (21) раздела 3 статьи [1]. Для удобства читателя заключительная часть введения содержит сводку основных определений и результатов, на которые опирается последующее изложение.

Рассмотрим конечномерное линейное пространство V над полем $\mathbb{C}$, $\dim V = N$. Выберем пару элементов $R, F \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$. После фиксации в V некоторой системы базисных векторов $\{v_i\}_{i=1}^N$ линейные операторы R и F можно отождествить с их матрицами относительно этого базиса.

Мы будем пользоваться общепринятыми сокращенными матричными обозначениями статьи [3]. Например, символ R_i (или иногда R_{i+1} в более развернутом виде) означает матрицу оператора $\text{Id}^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes \text{Id}^{\otimes(k-i-1)}$, действующего в пространстве $V^{\otimes k}$, где $\text{Id} \in \text{Aut}(V)$ есть тождественный оператор. Натуральное число k не отражено в сокращенных обозначениях, однако для любой конкретной формулы фактическое значение k легко восстанавливается. Обозначим I единичную матрицу, размерность которой всегда ясна из контекста формул, и $P \in \text{Aut}(V^{\otimes 2})$ – автоморфизм перестановки: $P(u \otimes v) = v \otimes u$.

Операторы R и F образуют исходный набор данных для задания некоторой квантовой матричной алгебры, если они удовлетворяют следующим дополнительным условиям.

1. Операторы R и F являются *строго косообратимыми*. Оператор R (для определенности) называется *косообратимым*, если существует некоторый оператор $\Psi^R \in \text{End}(V^{\otimes 2})$ такой, что $\text{Tr}_{(2)} R_{12} \Psi_{23}^R = P_{13}$. Здесь индекс у символа взятия следа указывает номер пространства V в тензорном произведении, по которому берется след (мы будем придерживаться следующей нумерации пространств $V^{\otimes k} := V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_k$). Условие *строгой* косообратимости означает обратимость элемента $D_1^R := \text{Tr}_{(2)} \Psi_{12}^R$: $D^R \in \text{Aut}(V)$.

С помощью матрицы D^R вводится понятие R -следа⁴⁾ $\text{Tr}_R: \text{Mat}_N(W) \rightarrow W$,

$$\text{Tr}_R(X) := \sum_{i,j=1}^N D_i^{Rj} X_j^i, \quad X \in \text{Mat}_N(W),$$

где W представляет собой произвольное линейное пространство (в дальнейшем в качестве W используется квантовая матричная алгебра).

2. Операторы R и F являются R -матрицами, т.е. решениями уравнения Янга–Бакстера:

$$R_1 R_2 R_1 = R_2 R_1 R_2, \quad F_1 F_2 F_1 = F_2 F_1 F_2.$$

3. Операторы R и F образуют совместимую пару $\{R, F\}$ (порядок операторов в этом обозначении важен), что означает выполнение соотношений

$$R_1 F_2 F_1 = F_2 F_1 R_2, \quad F_1 F_2 R_1 = R_2 F_1 F_2.$$

Зафиксируем упорядоченную пару $\{R, F\}$, удовлетворяющую условиям 1–3. По определению, квантовой матричной алгеброй $\mathcal{M}(R, F)$ называется ассоциативная алгебра с единицей, порожденная N^2 элементами M_j^i матрицы $M = \|M_j^i\|_{i,j=1}^N$, которая удовлетворяет следующему перестановочному соотношению⁵⁾:

$$R_1 M_1 M_2 = M_1 M_2 R_1. \quad (1.1)$$

Здесь матрицы $M_{\bar{k}}$ строятся по итеративному правилу

$$M_{\bar{1}} = M, \quad M_{\overline{k+1}} = F_k M_{\bar{k}} F_k^{-1}, \quad (1.2)$$

и эти определяющие равенства влекут соотношения, аналогичные (1.1), для любой пары последовательных копий матрицы M (лемма I-4):

$$R_k M_{\bar{k}} M_{\overline{k+1}} = M_{\bar{k}} M_{\overline{k+1}} R_k. \quad (1.3)$$

Для выделения специальных серий квантовых матричных алгебр необходимы следующие дополнительные ограничения на R -матрицу R .

4. Минимальный полином матрицы R имеет второй порядок:

$$(R + q^{-1}I)(R - qI) = 0, \quad q \in \{\mathbb{C} \setminus 0\}. \quad (1.4)$$

В этом случае R -матрица R называется *геккевской*, а соответствующая алгебра $\mathcal{M}(R, F)$ относится к квантовым матричным алгебрам геккевского типа. Комплексное число q является параметром алгебры.

⁴⁾В литературе по теории квантовых групп R -след обычно именуется квантовым следом, или q -следом (от английского “quantum”). Используя другой термин в названии этой операции, мы хотели бы избежать ненужных ассоциаций с параметром q алгебры Гекке.

⁵⁾Определяя квантовую матричную алгебру в статье [1], мы налагали дополнительное требование косообратимости оператора $R_f := F^{-1}R^{-1}F$. В работе [12] (см. лемму 3.6) показано, что это свойство следует из условий 1–3.

5. Построим с помощью геккевской R -матрицы (1.4) серии R -матричных представлений алгебр Гекке⁶⁾ $\mathcal{H}_p(q)$,

$$\rho_R: \mathcal{H}_p(q) \rightarrow \text{End}(V^{\otimes p}), \quad p = 2, 3, \dots, \quad (1.5)$$

и введем дополнительное ограничение на параметр q ,

$$k_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \neq 0 \quad \forall k = 2, 3, \dots \quad (1.6)$$

Следствием этого условия является полупростота всех алгебр $\mathcal{H}_p(q)$ при $p = 2, 3, \dots$.

Теперь среди квантовых матричных алгебр геккевского типа мы можем выделить подкласс алгебр $GL(m|n)$ -типа. Для этого рассмотрим набор примитивных идемпотентов $E_\alpha^\lambda \in H_p(q)$, нумеруемых стандартными таблицами Юнга $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\}$, где $\lambda \vdash p$ есть некоторое разбиение числа p , а индекс α перечисляет различные стандартные таблицы, отвечающие разбиению λ (см. раздел I-2). По определению, квантовая матричная алгебра $GL(m|n)$ -типа задается следующими условиями:

5а) представления ρ_R (1.5) точны для всех $p < (m+1)(n+1)$;

5б) для $p \geq (m+1)(n+1)$ ядро представления ρ_R генерируется (любым) примитивным идемпотентом $E_\alpha^{((n+1)^{(m+1)})}$, отвечающим прямоугольной диаграмме Юнга $((n+1)^{(m+1)})$;

5в) функция Шура $s_{(n^m)}(M)$ (определение дано ниже), соответствующая прямоугольной диаграмме (n^m) , обратима в алгебре⁷⁾.

В качестве комментария отметим следующее.

- Классические суперматрицы ($q = 1$) $GL(m|n)$ -типа удовлетворяют свойствам 5а и 5б (доказательство содержится в работе [29], теорема 2, и в работе [13], теорема 1.2). Следовательно, пользуясь известными утверждениями о деформациях алгебр, мы заключаем, что эти свойства остаются верными и для множества квантовых матричных алгебр, связанных со стандартными R -матрицами $GL(m|n)$ -типа. Эти алгебры описаны, например, в работах [30], [31]. Для наших целей удобно использовать 5а и 5б в качестве определяющих условий для квантовых матричных алгебр $GL(m|n)$ -типа. Более того, весьма вероятно, что при общих значениях q любая квантовая матричная алгебра геккевского типа является алгеброй $GL(m|n)$ -типа (для некоторых значений натуральных параметров m и n). Обоснование этого утверждения мы планируем привести в отдельной работе.

- Заметим, что в приведенном выше определении не предполагается обязательного выполнения соотношения $m + n = N = \dim V$. Хотя в стандартных примерах эта связь параметров присутствует (например, в квантовых матричных алгебрах,

⁶⁾ Краткое описание алгебр Гекке, их R -матричных представлений, набора примитивных идемпотентов и базиса матричных единиц приведено в разделах 2 и 3 работы [1]. Более полное изложение этих вопросов можно найти в обзорах [27], [28] и цитируемой там литературе.

⁷⁾ Это условие не налагалось в статье [1]. В настоящей работе оно необходимо для спектральной параметризации характеристической подалгебры (см. (3.5), (3.6)).

построенных по стандартной R -матрице $GL(m|n)$ -типа), известны и исключения из этого правила. Серия контрпримеров построена в работе [32].

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением квантовых матричных алгебр геккевского типа с параметром q , удовлетворяющим условию (1.6).

Характеристической подалгеброй $\text{Char}(R, F)$ квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R, F)$ называется линейная оболочка множества *функций Шура* $s_\lambda(M)$, определенных равенствами

$$s_0(M) := 1, \quad s_\lambda(M) := \text{Tr}_{R(1 \dots k)}(M_{\bar{1}} \dots M_{\bar{k}} \rho_R(E_\alpha^\lambda)), \quad \lambda \vdash k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

где E_α^λ является одним из примитивных идемпотентов, отвечающих разбиению λ (выражение в формуле (1.7) не зависит от выбора α). Как показано в статье [10], подалгебра $\text{Char}(R, F)$ абелева относительно умножения в $\mathcal{M}(R, F)$.

Рассмотрим далее подпространство $\text{Pow}(R, F) \subset \text{Mat}_N(\mathcal{M}(R, F))$, образованное всевозможными линейными комбинациями следующих матриц:

$$I \text{ ch}(M) \quad \forall \text{ ch}(M) \in \text{Char}(R, F), \quad (1.8)$$

$$M^{(x^{(k)})} := \text{Tr}_{R(2 \dots k)}(M_{\bar{1}} \dots M_{\bar{k}} \rho_R(x^{(k)})) \quad \forall x^{(k)} \in \mathcal{H}_k(q), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (1.9)$$

В дальнейшем элементы пространства $\text{Pow}(R, F)$ будут именоваться *квантовыми матрицами*. В работе [1] показано, что пространство квантовых матриц обладает структурой правого модуля над характеристической подалгеброй $\text{Char}(R, F)$, и как $\text{Char}(R, F)$ -модуль оно генерируется последовательностью *квантовых матричных степеней* матрицы M

$$M^{\bar{0}} := I, \quad M^{\bar{1}} := M, \quad M^{\bar{k}} := \text{Tr}_{R(2 \dots k)}(M_{\bar{1}} \dots M_{\bar{k}} R_{k-1} \dots R_1), \quad k = 2, 3, \dots. \quad (1.10)$$

В разделе 4.4 работы [12] построен аналог матричного умножения для элементов из $\text{Pow}(R, F)$. Это умножение квантовых матриц согласовано со структурой правого $\text{Char}(R, F)$ -модуля на $\text{Pow}(R, F)$, является ассоциативным (см. [12], предложение 4.12) и, кроме того, является коммутативным (см. [8], предложения 4.13 и 4.14). Последнее свойство не удивительно, поскольку все элементы пространства $\text{Pow}(R, F)$ порождены одной и той же квантовой матрицей M^8 . Для понимания дальнейшего изложения достаточно привести основные свойства умножения квантовых матриц (далее оно обозначено символом $*$):

$$M^{\bar{k}} = \underbrace{M * M * \dots * M}_{k \text{ раз}}, \quad (I \text{ ch}(M)) * M^{\bar{k}} = M^{\bar{k}} * (I \text{ ch}(M)) \quad \forall \text{ ch}(M) \in \text{Char}(R, F). \quad (1.11)$$

---

⁸⁾ Следует различать произведение квантовых матриц и произведение элементов квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R, F)$. Последнее есть произведение матричных элементов, тогда как первое есть произведение квантовых матриц как целого.

Заметим также, что для семейства RE-алгебр умножение $*$ сводится к обычному матричному произведению. Подробное описание операции $*$ приведено в работе [12].

Основной результат статьи [1] составляет теорема Гамильтона–Кэли для квантовых матричных алгебр $GL(m|n)$ -типа (теорема I-10). Для компактной формулировки этой теоремы и удобства дальнейшего изложения введем сокращенное обозначение для диаграмм Юнга (разбиений) следующего вида:

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{p \text{ клеток}} \\
 \left\{ \begin{array}{c} \boxed{\dots} \\ \vdots \\ \boxed{\dots} \end{array} \right\} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{l \text{ клеток}} \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{k \text{ клеток}}
 \end{array} = ((p+1)^l, p^{(r-l)}, k) =: [r|p]_k^l. \quad (1.12)$$

Здесь индексы k и l принимают целочисленные значения, $l = 0, \dots, r$, $k = 0, \dots, p$. Если значение одного из индексов k или l равно нулю, мы будем его опускать: $[r|p]_k^0 = [r|p]_k$.

ТЕОРЕМА 1 (тождество Гамильтона–Кэли [1]). *При выполнении условий 1–4 и 5а, 5б квантовая матрица M , составленная из генераторов алгебры $GL(m|n)$ -типа, удовлетворяет характеристическому тождеству*

$$\sum_{i=0}^{n+m} M^{\overline{m+n-i}} \sum_{k=\max\{0, i-n\}}^{\min\{i, m\}} (-1)^k q^{2k-i} s_{[m|n]_{i-k}^k}(M) \equiv 0. \quad (1.13)$$

2. СТРУКТУРА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПОДАЛГЕБРЫ

Рассмотрим градуированное кольцо Λ симметрических функций от счетного числа переменных. Как известно, $\mathbb{Z}$ -базис кольца Λ образован симметрическими функциями Шура s_λ , $\lambda \vdash p$, для всех $p \geq 0$ (мы пользуемся определениями и обозначениями разделов 1.2 и 1.3 монографии [17]).

Мы не случайно выбрали сходные обозначения $s_\lambda(M)$ для элементов (1.7) характеристической подалгебры квантовой матричной алгебры $\mathcal{M}(R, F)$ геккевского типа. Действительно, рассмотрим аддитивное отображение

$$\Lambda \ni s_\lambda \mapsto s_\lambda(M) \in \text{Char}(R, F) \subset \mathcal{M}(R, F) \quad (2.1)$$

(геккевский тип). Наш первый важный результат состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 2. *В предположении, что выполняются условия 1–4 и (1.6), аддитивное отображение (2.1) естественным образом продолжается до гомоморфизма колец.*

Доказательство теоремы приведено в п. 2.1.

В п. 2.2 получены некоторые билинейные соотношения (тождества) для симметрических функций Шура $s_\lambda \in \Lambda$. Эти соотношения находят свое применение при выводе альтернативных представлений для тождества Гамильтона–Кэли в разделе 3.

2.1. Правило Литтлвуда–Ричардсона для умножения функций $s_\lambda(M)$. Теорема 2 доказывается прямыми вычислениями. С технической точки зрения удобнее работать с другой формулировкой теоремы, эквивалентной приведенной выше.

ТЕОРЕМА 2'. *Рассмотрим квантовую матричную алгебру $\mathcal{M}(R, F)$ геккевского типа, генераторами которой являются элементы матрицы M . Пусть параметр q удовлетворяет ограничению (1.6). Тогда умножение элементов характеристической подалгебры $\text{Char}(R, F)$ подчиняется следующему правилу:*

$$s_\lambda(M)s_\mu(M) = \sum_{\nu \vdash (k+p)} c_{\lambda\mu}^\nu s_\nu(M), \quad (2.2)$$

где $\lambda \vdash p$ и $\mu \vdash k$ суть произвольные разбиения, $s_\lambda(M), s_\mu(M) \in \text{Char}(R, F)$ являются функциями Шура (см. определение (1.7)), а константы $c_{\lambda\mu}^\nu$ совпадают с коэффициентами Литтлвуда–Ричардсона (см. [17], раздел 1.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку справедливость формулы (2.2) при $p = 0$ или $k = 0$ очевидна, мы будем полагать $p \geq 1$ и $k \geq 1$.

Докажем сначала соотношение (2.2) для случая, когда разбиение $\mu = (1^k)$ представлено диаграммой с одним столбцом. В этой ситуации общая формула (2.2) преобразуется к следующему виду:

$$s_\lambda(M)s_{(1^k)}(M) = \sum'_{\substack{\nu \supset \lambda \\ \nu \vdash (k+p)}} s_\nu(M). \quad (2.3)$$

Символ $\supset$ обозначает отношение включения на множестве стандартных таблиц Юнга (см. раздел I.2.1), а в суммировании $\sum'$ учитываются только те диаграммы ν , для которых теоретико-множественная разность с диаграммой λ является вертикальной полосой (терминология раздела 1.1 монографии [17]).

Примитивные идемпотенты $E^{(1^k)}$ алгебры Гекке, отвечающие одностолбцовым диаграммам (1^k) , $k = 2, 3, \dots$, строятся с помощью хорошо известных итеративных соотношений (см., например, лемму 7.2 работы [33] или раздел 2.3 работы [8])

$$E^{(1)} = 1, \quad E^{(1^k)} = \frac{(k-1)_q}{k_q} E^{(1^{k-1})} \left(\frac{q^{k-1}}{(k-1)_q} 1 - \sigma_{k-1} \right) E^{(1^{k-1})}. \quad (2.4)$$

Здесь мы используем обозначения раздела I.2.2: $\{\sigma_i\}_{i=1}^{p-1}$ – набор генераторов алгебры Гекке $\mathcal{H}_p(q)$ (см. формулы (I.2.2)–(I.2.4)), их образами в R -матричных представлениях (1.5) являются R -матрицы, $\rho_R(\sigma_i) = R_i$; k_q – стандартное обозначение для q -чисел, введенное ранее в формуле (1.6).

Пользуясь соотношениями (2.4), выполним последовательно следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned}
 s_\lambda(M)s_{(1^k)}(M) &= \text{Tr}_{R(1\dots p+k)} [\rho_R(E_\alpha^\lambda) \rho_R(E^{(1^k)\uparrow p}) M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{p+k}}] = \\
 &= \frac{(k-1)_q}{k_q} \text{Tr}_{R(1\dots p+k)} \left[\rho_R(E_\alpha^\lambda E^{(1^{k-1})\uparrow p}) \left(\frac{q^{k-1}}{(k-1)_q} I - R_{p+k-1} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \rho_R(E^{(1^{k-1})\uparrow p}) M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{p+k}} \right] = \\
 &= \frac{(k-1)_q}{k_q} \text{Tr}_{R(1\dots p+k)} \left[\rho_R(E_\alpha^\lambda E^{(1^{k-1})\uparrow p}) \left(\frac{q^{k-1}}{(k-1)_q} I - R_{p+k-1} \right) M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{p+k}} \right] = \dots \\
 &\dots = \frac{1}{k_q} \text{Tr}_{R(1\dots p+k)} \left[\rho_R(E_\alpha^\lambda) (qI - R_{p+1}) \dots \left(\frac{q^{k-1}}{(k-1)_q} I - R_{p+k-1} \right) M_{\overline{1}} \dots M_{\overline{p+k}} \right].
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

В первой строке преобразований мы воспользовались определением функций Шура (1.7) и свойством (I.3.19) для $s_{(1^k)}(M)$ (обозначение $E_\beta^{\mu\uparrow p}$ объясняется в лемме I.6). Напомним, что преобразуемое выражение не зависит от выбора значения индекса α , нумерующего примитивные идемпотенты $E_\alpha^\lambda \in \mathcal{H}_p(q)$. Во второй строке использована формула (2.4) (напомним, что $R_i = \rho_R(\sigma_i)$). В третьей строке преобразований сомножитель $\rho_R(E^{(1^{k-1})\uparrow p})$ переставляется с цепочкой произведений матриц M на основании соотношений (1.3), затем применяется циклическое свойство R -следа, чтобы переместить $\rho_R(E^{(1^{k-1})\uparrow p})$ в крайнее левое положение и, наконец, учитывается коммутативность идемпотентов $E^{(1^{k-1})\uparrow p}$ и E_α^λ . Повторив описанные операции $(k-1)$ раз, мы получим в итоге выражение, приведенное в последней строке.

Для удобства последующих ссылок введем специальное обозначение для выражения, стоящего в формуле (2.5) под знаком R -следа,

$$Q(R) := \rho_R(E_\alpha^\lambda) X_{p+1}, \tag{2.6}$$

где

$$X_i := \left(\frac{q^{i-p}}{(i-p)_q} I - R_i \right) \left(\frac{q^{i-p+1}}{(i-p+1)_q} I - R_{i+1} \right) \dots \left(\frac{q^{k-1}}{(k-1)_q} I - R_{p+k-1} \right). \tag{2.7}$$

Заметим, что вследствие перестановочных соотношений (1.3) и циклического свойства R -следа можно совершать циклические перестановки сомножителей в $Q(R)$, не изменяя значения выражения (2.5). Воспользуемся такой циклической инвариантностью для преобразования $Q(R)$ к подходящему виду.

Стратегия этого преобразования заключается в следующем. Как известно, любой идемпотент алгебры Гекке $E_\alpha^\lambda \in \mathcal{H}_p(q)$ ($\lambda \vdash p$) может быть представлен в виде следующей суммы идемпотентов $E_\beta^\nu \in \mathcal{H}_{p+i}(q)$, $\nu \vdash (p+i)$, $i \geq 1$ (см. формулу (I.2.21)):

$$E_\alpha^\lambda = \sum_{\substack{\nu \supset \lambda \\ \nu \vdash (p+i)}} \sum_{\beta: \beta \supset \alpha} E_\beta^\nu. \tag{2.8}$$

Последовательно повышая значение i в разложении (2.8) от 2 до k , мы сможем вычислить значения множителей $(q^{i-1}/(i-1)_q I - R_{p+i-1})$, входящих в $Q(R)$, на идемпотентах $\rho_R(E_\beta^\nu)$ в соответствии с правилом

$$\rho_R(E_\beta^\nu) \left(\frac{q^{i-1}}{(i-1)_q} I - R_{p+i-1} \right) \stackrel{\circ}{=} \frac{(\ell_{p+i-1} + i - 1)_q}{(i-1)_q (\ell_{p+i-1})_q} \rho_R(E_\beta^\nu). \quad (2.9)$$

Здесь символ “ $\stackrel{\circ}{=}$ ” означает равенство по модулю циклической перестановки сомножителей; $\ell_j := c(j) - c(j+1)$ обозначает разность содержаний клеток с номерами j и $(j+1)$ в стандартной таблице $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \beta \end{smallmatrix} \right\}$ (соответствующие определения приведены в разделе I.2.1).

Приведенное выше правило вычисления множителей с R -матрицами обосновывается следующим образом. Заметим, что в алгебре $\mathcal{H}_{p+i}(q)$ (см. (I.2.16)) справедливы соотношения

$$E_\beta^\nu \sigma_j \equiv E_\beta^\nu \left(\sigma_j + \frac{q^{-\ell_j}}{(\ell_j)_q} 1 \right) - \frac{q^{-\ell_j}}{(\ell_j)_q} E_\beta^\nu = \frac{(\ell_j + 1)_q}{(\ell_j)_q} E_{\beta \pi_j(\beta)}^\nu - \frac{q^{-\ell_j}}{(\ell_j)_q} E_\beta^\nu, \quad 1 \leq j \leq p+i-1. \quad (2.10)$$

Символ $E_{\beta \pi_j(\beta)}^\nu$ обозначает внедиагональную матричную единицу, которая нумеруется парой стандартных таблиц Юнга $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \beta \end{smallmatrix} \right\}$ и $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \pi_j(\beta) \end{smallmatrix} \right\}$, причем таблица $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \pi_j(\beta) \end{smallmatrix} \right\}$ получается из $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \beta \end{smallmatrix} \right\}$ перестановкой π_j клеток с номерами j и $(j+1)$. Если таблица $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \pi_j(\beta) \end{smallmatrix} \right\}$ оказывается нестандартной, то слагаемое с $E_{\beta \pi_j(\beta)}^\nu$ в формуле (2.10) отсутствует.

Преобразуем теперь произведение $\rho_R(E_\beta^\nu) R_{p+i-1} = \rho_R(E_{\beta \pi_{p+i-1}}^\nu)$, стоящее в левой части формулы (2.9), с помощью равенства (2.10) и заметим, что вследствие циклической инвариантности вклад внедиагональных матричных единиц $\rho_R(E_{\beta \pi_j(\beta)}^\nu)$ в выражение $Q(R)$ равен нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho_R(E_{\beta \pi_j(\beta)}^\nu) X_{p+i} &= \rho_R(E_{\beta'}^{\nu'} E_{\beta \pi_j(\beta)}^\nu) X_{p+i} \stackrel{\circ}{=} \rho_R(E_{\beta \pi_j(\beta)}^\nu) X_{p+i} \rho_R(E_{\beta'}^{\nu'}) = \\ &= \rho_R(E_{\beta \pi_j(\beta)}^\nu E_{\beta'}^{\nu'}) X_{p+i} = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где стандартная таблица $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu' \\ \beta' \end{smallmatrix} \right\}$, которой отвечает идемпотент $E_{\beta'}^{\nu'}$, получается из таблицы $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \beta \end{smallmatrix} \right\}$ удалением клетки с номером $p+i$. Первое и последнее равенства в последовательности преобразований (2.11) следуют из (2.8) и таблицы умножения матричных единиц (I.2.7). Во втором равенстве сделана циклическая перестановка сомножителей, которая допустима в выражении $Q(R)$. Кроме того, множители $\rho_R(E_{\beta'}^{\nu'})$ и X_{p+i} зависят от взаимно коммутирующих R -матриц, откуда следует третье равенство в (2.11).

Наконец, перемножая все коэффициенты при диагональной матричной единице $\rho_R(E_\beta^\nu)$ в выражении $Q(R)$, мы получим правую часть формулы (2.9).

Приступим к преобразованию $Q(R)$. Полагая в разложении (2.8) $i = 2$, имеем

$$Q(R) = \sum_{\substack{\nu \supset \lambda \\ \nu \vdash (n+2)}} \sum_{\beta: \beta \supset \alpha} \rho_R(E_\beta^\nu) (qI - R_{p+1}) X_{p+2}. \quad (2.12)$$

Для последующих вычислений необходимо указать способ нумерации таблиц Юнга. Для произвольной таблицы $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \alpha \end{smallmatrix} \right\}$, $\lambda \vdash p$, введем мультииндекс $\alpha := \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ в виде упорядоченного множества пар натуральных чисел $a_i := \{x_i, y_i\}$, где x_i и y_i являются соответственно номерами столбца и строки, в которых содержится клетка с числом i . Напомним, что содержание i -й клетки определяется как разность $c(i) = x_i - y_i$ (см. раздел I.2.1).

В формуле (2.12) при суммировании по мультииндексу β изменяются только последние две его компоненты, которые мы для краткости обозначим a и b , т.е. $\beta = \{\dots, a, b\}$. Для значений, которые могут принимать компоненты a и b в суммировании (2.12), имеются следующие три возможности.

1. Случай $a = \{x, y\}$, $b = \{x+1, y\}$. В этом случае $\ell_{p+1} = c(p+1) - c(p+2) = -1$. Следовательно, в силу правила (2.9) вклад соответствующих таблиц Юнга в $Q(R)$ равен нулю.

2. Случай $a = \{x, y\}$, $b = \{x, y+1\}$. В этом случае $\ell_{p+1} = c(p+1) - c(p+2) = 1$, и вклад таких таблиц в выражение (2.12) равен

$$2_q \rho_R(E_{\{\dots, a, b\}}^\nu) X_{p+2}. \quad (2.13)$$

3. Случай $a = \{x, y\}$, $b = \{\bar{x}, \bar{y}\}$, причем $x \neq \bar{x}$ и $y \neq \bar{y}$. В данном случае имеется пара стандартных таблиц одинаковой формы, нумеруемых индексами $\beta = \{\dots, a, b\}$ и $\pi_{p+1}(\beta) = \{\dots, b, a\}$. Объединяя вклады таких таблиц и учитывая (2.9), получаем вклад

$$\left(\rho_R(E_{\{\dots, a, b\}}^\nu) \frac{(\ell_{p+1} + 1)_q}{(\ell_{p+1})_q} + \rho_R(E_{\{\dots, b, a\}}^\nu) \frac{(\ell_{p+1} - 1)_q}{(\ell_{p+1})_q} \right) X_{p+2}. \quad (2.14)$$

Так как слагаемое (2.13) также можно записать в форме (2.14) при $\ell_{p+1} = 1$, то сумма (2.12) представляется в виде

$$Q(R) \stackrel{\circ}{=} \sum'_{\substack{\nu \supset \lambda \\ \nu \vdash (p+2) \\ (a, b)}} \left(\rho_R(E_{\{\dots, a, b\}}^\nu) \frac{(\ell_{p+1} + 1)_q}{(\ell_{p+1})_q} + \rho_R(E_{\{\dots, b, a\}}^\nu) \frac{(\ell_{p+1} - 1)_q}{(\ell_{p+1})_q} \right) X_{p+2}, \quad (2.15)$$

где суммирование ведется по диаграммам $\nu \vdash (p+2)$ различной формы, которые перечисляются *неупорядоченными* парами (a, b) , $a = \{x, y\}$ и $b = \{\bar{x}, \bar{y}\}$. Кроме того, имеется дополнительное ограничение $y \neq \bar{y}$, которое означает, что в диаграмме ν клетки с номерами $(p+1)$ и $(p+2)$ не могут располагаться в одной и той же строке. Это ограничение символически отражено штрихом у знака суммирования $\sum'$ (см. (2.3)).

Для последующих преобразований удобно перейти к эквивалентному определению величины ℓ_{p+1} и соответственно изменить обозначение:

$$\ell_{p+1} = c(p+1) - c(p+2) \longrightarrow \ell_{ab} = (x - y) - (\bar{x} - \bar{y}).$$

Это позволяет явно отразить зависимость ℓ_{ab} от переменных суммирования a и b .

Перейдем к следующему шагу преобразования $Q(R)$. Подставляя разложение (2.8) с $i = 3$ в формулу (2.15) и учитывая, что $\ell_{ab} = -\ell_{ba}$, мы приходим к формуле

$$Q(R) \stackrel{\circ}{=} \sum'_{\substack{\tau \supset \lambda \\ \tau \vdash (p+2) \\ (a,b)}} \sum_{\substack{\nu \vdash (p+3): \\ c = \nu \setminus \tau}} \left(\rho_R(E_{\{\dots, a, b, c\}}^\nu) \frac{(\ell_{ab} + 1)_q}{(\ell_{ab})_q} + \right. \\ \left. + \rho_R(E_{\{\dots, b, a, c\}}^\nu) \frac{(\ell_{ba} + 1)_q}{(\ell_{ba})_q} \right) \left(\frac{q^2}{2_q} I - R_{p+2} \right) X_{p+3}, \quad (2.16)$$

где индекс суммирования c перечисляет все допустимые добавления клетки $(p+3)$ к диаграмме $\tau \vdash (p+2)$. Применением правила (2.9) выписанное выше выражение приводится к виду

$$Q(R) \stackrel{\circ}{=} \sum'_{\substack{\tau \supset \lambda \\ \tau \vdash (p+2) \\ (a,b)}} \sum_{\substack{\nu \vdash (p+3): \\ c = \nu \setminus \tau}} \left(\rho_R(E_{\{\dots, a, b, c\}}^\nu) \frac{(\ell_{ab} + 1)_q}{(\ell_{ab})_q} \frac{(\ell_{bc} + 2)_q}{2_q (\ell_{bc})_q} + \right. \\ \left. + \rho_R(E_{\{\dots, b, a, c\}}^\nu) \frac{(\ell_{ba} + 1)_q}{(\ell_{ba})_q} \frac{(\ell_{ac} + 2)_q}{2_q (\ell_{ac})_q} \right) X_{p+3}. \quad (2.17)$$

Отметим, что образы идемпотентов $\rho_R(E_{\{\dots, a, b, c\}}^\nu)$ и $\rho_R(E_{\{\dots, b, a, c\}}^\nu)$, входящие в выражение (2.17), могут быть отождествлены. Действительно, вводя обозначение

$$\sigma_i(\ell) := \sigma_i - \frac{q^\ell}{(\ell)_q} 1,$$

получаем

$$\begin{aligned} \rho_R(E_{\{\dots, b, a, c\}}^\nu) X_{p+3} &\stackrel{\circ}{=} \rho_R(\sigma_{p+1}(\ell_{ab}) E_{\{\dots, b, a, c\}}^\nu) X_{p+3} \rho_R(\sigma_{p+1}(\ell_{ab}))^{-1} = \\ &= \rho_R \left(E_{\{\dots, a, b, c\}}^\nu \sigma_{p+1}(-\ell_{ab}) (\sigma_{p+1}(\ell_{ab}))^{-1} \right) X_{p+3} \stackrel{\circ}{=} \\ &\stackrel{\circ}{=} \rho_R(E_{\{\dots, a, b, c\}}^\nu) X_{p+3}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где в процессе преобразований приняты во внимание циклическая инвариантность, соотношения (I.2.13) и (I.2.10), а также формула (2.11). Таким образом, порядок компонент a и b мультииндекса суммирования по таблицам Юнга более не является существенным, и мы упрощаем обозначение, заменив $E_{\{\dots, a, b, c\}}^\nu$ на $E_{\{\dots, c\}}^\nu$. В результате выражение (2.17) преобразуется к следующему виду:

$$Q(R) \stackrel{\circ}{=} \sum'_{\substack{\tau \supset \lambda \\ \tau \vdash (p+2) \\ (a,b)}} \sum_{\substack{\nu \vdash (p+3): \\ c = \nu \setminus \tau}} \rho_R(E_{\{\dots, c\}}^\nu) \frac{(\ell_{ac} + 1)_q}{(\ell_{ac})_q} \frac{(\ell_{bc} + 1)_q}{(\ell_{bc})_q} X_{p+3}. \quad (2.19)$$

Здесь мы воспользовались связью $\ell_{ab} = \ell_{ac} - \ell_{bc}$ и упростили коэффициент при $\rho_R(E_{\{\dots, c\}}^\nu)$ с помощью q -комбинаторной формулы (П.3), в которой следует положить

$k = 2$ и $b_1 = \ell_{ac}$, $b_2 = \ell_{bc}$ (см. приложение). Двойное суммирование ведется с тем ограничением, что клетки $(p+1)$, $(p+2)$ и $(p+3)$, помеченные индексами a , b и c , должны располагаться в различных строках диаграммы ν .

Наконец, подготовим выражение (2.19) к очередному этапу преобразований. С этой целью сгруппируем слагаемые, отвечающие таблицам одинаковой формы:

$$\begin{aligned} Q(R) \stackrel{\circ}{=} \sum'_{\substack{\nu \supset \lambda \\ \nu \vdash (p+3) \\ (a,b,c)}} & \left(\rho_R(E_{\{\dots,a,b,c\}}^\nu) \frac{(\ell_{ac}+1)_q}{(\ell_{ac})_q} \frac{(\ell_{bc}+1)_q}{(\ell_{bc})_q} + \right. \\ & + \rho_R(E_{\{\dots,b,c,a\}}^\nu) \frac{(\ell_{ba}+1)_q}{(\ell_{ba})_q} \frac{(\ell_{ca}+1)_q}{(\ell_{ca})_q} + \\ & \left. + \rho_R(E_{\{\dots,c,a,b\}}^\nu) \frac{(\ell_{cb}+1)_q}{(\ell_{cb})_q} \frac{(\ell_{ab}+1)_q}{(\ell_{ab})_q} \right) X_{p+3}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где суммирование идет по различным диаграммам разбиений $\nu \vdash (p+3)$, нумеруемым такими *неупорядоченными* тройками (a, b, c) , что никакая пара клеток из a , b и c не расположена в одной строке диаграммы ν .

Повторяя преобразования, описанные формулами (2.16)–(2.20), последовательно для $i = 4, \dots, k$ и пользуясь q -комбинаторными соотношениями (П.3), получим следующий результат:

$$Q(R) \stackrel{\circ}{=} \sum'_{\substack{\tau \supset \lambda \\ \tau \vdash (p+k-1) \\ (a_1, \dots, a_{k-1})}} \sum_{\substack{\nu \vdash (p+k): \\ a_k = \nu \setminus \tau}} \rho_R(E_{\{\dots, a_k\}}^\nu) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(\ell_{a_i a_k} + 1)_q}{(\ell_{a_i a_k})_q}. \quad (2.21)$$

Здесь неупорядоченные наборы $(a_1, \dots, a_{k-1})$ нумеруют диаграммы $\tau \vdash (p+k-1)$ различной формы, ограниченные условием, что разность $\tau \setminus \lambda$ является вертикальной полосой. Индекс суммирования a_k пробегает все возможные диаграммы, которые получаются из $\tau \vdash (p+k-1)$ добавлением клетки $(p+k)$.

Формула (2.21) аналогична соотношению (2.19) при $i = k$. Важное отличие заключается в отсутствии X -сомножителя в ее правой части (можно считать $X_{p+k} = 1$). Вследствие этого в финальной формуле для $Q(R)$ можно отождествить образы различных идемпотентов $\rho_R(E_{\{\dots, a_k, \dots\}}^\nu)$, отвечающих таблицам разбиений $\nu \vdash (p+k)$ одинаковой формы (индекс a_k пробегает все возможные положения клетки с номером $(p+k)$). Таким образом, аналог формулы (2.20) записывается в виде

$$Q(R) \stackrel{\circ}{=} \sum'_{\substack{\nu \supset \lambda \\ \nu \vdash (p+k) \\ (a_1, \dots, a_k)}} \rho_R(E_{\{\dots\}}^\nu) \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{(\ell_{a_i a_j} + 1)_q}{(\ell_{a_i a_j})_q} = k_q \sum'_{\substack{\nu \supset \lambda \\ \nu \vdash (p+k)}} \rho_R(E_{\{\dots\}}^\nu), \quad (2.22)$$

где при переходе ко второму равенству использована формула (П.2), в которой следует положить $\ell_{a_i a_j} = b_i - b_j$. Символом $E_{\{\dots\}}^\nu$ обозначен произвольный примитивный идемпотент, отвечающий диаграмме Юнга ν , а суммирование $\sum'$ идет по всем диаграммам $\nu \vdash (p+k)$ таким, что разность $\nu \setminus \lambda$ является вертикальной полосой.

Подставляя выражение (2.22) для $Q(R)$ в (2.5), мы приходим к формуле (2.3), представляющей собой частный случай правила Литтлвуда–Ричардсона для умножения функций Шура $s_\lambda(M)$.

Распространим доказательство на общий случай. С этой целью заметим, что элементы $s_{(1^k)}(M)$, $k = 0, 1, \dots$, образуют $\mathbb{Z}$ -базис генераторов множества всех функций Шура. Действительно, пользуясь формулой (2.3), легко увидеть, что

$$s_{(2^k 1^l)}(M) = s_{(1^{k+l})}(M) s_{(1^k)}(M) - s_{(1^{k+l+1})}(M) s_{(1^{k-1})}(M) \quad \forall k \geq 1, \quad l \geq 0.$$

Затем с помощью соотношения (2.3) элементы $s_{(3^k 2^l 1^p)}(M)$ также выражаются через линейные комбинации мономов вида $s_{(2^r 1^s)}(M) s_{(1^t)}(M)$ и т.д. Повторив эту процедуру конечное число раз, мы можем записать любую функцию Шура $s_\lambda(M)$ в виде полинома от генераторов $s_{(1^k)}(M)$, $k = 0, 1, \dots$, с целыми коэффициентами. Явные выражения даются известными тождествами Якоби–Труди (см. [17], раздел 1.3).

Наконец, поскольку произведение генераторов $s_{(1^k)}(M)$ описывается частным случаем (2.3) правила Литтлвуда–Ричардсона, то и произведение двух произвольных функций Шура $s_\lambda(M)$ и $s_\mu(M)$ задается выражением (2.2).

2.2. Билинейные соотношения. В этом пункте мы выведем серию билинейных соотношений для симметрических функций Шура $s_\lambda \in \Lambda$. Образами этих соотношений относительно гомоморфизма (2.1) являются тождества в характеристической подалгебре квантовой матричной алгебры геккевского типа. Билинейные соотношения применяются ниже в п. 3.1 для преобразования тождества Гамильтона–Кэли в $GL(m|n)$ -случае в произведение двух сомножителей, что позволяет разделить “четную” и “нечетную” части спектра квантовых матриц.

Наше рассмотрение основано на соотношениях Плюккера для произведения детерминантов матриц, поэтому начнем изложение с краткого напоминания этих соотношений (подробности приведены в [34]).

Рассмотрим пару $(t \times t)$ -матриц $A = \|a_{ij}\|_1^t$ и $B = \|b_{ij}\|_1^t$. Сопоставим i -й строке матрицы A символ a_{i*} и введем следующие обозначения:

$$\det A := [A], \quad A := \begin{pmatrix} a_{1*} & \dots & a_{i*} & \dots & a_{t*} \\ 1 & \dots & i & \dots & t \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

где последнее обозначение позволяет следить за порядком расположения строк матрицы A : в данном случае строка матричных элементов a_{i*} находится на i -м месте (при счете сверху вниз).

Зафиксируем набор целочисленных данных $\{k, r_1, r_2, \dots, r_k\}$, где $1 \leq k \leq t$ и $1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq t$. Соответствующие этим данным соотношения Плюккера

имеют вид

$$[A][B] = \sum_{1 \leq s_1 < \dots < s_k \leq t} \begin{bmatrix} a_{1*} & \dots & b_{s_1*} & \dots & b_{s_2*} & \dots & b_{s_k*} & \dots & a_{t*} \\ 1 & \dots & r_1 & \dots & r_2 & \dots & r_k & \dots & t \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} b_{1*} & \dots & a_{r_1*} & \dots & a_{r_2*} & \dots & a_{r_k*} & \dots & b_{t*} \\ 1 & \dots & s_1 & \dots & s_2 & \dots & s_k & \dots & t \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

где суммирование ведется по всем возможным наборам $\{k, s_1, \dots, s_k\}$.

Применим теперь соотношения Плюккера для доказательства следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Зафиксируем натуральные числа r, p, l и k , удовлетворяющие неравенствам $1 \leq l \leq r$ и $1 \leq k \leq p$. Тогда в кольце симметрических функций Λ выполняются следующие билинейные соотношения (см. обозначения (1.12)):*

$$s_{[r|p]_k^l} s_{[r|p]} = s_{[r-1|p-1]_{(k-1)}^{(l-1)}} s_{[r+1|p+1]} + s_{[r|p]_k} s_{[r|p]^l}. \quad (2.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся известным детерминантным представлением Якоби–Труди симметрической функции s_λ , отвечающей разбиению $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ (см. [17], раздел 1.3, соотношение (3.4)),

$$s_\lambda = \det \|h_{\lambda_i - i + j}\|_{i,j=1}^t. \quad (2.26)$$

Здесь натуральное число $t \geq r$, и элементами матрицы в правой части служат полные симметрические функции (симметрические функции Шура, отвечающие однострочным диаграммам) $h_i := s_{(i)}$. Кроме того, по определению, $h_i := 0$ при $i < 0$.

Подставив выражение (2.26) в левую часть (2.25) мы получим в обозначениях (2.23), что

$$s_{[r|p]_k^l} s_{[r|p]} = \begin{bmatrix} h_{p+1*} & h_{p*} & \dots & h_{p-l+2*} & h_{p-l*} & \dots & h_{p-r+1*} & h_{k-r*} \\ 1 & 2 & \dots & l & l+1 & \dots & r & r+1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} h_{p*} & h_{p-1*} & \dots & h_{p-l+1*} & h_{p-l*} & \dots & h_{p-r+1*} & h_{-r*} \\ 1 & 2 & \dots & l & l+1 & \dots & r & r+1 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

где символы $h_{i*} := (h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, \dots)$ отвечают строкам матрицы из формулы Якоби–Труди (2.26).

Преобразуем теперь правую часть выражения (2.27) с помощью соотношений Плюккера для набора целых данных $\{k = 1, r_1 = r + 1\}$. В данном случае большинство слагаемых в формуле (2.24) обращается в нуль, поскольку они содержат детерминанты матриц с совпадающими строками. Единственная пара ненулевых слагаемых возникает при значениях индекса суммирования $s_1 = l$ и $s_1 = r + 1$. В результате мы приходим к равенству

$$\begin{aligned} s_{[r|p]_k^l} s_{[r|p]} = & \begin{bmatrix} h_{p+1*} & \dots & h_{p-l+2*} & h_{p-l*} & \dots & h_{p-r+1*} & h_{p-l+1*} \\ 1 & \dots & l & l+1 & \dots & r & r+1 \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} h_{p*} & \dots & h_{k-r*} & h_{p-l*} & \dots & h_{p-r+1*} & h_{-r*} \\ 1 & \dots & l & l+1 & \dots & r & r+1 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} h_{p+1*} & \dots & h_{p-l+2*} & h_{p-l*} & \dots & h_{p-r+1*} & h_{-r*} \\ 1 & \dots & l & l+1 & \dots & r & r+1 \end{bmatrix} \times \\ & \times \begin{bmatrix} h_{p*} & \dots & h_{p-l+1*} & h_{p-l*} & \dots & h_{p-r+1*} & h_{k-r*} \\ 1 & \dots & l & l+1 & \dots & r & r+1 \end{bmatrix}, \quad (2.28) \end{aligned}$$

которое с учетом соотношений Якоби–Труди сводится в точности к формуле (2.25) (предварительно нужно в первом слагаемом переместить $(r + 1)$ -ю строку первого сомножителя на $(l + 1)$ -е место, а l -ю строку второго сомножителя – на r -е место).

3. РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТОЖДЕСТВА ГАМИЛЬТОНА–КЭЛИ

В данном разделе мы приведем три альтернативных выражения для тождества Гамильтона–Кэли (1.13).

В п. 3.1 тождество (1.13) будет представлено в факторизованном виде, что позволит ввести наборы “четных” и “нечетных” собственных значений квантовой матрицы генераторов M .

В п. 3.2 будут выведены две другие формы тождества Гамильтона–Кэли – в терминах симметрических и кососимметрических степеней матрицы M . Коэффициенты этих тождеств также принадлежат характеристической подалгебре, и мы приводим их выражения через функции Шура $s_\lambda(M)$, а также в терминах спектральных значений матрицы M . Для случая суперматриц упомянутые формы характеристического тождества были впервые получены в работах [14], [23].

3.1. Разделение “четных” и “нечетных” спектральных значений. Из условий 5а–5в определения квантовой матричной алгебры $GL(m|n)$ -типа непосредственно вытекает, что если произвольная диаграмма Юнга λ содержит прямоугольную диаграмму $((n + 1)^{m+1}) = [m + 1|n + 1]$, то соответствующая функция Шура s_λ принадлежит ядру гомоморфизма (2.1),

$$s_\lambda \mapsto s_\lambda(M) = 0 \quad \forall \lambda: ((n + 1)^{m+1}) \subset \lambda. \quad (3.1)$$

В результате этого гомоморфные образы билинейных соотношений (2.25) при значениях параметров $r = m$, $p = n$ сводятся к следующим равенствам:

$$s_{[m|n]_k^l}(M) s_{[m|n]}(M) = s_{[m|n]_k}(M) s_{[m|n]^l}(M) \quad \forall k, l: 0 \leq k \leq n, \quad 0 \leq l \leq m. \quad (3.2)$$

Соотношения (3.2) позволяют факторизовать характеристический полином (1.13). Умножим тождество (1.13) на функцию Шура $s_{[m|n]}(M)$ справа и воспользуемся формулами (3.2). Результат запишется в виде

$$\sum_{i=0}^{m+n} M^{\overline{m+n-i}} \sum_{k=\max(0, i-n)}^{\min(i, m)} (-q)^k s_{[m|n]_k}(M) q^{k-i} s_{[m|n]_{(i-k)}}(M) \equiv 0. \quad (3.3)$$

Квантовое матричное умножение (1.11) позволяет записать приведенное выше выражение в виде произведения двух сомножителей.

ТЕОРЕМА 3 (факторизованное тождество Гамильтона–Кэли). *В предположениях теоремы 1 из тождества (1.13) вытекает тождество*

$$\left(\sum_{k=0}^m (-q)^k M^{\overline{m-k}} s_{[m|n]_k}(M) \right) * \left(\sum_{r=0}^n q^{-r} M^{\overline{n-r}} s_{[m|n]_r}(M) \right) \equiv 0. \quad (3.4)$$

Необходимым и достаточным условием эквивалентности тождеств (1.13) и (3.4) является обратимость функции Шура $s_{[m|n]}(M)$ (выполнение требований 1–5).

Факторизация тождества Гамильтона–Кэли указывает естественную параметризацию характеристической подалгебры. А именно, полагая выполненными условия 1–5 на квантовую матричную алгебру $GL(m|n)$ -типа, рассмотрим гомоморфное отображение соответствующей характеристической подалгебры $\text{Char}(R, F)$ в алгебру $\mathbb{C}[\mu, \nu]$ полиномов от двух наборов коммутирующих переменных $\mu := \{\mu_i\}_{1 \leq i \leq m}$ и $\nu := \{\nu_j\}_{1 \leq j \leq n}$. Гомоморфизм $\text{Char}(R, F) \rightarrow \mathbb{C}[\mu, \nu]: s_\lambda(M) \mapsto s_\lambda(\mu, \nu)$, который мы будем называть *параметризационным отображением*, задается формулами⁹⁾

$$\frac{s_{[m|n]_k}(M)}{s_{[m|n]}(M)} \mapsto \frac{s_{[m|n]_k}(\mu, \nu)}{s_{[m|n]}(\mu, \nu)} := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} q^{-k} \mu_{i_1} \dots \mu_{i_k} = e_k(q^{-1}\mu), \quad 1 \leq k \leq m, \quad (3.5)$$

$$\frac{s_{[m|n]_r}(M)}{s_{[m|n]}(M)} \mapsto \frac{s_{[m|n]_r}(\mu, \nu)}{s_{[m|n]}(\mu, \nu)} := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} (-q)^r \nu_{j_1} \dots \nu_{j_r} = e_r(-q\nu), \quad 1 \leq r \leq n. \quad (3.6)$$

---

⁹⁾ Здесь мы дополнительно предполагаем алгебраическую независимость элементов $\frac{s_{[m|n]_k}(M)}{s_{[m|n]}(M)}$, $1 \leq k \leq m$ и $\frac{s_{[m|n]_r}(M)}{s_{[m|n]}(M)}$, $1 \leq r \leq n$.

Здесь $e_k(\cdot)$ обозначает сужение элементарной симметрической функции $e_k \in \Lambda$ до элементарного симметрического полинома от конечного числа переменных – аргументов $e_k(\cdot)$ в приведенных выше формулах. Кроме того, параметризационное отображение требует обратимости функции $s_{[m|n]}(M)$ (условие 5в). Степени параметра q введены в формулы (3.5), (3.6) с целью упрощения записи тождества.

Как будет показано в четвертом разделе, соотношения (3.5) и (3.6) задают гомоморфизм характеристической подалгебры $\text{Char}(R, F)$ в подалгебру суперсимметрических полиномов от наборов переменных $\{q^{-1}\mu_i\}$ и $\{-q\nu_j\}$ (см. соответствующее определение в разделе 4)¹⁰.

Теперь нетрудно записать характеристический полином (1.13) в полностью факторизованном виде. С этой целью заметим, что параметризационное отображение естественным образом задает на алгебре $\mathbb{C}[\mu, \nu]$ структуру левого $\text{Char}(R, F)$ -модуля. Пользуясь этой структурой, построим *расширение* пространства квантовых матриц:

$$\overline{\text{Pow}}(R, F) := \text{Pow}(R, F) \otimes_{\text{Char}(R, F)} \mathbb{C}[\mu, \nu].$$

Квантовое матричное произведение в пространстве $\overline{\text{Pow}}(R, F)$ дается формулой

$$(N \otimes_{\text{Char}(R, F)} x) * (K \otimes_{\text{Char}(R, F)} y) := (N * K) \otimes_{\text{Char}(R, F)} (xy) \\ \forall N, K \in \text{Pow}(R, F), \quad \forall x, y \in \mathbb{C}[\mu, \nu].$$

Это произведение ассоциативно и коммутативно (см. обсуждение после формулы (1.10)).

Характеристические тождества (1.13) и (3.4) записаны в алгебре $\text{Pow}(R, F)$. При переходе к расширенной алгебре $\overline{\text{Pow}}(R, F)$ мы можем применить подстановки (3.5) и (3.6) к характеристическому полиному в тождестве (3.4) и полностью факторизовать его в произведение следующих сомножителей:

$$(s_{[m|n]}(M) I)^{*2} * \prod_{i=1}^m (M - \mu_i I) * \prod_{j=1}^n (M - \nu_j I) \equiv 0. \quad (3.7)$$

Здесь все произведения понимаются в смысле квантового матричного умножения.

Приведенная выше полностью факторизованная форма тождества Гамильтона–Кэли служит основанием для интерпретации наборов $\{\mu_i\}$ и $\{\nu_j\}$ как соответственно “четных” и “нечетных” собственных значений квантовой суперматрицы M .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Рассмотрим функции Шура $s_{[m|n+1]}(M)$ и $s_{[m+1|n]}(M)$, являющиеся коэффициентами при единичной матрице $I \equiv M^{\bar{0}}$ в двух сомножителях, в произведение которых факторизуется характеристический полином (3.4). В недавней статье [35] было показано, что для классических суперматриц ($q = 1$) отношение

¹⁰Характеристическая подалгебра, расширенная элементом $(s_{[m|n]}(M))^{-1}$, параметризуется рациональными функциями от μ_i и ν_j , которые симметричны по каждому из поднаборов переменных μ и ν (см. (3.5), (3.6) и предложение 4).

этих функций Шура (обозначенных в цитируемой работе соответственно $\text{Ber}^+(M)$ и $\text{Ber}^-(M)$) дает инвариантное представление березиниана суперматрицы M (теоремы 2 и 3 статьи [35]):

$$\text{Ber}(M) = \frac{s_{[m|n+1]}(M)}{s_{[m+1|n]}(M)}. \quad (3.8)$$

Пользуясь параметризационными формулами (3.5), (3.6), находим

$$\text{Ber}(M) \mapsto (-1)^n q^{-(m+n)} \frac{\prod_{i=1}^m \mu_i}{\prod_{j=1}^n \nu_j},$$

что позволяет распространить обозначение (3.8) на случай квантовой матрицы M . Было бы интересно связать формулу (3.8) с определениями квантового березиниана, предложенными в статьях [36].

Далее, предполагая обратимость функции Шура $s_{[m|n]}(M)$, рассмотрим следующую комбинацию:

$$\det(M) := \frac{s_{[m|n]}^m(M)}{s_{[m|n]}(M)} = \frac{s_{[m|n+1]}(M) s_{[m+1|n]}(M)}{s_{[m|n]}(M)^2}. \quad (3.9)$$

Здесь второе равенство является следствием соотношения (3.2). Из тождеств (1.13) и (3.4) непосредственно вытекает, что квантовая матрица M обратима при условии обратимости элемента $\det(M)$. В силу параметризационной формулы

$$\det(M) \mapsto (-1)^n q^{n-m} \prod_{i=1}^m \mu_i \prod_{j=1}^n \nu_j$$

естественно назвать элемент $\det(M)$ *детерминантом* квантовой матрицы M . В работе [13] для случая классических ($q = 1$) суперматриц числитель $s_{[m|n]}^m(M)$ первой дроби в формуле (3.9) был назван супердетерминантом суперматрицы M .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Заметим, что формулы параметризации (3.5)–(3.7) получены на формальном алгебраическом уровне. Другой подход, основанный на теории представлений соответствующих алгебр, был развит в работах [15], [16] (см. также цитируемую там литературу и работу [37]). Такой подход продуктивен для семейства RE-алгебр, поскольку в этом случае характеристическая подалгебра принадлежит центру квантовой матричной алгебры (см., например, последнюю версию работы [31], раздел 3.2, предложение 5). Однако в случае общей квантовой матричной алгебры применение подобных методов весьма проблематично.

3.2. Тождество Гамильтона–Кэли для симметрических и кососимметрических матричных степеней. Во введении мы отмечали, что пространство квантовых матриц $\text{Row}(R, F)$ для квантовых матричных алгебр геккевского типа совпадает (как модуль над характеристической подалгеброй $\text{Char}(R, F)$) с линейной оболочкой матричных степеней $M^{\bar{k}}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Наличие тождества

Гамильтона–Кэли (1.13) означает, что квантовые матричные степени матрицы M как элементы $\text{Char}(R, F)$ -модуля линейно зависимы.

В данном пункте мы рассмотрим два других генерирующих подмножества для пространства квантовых матриц $\text{Pow}(R, F)$ и получим тождества Гамильтона–Кэли в терминах новых генераторов пространства $\text{Pow}(R, F)$.

Рассмотрим квантовые матрицы (см. общее определение (1.9))

$$M^{[k|1]} := \text{Tr}_{R(2\dots k)}(M_{\bar{1}} \dots M_{\bar{k}} \rho_R(E^{[k|1]})), \quad (3.10)$$

$$M^{[1|k]} := \text{Tr}_{R(2\dots k)}(M_{\bar{1}} \dots M_{\bar{k}} \rho_R(E^{[1|k]})) \quad (3.11)$$

(напомним, что $[r|p] := (p^r)$). Следуя А. М. Лопшицу (см. [22], с. 342, либо [14], [23]), введем серии *кососимметрических и симметрических квантовых матричных степеней* матрицы M согласно следующим определениям:

$$M^{\wedge 0} := I, \quad M^{\wedge k} := (-1)^{k-1} k_q M^{[k|1]} + (-q)^k s_{[k|1]}(M) I, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

$$M^{S0} := I, \quad M^{S k} := k_q M^{[1|k]} + q^{-k} s_{[1|k]}(M) I, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

В работе [9] матрицы $M^{[k|1]}$ и $M^{[1|k]}$ были выражены в терминах квантовых матричных степеней матрицы M (теорема Гамильтона–Кэли–Ньютона). Пользуясь результатами указанной работы, находим

$$M^{\wedge k} = \sum_{r=0}^k (-q)^r M^{\bar{k-r}} s_{[r|1]}(M), \quad M^{S k} = \sum_{r=0}^k q^{-r} M^{\bar{k-r}} s_{[1|r]}(M). \quad (3.14)$$

Эти тождества можно разрешить относительно $M^{\bar{k}}$ с помощью обратной теоремы Гамильтона–Кэли–Ньютона [9] и соотношений Вронского¹¹⁾ (см., например, [17], формула (2.6'))

$$\sum_{r=0}^k (-1)^r s_{[r|1]} s_{[1|k-r]} = \delta(k), \quad (3.15)$$

где $\delta(i) := 1$ при $i = 0$ и $\delta(i) := 0$ в противном случае. Тождества, обратные к (3.14), имеют вид

$$M^{\bar{k}} = \sum_{r=0}^k q^r M^{\wedge(k-r)} s_{[1|r]}(M) = \sum_{r=0}^k (-q)^{-r} M^{S(k-r)} s_{[r|1]}(M). \quad (3.16)$$

Из приведенных формул следует, что пространство квантовых матриц $\text{Pow}(R, F)$ является $\text{Char}(R, F)$ -оболочкой любого из наборов матриц $\{M^{\wedge k}\}_{k \geq 0}$ или $\{M^{S k}\}_{k \geq 0}$. Кроме того, формулы (3.16) позволяют переписать тождество Гамильтона–Кэли (1.13) в терминах (косо)симметрических матричных степеней.

¹¹⁾ Для характеристической подалгебры соотношения Вронского были доказаны в статье [9].

Чтобы упростить запись последующих выкладок, введем еще одно обозначение для специального множества диаграмм Юнга. Суть новых обозначений легко уяснить из следующего примера:

$$\langle \mu | \lambda \rangle := \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline [m|n] \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \lambda \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \end{array} \end{array},$$

из которого видно, что диаграммы Юнга $\langle \mu | \lambda \rangle$ из интересующего нас множества составлены из прямоугольной диаграммы $[m|n]$ и двух диаграмм λ и μ таких, что длина диаграммы λ не превосходит m , а длина транспонированной диаграммы μ^T не превосходит n .

ТЕОРЕМА 4 (тождество Гамильтона–Кэли для (косо)симметрических матричных степеней). *В предположениях теоремы 1 тождество (1.13) может быть записано в следующих двух эквивалентных формах:*

$$\sum_{k=0}^{\min\{2n, m+n\}} M^{\wedge(m+n-k)} d_k(M) \equiv 0, \quad \sum_{k=0}^{\min\{2m, m+n\}} M^{\mathcal{S}(m+n-k)} f_k(M) \equiv 0, \quad (3.17)$$

где

$$d_k(M) := \sum_{r=\max\{0, k-n\}}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (k-2r+1)_q s_{\langle (k-r, r) | 0 \rangle}(M), \quad (3.18)$$

$$f_k(M) := \sum_{r=\max\{0, k-m\}}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^{k-2r} (k-2r+1)_q s_{\langle 0 | (2r, 1^{k-2r}) \rangle}(M). \quad (3.19)$$

Здесь под символом $[\cdot]$ понимается целая часть.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема доказывается прямыми вычислениями на основе соотношений (3.16). Для определенности мы проведем их для первого тождества в (3.17). Проверка второго тождества выполняется аналогичными преобразованиями.

С помощью равенств (3.16) выразим квантовые матричные степени $M^{\overline{m+n-i}}$ через кососимметрические степени матрицы M и подставим получившиеся выражения в тождество Гамильтона–Кэли (1.13). Тождество примет следующий общий вид:

$$\sum_{k=0}^{m+n} M^{\wedge(m+n-k)} d_k(M) \equiv 0, \quad (3.20)$$

где коэффициенты $d_k(M)$ суть линейные комбинации функций Шура. Для доказательства теоремы мы должны проверить, что их явный вид задается выражениями (3.18), а также уточнить пределы суммирования по k .

Собирая вклады в $d_k(M)$ от выражений матричных степеней $M^{\overline{m+n-i}}$ из тождества (1.13) при $0 \leq i \leq k$, получаем

$$d_k(M) = \sum_{i=0}^k q^{k-i} s_{(k-i)}(M) \sum_{j=\max\{0, i-n\}}^{\min\{i, m\}} (-1)^j q^{2j-i} s_{[m|n]_{i-j}^j}(M).$$

Вводя новую переменную суммирования $r = i - j$ и меняя порядок суммирования по i и r , придем к следующему промежуточному результату:

$$d_k(M) = \sum_{r=0}^{\min\{k, n\}} (-1)^r q^{k-2r} \sum_{i=r}^{\min\{k, r+m\}} (-1)^i s_{(k-i)}(M) s_{[m|n]_r^{i-r}}(M). \quad (3.21)$$

Проведем отдельное вычисление второй суммы в этом выражении.

ЛЕММА 1. *Зафиксируем пару неотрицательных целых чисел a и b и выберем произвольные целые числа r и k из промежутков $0 \leq r \leq b$, $r \leq k \leq a + b$. Тогда в кольце симметрических функций Λ справедливо следующее тождество:*

$$\sum_{i=r}^{\min\{k, r+a\}} (-1)^i s_{(k-i)} s_{[a|b]_r^{i-r}} = \begin{cases} 0, & k \geq b + r + 1, \\ (-1)^r \sum_{i=\max\{0, k-b\}}^{\min\{r, k-r\}} s_{\langle (k-i, i) | 0 \rangle}, & k \leq b + r. \end{cases} \quad (3.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства дальнейших ссылок обозначим сумму в левой части формулы (3.22) символом Ω .

Пусть вначале $k \leq r + a$. Вводя новую переменную суммирования $j = k - i$ и новый параметр $p := k - r$, $0 \leq p \leq a$, мы можем записать равенство

$$(-1)^k \Omega = \sum_{j=0}^p (-1)^j s_{(j)} s_{[a|b]_r^{p-j}} = (-1)^p s_{(p)} s_{[a|b]_r} + \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j s_{(j)} s_{[a|b]_r^{p-j}}.$$

Разложив произведения функций Шура $s_{(j)} s_{[m|n]_r^{p-j}}$ в соответствии с правилами Литтлвуда–Ричардсона, соберем получающиеся в последнем выражении слагаемые в две отдельные суммы однотипных членов:

$$\begin{aligned} (-1)^k \Omega &= (-1)^p s_{(p)} s_{[a|b]_r} + \\ &+ \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j \sum_{t=0}^{\min\{j, b\}} \sum_{i=\max\{0, r+t-b\}}^{\min\{r, t\}} s_{\langle (r+t-i, i) | (j-t+1, 1^{p-j-1}) \rangle} + \\ &+ \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^j \sum_{t=0}^{\min\{j-1, b\}} \sum_{i=\max\{0, r+t-b\}}^{\min\{r, t\}} s_{\langle (r+t-i, i) | (j-t, 1^{p-j}) \rangle}. \end{aligned}$$

Простым вычислением можно убедиться, что тройные суммы в приведенном выше выражении взаимно уничтожаются за исключением слагаемого, отвечающего $j =$

$p - 1$ в первой тройной сумме. Таким образом, мы получаем

$$(-1)^k \Omega = (-1)^p s_{(p)} s_{[a|b]_r} + (-1)^{p-1} \sum_{t=0}^{\min\{p-1, b\}} \sum_{i=\max\{0, r+t-b\}}^{\min\{r, t\}} s_{\langle (r+t-i, i) | (p-t) \rangle}. \quad (3.23)$$

Вновь воспользуемся правилами Литтлвуда–Ричардсона и представим произведение $s_{(p)} s_{[a|b]_r}$ в виде суммы симметрических функций Шура:

$$(-1)^p s_{(p)} s_{[a|b]_r} = (-1)^p \sum_{t=0}^{\min\{p, b\}} \sum_{i=\max\{0, t+r-b\}}^{\min\{r, t\}} s_{\langle (r+t-i, i) | (p-t) \rangle}. \quad (3.24)$$

Сравнивая двойные суммы в правых частях равенств (3.23) и (3.24), легко убедиться, что при $k \geq r + b + 1 \Leftrightarrow p \geq b + 1$ они отличаются только знаком, а в случае $k \leq b + r \Leftrightarrow p \leq b$ в сумме (3.24) появляется дополнительный вклад от $t = p$. Таким образом, подставляя (3.24) в формулу (3.23), мы придем к результату (3.22).

Случай $k \geq r + a + 1$ рассматривается совершенно аналогично.

Вернемся к доказательству теоремы. С помощью гомоморфизма (2.1) утверждение леммы 1 распространяется на кольцо функций Шура $s_\lambda(M)$. Это позволяет упростить вторую сумму в равенстве (3.21) в соответствии с (3.22) при $a = m$ и $b = n$ и преобразовать формулу для коэффициента $d_k(M)$ к следующему виду:

$$d_k(M) = 0, \quad k > 2n; \\ d_k(M) = \sum_{r=\max\{0, k-n\}}^{\min\{k, n\}} q^{k-2r} \sum_{i=\max\{0, k-n\}}^{\min\{r, k-r\}} s_{\langle (k-i, i) | 0 \rangle}, \quad 0 \leq k \leq 2n. \quad (3.25)$$

Последнее выражение допускает дальнейшее упрощение. Полагая $0 \leq k \leq n$, мы имеем

$$d_k(M) = \sum_{r=0}^k q^{k-2r} \sum_{i=0}^{\min\{r, k-r\}} s_{\langle (k-i, i) | 0 \rangle} = \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} s_{\langle (k-i, i) | 0 \rangle} \sum_{r=i}^{k-i} q^{k-2r} = \\ = \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (k - 2i + 1)_q s_{\langle (k-i, i) | 0 \rangle}, \quad (3.26)$$

где при переходе ко второму равенству был изменен порядок суммирования. В случае $n < k \leq 2n$ аналогичное вычисление дает

$$d_k(M) = \sum_{r=k-n}^n q^{k-2r} \sum_{i=k-n}^{\min\{r, k-r\}} s_{\langle (k-i, i) | 0 \rangle} = \sum_{i=k-n}^{\lfloor k/2 \rfloor} (k - 2i + 1)_q s_{\langle (k-i, i) | 0 \rangle}. \quad (3.27)$$

Собирая вместе результаты (3.20), (3.25)–(3.27), мы получаем формулы (3.17), (3.18).

Вводя дополнительное требование обратимости функции Шура $s_{[m|n]}(M) = d_0(M) = f_0(M)$, мы можем выразить отношения $d_k(M)/d_0(M)$ и $f_k(M)/f_0(M)$ в терминах собственных значений квантовой суперматрицы M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{M}(R, F)$ является квантовой матричной алгеброй $GL(m|n)$ -типа, т.е. удовлетворяет условиям 1–5, сформулированным во введении. Тогда при параметризационном отображении (3.5), (3.6) мы получаем, что

$$\frac{d_k(M)}{d_0(M)} \mapsto (-1)^k \sum_{r=\max\{0, k-n\}}^{\min\{k, n\}} q^{2r} e_r(\nu) e_{k-r}(\nu), \quad (3.28)$$

$$\frac{f_k(M)}{f_0(M)} \mapsto (-1)^k \sum_{r=\max\{0, k-m\}}^{\min\{k, m\}} (-q)^{-2r} e_r(\mu) e_{k-r}(\mu). \quad (3.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем соотношение (3.28). Формула (3.29) проверяется аналогично. Умножив равенство (3.21) на функцию $d_0(M)$, получим

$$\begin{aligned} d_k(M) d_0(M) &= \sum_{l=0}^{\min\{k, n\}} (-1)^l q^{k-2l} \sum_{j=l}^{\min\{k, l+m\}} (-1)^j s_{(k-j)}(M) s_{[m|n]_l^{(j-l)}}(M) s_{[m|n]}(M) = \\ &= \sum_{l=0}^{\min\{k, n\}} q^{k-2l} s_{[m|n]_l}(M) \sum_{j=0}^{\min\{k-l, m\}} (-1)^j s_{(k-l-j)}(M) s_{[m|n]^j}(M), \end{aligned}$$

где при переходе ко второй строчке преобразований были использованы билинейные соотношения (3.2) и сдвинута переменная суммирования: $j \rightarrow j-l$. Последняя сумма во второй строке может быть преобразована по формуле (3.22), в которой следует положить $r = 0$ и сделать замену $k \rightarrow k-l$. В результате получаем следующее выражение:

$$d_k(M) d_0(M) = \sum_{l=\max\{0, k-n\}}^{\min\{k, n\}} q^{k-2l} s_{[m|n]_l}(M) s_{[m|n]_{(k-l)}}(M). \quad (3.30)$$

Параметризационная формула (3.28) непосредственно вытекает из (3.30), если применить соотношения (3.6).

4. СПЕКТРАЛЬНАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ПОДАЛГЕБРЫ

Этот раздел завершает параметризацию характеристической подалгебры в терминах собственных значений квантовой суперматрицы M . С этой целью в п. 4.1 мы параметризуем генераторы характеристической подалгебры $s_{(1^k)}(M) = s_{[k|1]}(M)$ и $s_{(k)}(M) = s_{[1|k]}(M)$ и докажем, что элементы характеристической подалгебры являются суперсимметрическими полиномами от собственных значений матрицы M . Этим проблема параметризации в принципе исчерпывается.

В п. 4.2 выведена параметризационная формула (4.12) для функции Шура $s_{[m|n]}(M)$. Этот результат позволяет переформулировать условие обратимости функции $s_{[m|n]}(M)$ в виде условия на спектральные значения $\{\mu_i\}_{1 \leq i \leq m}$ и $\{\nu_j\}_{1 \leq j \leq n}$.

При доказательстве формулы (4.12) использован еще один набор билинейных соотношений в кольце симметрических функций Λ (лемма 3). Отметим, что соотношение (4.12) есть частный случай факторизационной формулы, известной в теории суперсимметрических полиномов [20], [21].

4.1. Параметризация однострочных и одностолбцовых функций Шура.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{M}(R, F)$ является квантовой матричной алгеброй $GL(m|n)$ -типа, т.е. удовлетворяет условиям 1–5, сформулированным во введении. Тогда параметризационное отображение (3.5), (3.6) сопоставляет генераторам $\{s_{[k|1]}(M)\}_{k \geq 0}$ и $\{s_{[1|k]}(M)\}_{k \geq 0}$ характеристической подалгебры $\text{Char}(R, F)$ следующие полиномы от собственных значений квантовой суперматрицы M :

$$s_{[k|1]}(M) \mapsto s_{[k|1]}(\mu, \nu) = \sum_{r=0}^k e_r(q^{-1}\mu) h_{k-r}(-q\nu), \quad (4.1)$$

$$s_{[1|k]}(M) \mapsto s_{[1|k]}(\mu, \nu) = \sum_{r=0}^k e_r(-q\nu) h_{k-r}(q^{-1}\mu). \quad (4.2)$$

Здесь

$$e_r(q^{-1}\mu) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m} q^{-r} \mu_{i_1} \mu_{i_2} \dots \mu_{i_r}, \quad h_r(-q\nu) := \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n} (-q)^r \nu_{i_1} \nu_{i_2} \dots \nu_{i_r}$$

являются элементарными симметрическими и полными симметрическими полиномами от m и n переменных, соответственно (см. [17], раздел 1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по индексу k . Правило Литтлвуда–Ричардсона (2.2) дает

$$s_{[m|n]}(M) s_{(1)}(M) = s_{[m|n]1}(M) + s_{[m|n]_1}(M).$$

Поделив обе части этого равенства на $s_{[m|n]}(M)$ и воспользовавшись формулами (3.5), (3.6), мы приходим к параметризационной формуле для $s_{(1)}(M)$:

$$s_{(1)}(\mu, \nu) = s_{[1|1]}(\mu, \nu) = e_1(q^{-1}\mu) + e_1(-q\nu),$$

которая может быть тождественно переписана в виде

$$s_{[1|1]}(\mu, \nu) = e_1(q^{-1}\mu) + h_1(-q\nu) = e_1(-q\nu) + h_1(q^{-1}\mu).$$

Эти выражения представляют собой частный случай формул (4.1) и (4.2) для $k = 1$ (первый шаг индукции).

Теперь, полагая соотношения (4.1) и (4.2) выполненными для всех значений индекса $1 \leq k < p$, докажем их справедливость для $k = p$. Мы приведем подробное доказательство формулы (4.2). Формула (4.1) проверяется аналогично.

Запишем образ соотношения (3.22) в характеристической подалгебре в случае $r = 0$, $k = p$, $a = m$ и $b = n$:

$$\sum_{i=0}^{\min\{p,m\}} (-1)^i s_{(p-i)}(M) s_{[m|n]^i}(M) = \theta(n-p) s_{[m|n]_p}(M). \quad (4.3)$$

Здесь $\theta(i) := 0$, если $i < 0$, и $\theta(i) := 1$ в противном случае. Подставляя в (4.3) параметризованные выражения для $s_{[m|n]^i}(M)/s_{[m|n]}(M)$ и $s_{[m|n]_p}(M)/s_{[m|n]}(M)$ (см. (3.5) и (3.6)), приходим к равенству

$$s_{[1|p]}(\mu, \nu) = e_p(-q\nu) - \sum_{i=1}^p (-1)^i s_{[1|p-i]}(\mu, \nu) e_i(q^{-1}\mu). \quad (4.4)$$

Пользуясь предположением индукции для элементов $s_{[1|p-i]}(\mu, \nu)$, $1 \leq i \leq p$, выполним последовательные преобразования:

$$\begin{aligned} s_{[1|p]}(\mu, \nu) &= e_p(-q\nu) - \sum_{j=0}^{p-1} e_j(-q\nu) \sum_{i=1}^{p-j} (-1)^i h_{p-j-i}(q^{-1}\mu) e_i(q^{-1}\mu) = \\ &= e_p(-q\nu) + \sum_{j=0}^{p-1} e_j(-q\nu) h_{p-j}(q^{-1}\mu) = \sum_{j=0}^p e_j(-q\nu) h_{p-j}(q^{-1}\mu), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где при переходе ко второй строке были применены соотношения Вронского (3.15) в виде

$$\sum_{i=1}^{p-j} (-1)^i h_{p-j-i}(q^{-1}\mu) e_i(q^{-1}\mu) = -h_{p-j}(q^{-1}\mu).$$

Формула (4.5) завершает индуктивное доказательство соотношения (4.2).

Напомним теперь определение суперсимметрического полинома (см., например, работу [24]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $x = \{x_i\}_{1 \leq i \leq m}$ и $y = \{y_j\}_{1 \leq j \leq n}$ представляют собой два набора независимых коммутативных переменных. Полином $p \in \mathbb{C}[x, y]$ называется *суперсимметрическим*, если:

- а) p инвариантен относительно перестановок переменных $x_1, \dots, x_m$;
- б) p инвариантен относительно перестановок переменных $y_1, \dots, y_n$;
- в) при подстановке в p значений $x_1 = y_1 = t$ результат не зависит от t .

Алгебра суперсимметрических полиномов в дальнейшем будет обозначаться символом $T[x, y]$.

Полиномы $s_{[k|1]}(\mu, \nu)$ и $s_{[1|k]}(\mu, \nu)$, определенные соотношениями (4.1) и (4.2), очевидным образом удовлетворяют условиям инвариантности относительно перестановок переменных $x_i = q^{-1}\mu_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, и относительно перестановок переменных $y_j = -q\nu_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ (условиям а, б, определения). Выполнение для них третьего условия (условия в) вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2. Введем обозначения для поднаборов переменных: $\{\mu'\} := \{\mu\} \setminus \{\mu_1\} = \{\mu_i\}_{2 \leq i \leq m}$, $\{\nu'\} := \{\nu\} \setminus \{\nu_1\} = \{\nu_i\}_{2 \leq i \leq n}$. Для полиномов $s_{[1|k]}(\mu, \nu)$ и $s_{[k|1]}(\mu, \nu)$ справедливы представления

$$s_{[1|k]}(\mu, \nu) = s_{[1|k]}(\mu', \nu') + (q^{-1}\mu_1 - q\nu_1) \sum_{r=0}^{k-1} (q^{-1}\mu_1)^{k-r-1} s_{[1|r]}(\mu', \nu'), \quad (4.6)$$

$$s_{[k|1]}(\mu, \nu) = s_{[k|1]}(\mu', \nu') + (q^{-1}\mu_1 - q\nu_1) \sum_{r=0}^{k-1} (-q\nu_1)^{k-r-1} s_{[r|1]}(\mu', \nu'). \quad (4.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения элементарной и полной симметрических функций нетрудно получить следующие равенства:

$$e_k(\mu) = e_k(\mu') + \mu_1 e_{k-1}(\mu'), \quad h_k(\mu) = \sum_{r=0}^k (\mu_1)^r h_{k-r}(\mu').$$

Подставив эти соотношения в формулы (4.1) и (4.2) и проведя несложные преобразования, мы получим в результате (4.6) и (4.7).

Итак, мы доказали, что полиномы $s_{[k|1]}(\mu, \nu)$ и $s_{[1|k]}(\mu, \nu)$ являются суперсимметрическими. Кроме того, как было показано в работе [21] (см. теорему 3.1 и предложение 2.3 в этой работе), алгебра суперсимметрических полиномов $T[q^{-1}\mu, -q\nu]$ генерируется любым из наборов полиномов $\{s_{[1|k]}(\mu, \nu)\}_{k \geq 0}$ или $\{s_{[k|1]}(\mu, \nu)\}_{k \geq 0}$. Поэтому, пользуясь предложением 3, мы приходим к следующему заключению.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях предложения 3 образ характеристической подалгебры $\text{Char}(R, F)$ относительно параметризационного отображения (3.5), (3.6) совпадает с алгеброй $T[q^{-1}\mu, -q\nu]$ суперсимметрических полиномов от переменных $\{q^{-1}\mu_i\}_{1 \leq i \leq m}$ и $\{-q\nu_j\}_{1 \leq j \leq n}$.

4.2. Параметризация функции Шура $s_{[m|n]}(M)$. При выводе параметризационной формулы для $s_{[m|n]}(M)$ мы воспользуемся билинейными соотношениями для симметрических функций, полученными Кирилловым [19], [38]:

$$s_{[m|n]} s_{[m|n]} = s_{[m+1|n]} s_{[m-1|n]} + s_{[m|n+1]} s_{[m|n-1]} \quad \forall m, n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Для удобства читателя приведем схему их доказательства на основе соотношений Плюккера и формул Якоби–Труди. Фактически мы получим более широкий набор тождеств.

ЛЕММА 3. Зафиксируем целые числа a, b, c, d такие, что $1 \leq a \leq c$, $1 \leq b \leq d$. Тогда в кольце симметрических функций Λ справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} s_{[a|b]} s_{[c|d]} = & \sum_{k=\max\{1, a+b-d\}}^a (-1)^{a-k} s_{[c|d]_{a+b-k}} s_{[a-1|b-1]_{k-1}} + \\ & + \sum_{k=\max\{1, a+b-c\}}^b (-1)^{b-k} s_{[c|d]_{a+b-k}} s_{[a-1|b-1]_{k-1}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Формулы (4.8) соответствуют $a = c = m$, $b = d = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь формулами Якоби–Труди (2.26) и элементарными свойствами определителей, запишем функции Шура $s_{[c|d]}$ и $s_{[a|b]}$ в виде (см. обозначения (2.23))

$$s_{[c|d]} = \begin{bmatrix} h_{d*} & h_{d-1*} & \dots & h_{d-c+1*} & \delta_{c+1*} \\ 1 & 2 & \dots & c & c+1 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$s_{[a|b]} = \begin{bmatrix} \delta_{1*} & \delta_{2*} & \dots & \delta_{c+1-a*} & h_{b-c+a-1*} & \dots & h_{b-c+1*} & h_{b-c*} \\ 1 & 2 & \dots & c+1-a & c+2-a & \dots & c & c+1 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Здесь символы h_{i*} и δ_{i*} представляют следующие матричные строки:

$$h_{i*} := (h_i, h_{i+1}, h_{i+2}, \dots), \quad \delta_{i*} := (0, \dots, 0, \overset{\downarrow i\text{-е место}}{1}, 0, \dots).$$

Тождества (4.9) получаются применением соотношений Плюккера (2.24) с набором данных $k = 1$, $r_1 = c + 1$ к произведению детерминантов (4.10) и (4.11).

Основной результат этого раздела состоит в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\mathcal{M}(R, F)$ является квантовой матричной алгеброй $GL(m|n)$ -типа, т.е. удовлетворяет условиям 1–5, сформулированным во введении. Тогда образ функции Шура $s_{[m|n]}(M)$ относительно параметризационного отображения (3.5), (3.6) задается формулой

$$s_{[m|n]}(M) \mapsto s_{[m|n]}(\mu, \nu) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (q^{-1}\mu_i - q\nu_j). \quad (4.12)$$

Следовательно, условие обратимости функции Шура $s_{[m|n]}(M)$ равносильно обратимости всех множителей $q^{-1}\mu_i - q\nu_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, в двойном произведении (4.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим образ соотношений (4.8) в характеристической подалгебре $\text{Char}(R, F)$ на элемент $(s_{[m|n]}(M))^{-1}$ и применим параметризационное отображение. В силу определений (3.5), (3.6) приходим к формуле

$$s_{[m|n]}(\mu, \nu) = e_n(-q\nu) s_{[m-1|n]}(\mu, \nu) + e_m(q^{-1}\mu) s_{[m|n-1]}(\mu, \nu). \quad (4.13)$$

Замечая, что

$$e_m(q^{-1}\mu)|_{\mu_i=0} = 0 \quad \forall i: 1 \leq i \leq m, \quad e_n(-q\nu)|_{\nu_j=0} = 0 \quad \forall j: 1 \leq j \leq n,$$

мы получаем следующее свойство суперсимметрического полинома $s_{[m|n]}(\mu, \nu)$:

$$s_{[m|n]}(\mu, \nu)|_{q^{-1}\mu_i=q\nu_j} = s_{[m|n]}(\mu, \nu)|_{\mu_i=\nu_j=0} = 0 \quad \forall i, j: 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (4.14)$$

Из формул Якоби–Труди (2.26) непосредственно следует, что функция Шура $s_{[m|n]}(\mu, \nu)$ является однородным полиномом порядка $m + n$ от переменных $\{q^{-1}\mu_i\}_{1 \leq i \leq m}$ и $\{q\nu_j\}_{1 \leq j \leq n}$. Этот факт вместе с требованием суперсимметричности и свойством (4.14) определяет вид $s_{[m|n]}(\mu, \nu)$ с точностью до произвольного числового множителя:

$$s_{[m|n]}(\mu, \nu) = \alpha \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (q^{-1}\mu_i - q\nu_j). \quad (4.15)$$

Для определения множителя α воспользуемся следствием параметризации (4.2):

$$s_{(k)}(\mu, \nu)|_{\mu_1=\dots=\mu_m=0} = e_k(-q\nu).$$

Тогда из представления Якоби–Труди для $s_{[m|n]}(M)$ вытекает, что

$$s_{[m|n]}(\mu, \nu)|_{\mu_1=\dots=\mu_m=0} = \det(e_{n-i+j}(-q\nu))_{i,j=1}^m = (e_n(-q\nu))^m = \left(\prod_{i=1}^n (-q\nu_i) \right)^m.$$

Сравнивая этот результат со значением выражения (4.15) в точке $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, мы находим, что $\alpha = 1$, завершая этим доказательство.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приведем вывод некоторых q -комбинаторных соотношений, использованных в доказательстве теоремы 2.

Для произвольного набора попарно различных ненулевых целых чисел b_i , $i = 1, 2, \dots, k$, справедливы следующие соотношения:

$$q^k - \prod_{i=1}^k \frac{(b_i + 1)_q}{(b_i)_q} = - \sum_{j=1}^k \frac{q^{-b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q}, \quad (\text{П.1})$$

$$k_q = \sum_{j=1}^k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q}, \quad (\text{П.2})$$

$$\prod_{i=1}^k \frac{(b_i + 1)_q}{(b_i)_q} = \sum_{j=1}^k \frac{(b_j + k)_q}{k_q (b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q}. \quad (\text{П.3})$$

Доказательство проводится индукцией по k . Проверка соотношений (П.1)–(П.3) для $k = 1$ легко выполняется прямыми вычислениями.

Допустим теперь, что соотношения (П.1) выполнены для всех значений $k \leq m$, и докажем, что тогда они справедливы и для $k = m + 1$. С этой целью преобразуем

выражение в левой части (П.1) при $k = m + 1$:

$$\begin{aligned} q^{m+1} - \prod_{i=1}^{m+1} \frac{(b_i + 1)_q}{(b_i)_q} &= \left(q^{m+1} - q^m \frac{(b_{m+1} + 1)_q}{(b_{m+1})_q} \right) + \\ &+ \left(q^m - \prod_{i=1}^m \frac{(b_i + 1)_q}{(b_i)_q} \right) \frac{(b_{m+1} + 1)_q}{(b_{m+1})_q} = \\ &= -\frac{q^{m-b_{m+1}}}{(b_{m+1})_q} - \left(\sum_{j=1}^m \frac{q^{-b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q} \right) \frac{(b_{m+1} + 1)_q}{(b_{m+1})_q}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Здесь мы применили формулу (П.1) при $k = m$ для преобразования последнего слагаемого в первой строчке. Воспользуемся далее тождеством

$$\frac{(b_{m+1} + 1)_q}{(b_{m+1})_q} = \frac{(b_{m+1} - b + 1)_q}{(b_{m+1} - b)_q} - \frac{(b)_q}{(b_{m+1})_q (b - b_{m+1})_q}, \quad (\text{П.5})$$

справедливым для любого целого $b \neq b_{m+1}$. Подставляя в (П.5) вместо параметра b числа b_j , $j = 1, 2, \dots, m$, мы продолжаем наши вычисления: правая часть последнего равенства в (П.4) принимает вид

$$-\sum_{j=1}^m \frac{q^{-b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m+1} \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q} - \frac{q^{-b_{m+1}}}{(b_{m+1})_q} \left(q^m + \sum_{j=1}^m \frac{q^{-b_j + b_{m+1}}}{(b_j - b_{m+1})_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q} \right).$$

Чтобы преобразовать последнее слагаемое, вновь применим формулу (П.1) для сдвинутого набора целых чисел $b_i \rightarrow (b_i - b_{m+1})$, $i = 1, 2, \dots, m$, в результате последнее выражение запишется как

$$\begin{aligned} &-\sum_{j=1}^m \frac{q^{-b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m+1} \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q} - \frac{q^{-b_{m+1}}}{(b_{m+1})_q} \left(\prod_{i=1}^m \frac{(b_i - b_{m+1} + 1)_q}{(b_i - b_{m+1})_q} \right) = \\ &= -\sum_{j=1}^{m+1} \frac{q^{-b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m+1} \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q}. \end{aligned}$$

Это равенство распространяет формулу (П.1) на случай $k = m + 1$, завершая индуктивное доказательство.

Чтобы получить равенства (П.2), (П.3), перепишем соотношение (П.1), совершив замену $q \rightarrow q^{-1}$:

$$q^{-k} - \prod_{i=1}^k \frac{(b_i + 1)_q}{(b_i)_q} = -\sum_{j=1}^k \frac{q^{b_j}}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{(b_i - b_j + 1)_q}{(b_i - b_j)_q}, \quad (\text{П.6})$$

а затем образуем линейную комбинацию выражений (П.1) и (П.6) с коэффициентами $q^x/(q - q^{-1})$ и $-q^{-x}/(q - q^{-1})$, соответственно, где параметр x может принимать

произвольные целые значения. Результат запишется в виде

$$(k+x)_q - (x)_q \prod_{i=1}^k \frac{(b_i+1)_q}{(b_i)_q} = \sum_{j=1}^k \frac{(b_j-x)_q}{(b_j)_q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{(b_i-b_j+1)_q}{(b_i-b_j)_q}. \quad (\text{П.7})$$

Соотношения (П.2) и (П.3) получаются как частные случаи тождества (П.7) при $x=0$ и $x=-k$, соответственно.

Благодарности. Авторы признательны А. Давыдову, А. Молеву, Н. Йоргову, А. Исаеву, И. Кантору, О. Худавердянцу, Д. Лейтесу, В. Рубцову и В. Тарасову за многочисленные полезные обсуждения и ценные замечания. Работа П.Н. Пятова и П. А. Сапонова выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-01086), исследования П.Н. Пятова также поддержаны грантом Гейзенберг–Ландау.

Список литературы

- [1] Д. И. Гуревич, П. Н. Пятов, П. А. Сапонов, *Алгебра и анализ*, **17**:1 (2005), 157–179; [math.QA/0412192](#).
- [2] V. G. Drinfel'd, “Quantum groups”, *Proc. of Int. Congress of Mathematicians (Berkeley, Calif., August 3–11, 1986)*. V. 1, ed. A. M. Gleason, AMS, Providence, RI, 1987, 798–820.
- [3] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206.
- [4] P. P. Kulish, R. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.*, **89** (1993), 741–761; P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **25**:22 (1992), 5963–5975.
- [5] L. Hlavaty, *J. Math. Phys.*, **35** (1994), 2560–2569.
- [6] H. Ewen, O. Ogievetsky, J. Wess, *Lett. Math. Phys.*, **22**:4 (1991), 297–305; A. P. Isaev, O. V. Ogievetsky, P. N. Pyatov, P. A. Saponov, “Characteristic polynomials for quantum matrices”, *Proc. of Int. Conf. in Memory of V. I. Ogievetsky “Supersymmetries and Quantum symmetries” (Dubna, Russia, 1997)*, Lect. Notes in Phys. V. 524, eds. J. Wess, E. Ivanov, Springer, Berlin, 1998, 322–330; J. J. Zhang, *J. Pure Appl. Algebra*, **129**:1 (1998), 101–109.
- [7] M. Nazarov, V. Tarasov, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **30**:3 (1994), 459–478; P. Pyatov, P. Saponov, *J. Phys. A*, **28** (1995), 4415–4421.
- [8] D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov, *Lett. Math. Phys.*, **41** (1997), 255–264.
- [9] A. P. Isaev, O. V. Ogievetsky, P. N. Pyatov, *J. Phys. A*, **32** (1999), L115–L121.
- [10] A. Isaev, O. Ogievetsky, P. Pyatov, “Generalized Cayley–Hamilton–Newton identities”, *Quantum groups and integrable systems (Prague, 1998)*; *Czech. J. Phys.*, **48**:11 (1998), 1369–1374.
- [11] A. P. Isaev, O. V. Ogievetsky, P. N. Pyatov, “Cayley–Hamilton–Newton identities and quasitriangular Hopf algebras”, *Proc. of Int. Workshop “Supersymmetries and Quantum Symmetries” (Dubna, Russia, July 27–31, 1999)*, eds. E. Ivanov, S. Krivonos, A. Pashnev, JINR, Dubna, 2000, 397–405; [math.QA/9912197](#).
- [12] O. V. Ogievetsky, P. N. Pyatov, *Orthogonal and symplectic quantum matrix algebras and Cayley–Hamilton theorem for them*, Preprint MPIM 2005-53 (<http://www.mpim-bonn.mpg.de/html/preprints/preprints.html>).
- [13] I. Kantor, I. Trishin, *Commun. Algebra*, **22** (1994), 3679–3739.
- [14] I. Kantor, I. Trishin, *Commun. Algebra*, **27** (1999), 233–259.

- [15] P. D. Jarvis, H. S. Green, *J. Math. Phys.*, **20** (1979), 2115–2122.
- [16] M. D. Gould, J. R. Links, *J. Math. Phys.*, **37**:5 (1996), 2426–2456.
- [17] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Univ. Press, Oxford, 1998.
- [18] O. Lipan, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin, *Mod. Phys. Lett. A*, **12**:19 (1997), 1369–1378.
- [19] M. Kleber, *J. Algebraic Combin.*, **13**:2 (2001), 199–211; [math.QA/9907177](#).
- [20] A. Berele, A. Regev, *Adv. Math.*, **64**:2 (1987), 118–175.
- [21] P. Pragacz, A. Thorup, *Adv. Math.*, **95**:1 (1992), 8–17.
- [22] Г. Б. Гуревич, *Основы теории алгебраических инвариантов*, Гостехиздат, М.-Л., 1948.
- [23] I. M. Trishin, *Commun. Algebra*, **27** (1999), 261–287.
- [24] J. R. Stembridge, *J. Algebra*, **95** (1985), 439–444.
- [25] Ф. А. Березин, *Функц. анализ и его прилож.*, **10**:3 (1976), 70–71; F. A. Berezin, *Introduction to superanalysis*, Edited and with a foreword by A. A. Kirillov. With an appendix by V. I. Ogievetsky. Mathematical Physics and Applied Mathematics, 9, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [26] A. N. Sergeev, *Represent. Theory*, **3** (1999), 250–280.
- [27] A. Ram, *Proc. of London Math. Soc.*, **75** (1997), 99–133; [math.RT/9511223](#).
- [28] O. Ogievetsky, P. Pyatov, “Lecture on Hecke algebras”, *Proc. Int. School “Symmetries and Integrable Systems” (Dubna, Russia, June 8–11, 1999)*, ed. S. Z. Pakulyak, JINR, Dubna, 2000, 39–88; *Preprint MPIM 2001-40* (<http://www.mpim-bonn.mpg.de/html/preprints/preprints.html>).
- [29] А. Н. Сергеев, *Матем. сб.*, **123**:3 (1984), 422–430.
- [30] Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, М. А. Соколов, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **224** (1995), 155–177; [q-alg/9505001](#).
- [31] A. P. Isaev, *Sov. J. Part. Nucl.*, **26** (1995), 501–526; *MPIM Preprint 2004-132* (<http://www.mpim-bonn.mpg.de/html/preprints/preprints.html>).
- [32] Д. И. Гуревич, *Алгебра и анализ*, **2**:4 (1990), 119–148.
- [33] I. Tuba, H. Wenzl, *J. Reine Angew. Math.*, **581** (2005), 31–69; [math.QA/0301142](#).
- [34] B. Sturmfels, *Algorithms in Invariant Theory. (Texts and Monographs in Symbolic Computation)*, Springer, Vienna, 1993.
- [35] H. M. Khudaverdian, Th. Th. Voronov, *Lett. Math. Phys.*, **74** (2003), 201–228; [math.DG/0309188](#).
- [36] V. Lyubashenko, A. Sudbery, *Duke Math. J.*, **90**:1 (1997), 1–62; [hep-th/9311095](#); M. L. Nazarov, *Lett. Math. Phys.*, **21** (1991), 123–131.
- [37] A. Mudrov, *Quantum conjugacy classes of simple matrix groups*, [math.QA/0412538](#).
- [38] А. Н. Кириллов, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **134** (1984), 169–189; А. Н. Кириллов, Н. Ю. Решетихин, *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **160** (1987), 211–221.

Поступила в редакцию 21.IX.2005 г.