Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. И. Абдуллаев, Связанные состояния системы двух фермионов на одномерной решетке, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 1, 47–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2021>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 18:04:45

© 2006 г.

Ж. И. Абдуллаев*

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ФЕРМИОНОВ НА ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

Рассматривается гамильтониан системы двух фермионов на одномерной целочисленной решетке. Доказано, что число связанных состояний $N(k)$ – неубывающая функция от полного квазиимпульса системы $k \in [0, \pi]$. Описано множество точек разрыва функции $N(k)$ и вычислен скачок $N(k+0) - N(k)$ в точках разрыва. Установлено, что энергия связанного состояния $z_n(k)$ возрастает при возрастании полного квазиимпульса $k \in [0, \pi]$.

Ключевые слова: гамильтониан, связанное состояние, полный квазиимпульс, оператор Шредингера, собственное значение, резонанс, принцип Бирмана–Швингера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретный спектр двухчастичного непрерывного оператора Шредингера

$$h_\lambda = -\Delta + \lambda V$$

исследовался многими авторами, причем условия на потенциал V формулировались в его координатном представлении. Условия конечности отрицательного спектра и отсутствия положительных собственных значений оператора h_λ приведены в [1]. Если $V \leq 0$, то число отрицательных собственных значений $N(\lambda)$ есть неубывающая функция от $\lambda \in (0, \infty)$ и каждое собственное значение $z_n(\lambda)$ убывает в диапазоне $(0, \infty)$. Известно, что с уменьшением константы связи λ значения энергии связанных состояний оператора h_λ приближаются к краю непрерывного спектра (см. [1]) и при некотором конечном значении λ попадают на край. При этом возникают два вопроса: соответствуют ли такому пороговому состоянию связанное или виртуальное состояние (т.е. квадратично-интегрируема ли соответствующая волновая функция) и куда исчезают связанные состояния при дальнейшем уменьшении λ ? Изучению первого вопроса посвящены работы Рауха [2], Саймона [3], Клауза [4]. Что касается второго вопроса, оказывается, что связанное состояние исчезает, поглощаясь непрерывным спектром, и превращается в резонанс. При этом резонанс трактуется как полюс аналитического продолжения резольвенты через разрезы непрерывного

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан. E-mail: jabdullaev@mail.ru

спектра и может быть физическим и нефизическим. Физическому резонансу соответствует пик в амплитуде рассеяния. Доказательству этой картины посвящены работы Рауха [2] и Хауленда [5].

Природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра кластерности впервые подробно исследовалась Маматовым и Минлосом [6], а потом в более общей ситуации – Минлосом и Могильнером [7]. Хауленд [5] показал, что теорема Реллиха о возмущении собственных значений не распространяется на теорию резонансов.

Резонансы для краевых задач с одномерным уравнением Шредингера впервые возникли в работе Редже [8]. Удобный и плодотворный подход к исследованию процессов резонансного рассеяния был развит Лаксом и Филлипсом [9].

Исследование связанных состояний гамильтониана H системы двух фермионов на одномерной решетке сводится к изучению собственных значений семейства операторов Шредингера $H(k)$, $k \in \mathbf{T} \equiv (-\pi, \pi]$ (см. ниже (2.2)). Поэтому мы изучим собственные значения оператора $H(k)$. Докажем, что число собственных значений $N(k)$ оператора $H(k)$ есть неубывающая функция от $k \in [0, \pi]$, где k – полный квазиимпульс системы. В предположении, сформулированном в разделе 4, каждое собственное значение $z_n(k)$ возрастает при возрастании $k \in [0, \pi]$. Из равенства $H(-k) = H(k)$ (см. (2.2)) следует, что $N(-k) = N(k)$ и $z_n(-k) = z_n(k)$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $k \in [0, \pi]$. Функция $N(k)$ кусочно-постоянна и непрерывна слева. Точки разрыва $N(k)$ суть решения уравнения $\omega(k) = 4\mu_n$, $n \in \mathbb{N}$, где μ_n – различные собственные значения положительного компактного оператора $G(0)$ (см. ниже (3.11)), $\omega(k)$ – ширина непрерывного спектра оператора $H(k)$.

2. ОПИСАНИЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТониАНА

Свободному гамильтониану $\hat{H}_0$ системы двух фермионов на одномерной решетке $\mathbb{Z}$ обычно соответствует ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\ell_2^{\text{as}}(\mathbb{Z}^2) = \{f \in \ell_2(\mathbb{Z}^2) : f(n, m) = -f(m, n)\}$ по формуле

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m}\Delta_{x_2}.$$

Здесь m – масса фермиона, $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta$, где решетчатый лапласиан Δ есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \hat{\psi}(x+1) - 2\hat{\psi}(x) + \hat{\psi}(x-1), \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}).$$

Полный гамильтониан $\hat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^{\text{as}}(\mathbb{Z}^2)$ и представляет собой разность свободного гамильтониана $\hat{H}_0$ и потенциала взаимодействия $\hat{V}_2$ двух частиц (см. [10]):

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_2,$$

где

$$(\hat{V}_2\hat{\psi})(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2)\hat{\psi}(x_1, x_2), \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2).$$

Всюду в дальнейшем относительно функции $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{v}(x) = \hat{v}(-x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^\alpha \hat{v}(x) = 0, \quad \alpha > 2. \quad (2.1)$$

При выполнении условия (2.1) оператор $\hat{V}_2$ является ограниченным и самосопряженным в пространстве $\ell_2^{\text{as}}(\mathbb{Z}^2)$. Отсюда следует ограниченность и самосопряженность гамильтониана $\hat{H}$.

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}: \ell_2(\mathbb{Z}^2) \rightarrow L_2(\mathbf{T}^2)$, где $L_2(\mathbf{T}^2) \equiv L_2(\mathbf{T}) \otimes L_2(\mathbf{T})$, $L_2(\mathbf{T})$ – гильбертово пространство функций, определенных на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ с периодом 2π и квадратично-интегрируемых на $\mathbf{T} \equiv (-\pi, \pi]$. Заметим, что $\mathcal{F}(\ell_2^{\text{as}}(\mathbb{Z}^2)) = L_2^{\text{as}}(\mathbf{T}^2) \equiv \{f \in L_2(\mathbf{T}^2): f(k_1, k_2) = -f(k_2, k_1)\}$.

Гамильтониан H системы двух фермионов действует как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L_2^{\text{as}}(\mathbf{T}^2)$ и имеет вид

$$H = \mathcal{F}\hat{H}\mathcal{F}^{-1} \equiv H_0 - V_2.$$

Свободный гамильтониан H_0 – это оператор умножения в $L_2^{\text{as}}(\mathbf{T}^2)$ на функцию $\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2)$, где $\varepsilon(q) = 1 - \cos q$ есть энергия отдельного фермиона с импульсом $q \in \mathbf{T}$. Оператор взаимодействия V_2 двух фермионов действует в $L_2^{\text{as}}(\mathbf{T}^2)$ по формуле

$$(V_2 f)(k_1, k_2) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{T}^2} v(k_1 - k'_1) \delta(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) f(k'_1, k'_2) dk'_1 dk'_2,$$

где $\delta(k)$ – дельта-функция Дирака, v – преобразование Фурье функции $\hat{v}$. Из условия (2.1) следует, что функция $v(q)$ является четной, вещественнозначной, непрерывной функцией на $\mathbf{T}$. Полный гамильтониан H коммутирует с группой унитарных операторов U_s , $s \in \mathbb{Z}$:

$$(U_s f)(k_1, k_2) = e^{-is(k_1 + k_2)} f(k_1, k_2), \quad f \in L_2(\mathbf{T}^2).$$

Отсюда следует (см. [1]), что существуют разложения пространства $L_2^{\text{as}}(\mathbf{T}^2)$, а также операторов U_s и H в прямые интегралы:

$$L_2^{\text{as}}(\mathbf{T}^2) = \int_{\mathbf{T}} \bigoplus L_2^{\text{as}}(\mathcal{F}_k) dk, \quad U_s = \int_{\mathbf{T}} \bigoplus U_s(k) dk, \quad H = \int_{\mathbf{T}} \bigoplus \tilde{H}(k) dk.$$

Здесь

$$\mathcal{F}_k = \{(k_1, k_2) \in \mathbf{T}^2: k_1 + k_2 = k, k \in \mathbf{T}\},$$

$U_s(k)$ – оператор умножения на число e^{-isk} в пространстве $L_2^{\text{as}}(\mathcal{F}_k)$. Слойный оператор $\tilde{H}(k)$ также действует в $L_2^{\text{as}}(\mathcal{F}_k)$ по формуле

$$(\tilde{H}(k)f)(q, k - q) = (\varepsilon(q) + \varepsilon(k - q))f(q, k - q) - (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{T}} v(q - s)f(s, k - s) ds$$

и унитарно эквивалентен оператору $H(k)$, действующему в гильбертовом пространстве $L_2^-(\mathbf{T}) \equiv \{f \in L_2(\mathbf{T}): f(-p) = -f(p)\}$ по формуле

$$(H(k)f)(q) = \left(2 - 2 \cos \frac{k}{2} \cos q\right) f(q) - (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{T}} v(q - s)f(s) ds. \quad (2.2)$$

Эквивалентность осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$u_k: L_2^{\text{as}}(\mathcal{F}_k) \rightarrow L_2^-(\mathbf{T}), \quad (u_k g)(q) = g\left(\frac{k}{2} - q, \frac{k}{2} + q\right).$$

Оператор $H(k) = H_0(k) - V$ называется оператором Шредингера, $H_0(k)$ есть оператор умножения на функцию $\varepsilon_k(q) = 2 - 2 \cos(k/2) \cos q$, V – интегральный оператор в $L_2^-(\mathbf{T})$, порожденный ядром $(2\pi)^{-1/2}v(q-s)$. При условии (2.1) оператор V положителен и его положительный квадратный корень $V^{1/2}$ принадлежит классу со следом Σ_1 . Чтобы избежать конечномерности возмущения предположим, что

$$\text{card}\{n \in \mathbb{Z}: \hat{v}(n) > 0\} = \infty. \quad (2.3)$$

3. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ФЕРМИОНОВ

Приведем некоторые известные факты и обозначения. Для любого самосопряженного оператора B , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и не имеющего существенного спектра правее точки $\mu \in \mathbb{R}$, обозначим через $\mathcal{H}_B(\mu) \subset \mathcal{H}$ подпространства такие, что ненулевые элементы $f \in \mathcal{H}_B(\mu)$ удовлетворяют неравенству $(Bf, f) > \mu(f, f)$, и положим

$$n(\mu, B) = \sup_{\mathcal{H}_B(\mu)} \dim \mathcal{H}_B(\mu).$$

Число $n(\mu, B)$ совпадает с числом собственных значений оператора B , лежащих правее точки μ . Если для любого ненулевого $f \in \mathcal{H}$ выполняется неравенство $(Bf, f) > 0$, то мы пишем $B > 0$.

Спектр невозмущенного оператора $H_0(k)$ чисто непрерывный и совпадает с отрезком $[m(k), M(k)]$, где

$$m(k) = \min_{p \in [-\pi, \pi]} \varepsilon_k(p) = 2 - 2 \cos \frac{k}{2}, \quad M(k) = \max_{p \in [-\pi, \pi]} \varepsilon_k(p) = 2 + 2 \cos \frac{k}{2}.$$

Длина этого отрезка $\omega(k) = M(k) - m(k) = 4 \cos(k/2)$ называется *шириной непрерывного спектра оператора $H(k)$* . Ширина $\omega(k)$ есть четная функция, убывающая на интервале $[0, \pi]$. Она обращается в нуль, когда полный квазиимпульс k принимает максимальное значение π . В этом случае оператор $H(\pi) = 2I - V$ (см. (2.2)) имеет собственные значения вида $z_n(\pi) = 2 - \hat{v}(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Собственному значению $z_n(\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, соответствует нормированная собственная функция

$$\varphi_n(p) = \frac{\sin(np)}{\sqrt{\pi}}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

В силу теоремы Гильберта–Шмидта ядро $(2\pi)^{-1/2}v(p-q)$ интегрального оператора V представляется в виде

$$(2\pi)^{-1/2}v(p-q) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}(n) \varphi_n(p) \varphi_n(q).$$

Из самосопряженности оператора $H(k)$ и положительности оператора V вытекает, что $\sigma(H(k)) \cap (M(k), \infty) = \emptyset$, поэтому $\sigma_{\text{disc}}(H(k)) \subset (-\infty, m(k))$. Через $N(k, z)$ обозначается число собственных значений оператора $H(k)$, лежащих левее точки $z \leq m(k)$, т.е. $N(k, z) = n(-z, -H(k))$. Для простоты $N(k, m(k))$ обозначим через $N(k)$.

Число $N(k)$ фактически совпадает с числом собственных значений вне непрерывного спектра оператора $H(k)$.

Для любого $k \in \mathbf{T}$ и $z < m(k)$ мы определим интегральные операторы

$$G(k, z) = V^{1/2} r_0(k, z) V^{1/2}, \quad Q(k, z) = r_0^{1/2}(k, z) V^{1/2},$$

где $r_0(k, z)$ – резольвента невозмущенного оператора $H_0(k)$. При условии (2.1) оператор $V^{1/2}$ принадлежит классу со следом Σ_1 , следовательно, $Q(k, z) \in \Sigma_1$. Из представления $G(k, z) = (Q(k, z))^* Q(k, z)$ следует его положительность и принадлежность классу Σ_1 при всех $k \in \mathbf{T}$ и $z < m(k)$. Кроме того, имеет место принцип Бирмана–Швингера

$$N(k, z) = n(1, G(k, z)) \quad \text{при всех } z < m(k). \quad (3.2)$$

Решение f уравнения Шредингера

$$H(k)f = zf \quad (3.3)$$

и неподвижные точки φ оператора $G(k, z)$ связаны соотношениями

$$f = r_0(k, z) V^{1/2} \varphi, \quad \varphi = V^{1/2} f. \quad (3.4)$$

ЛЕММА 1. Число $z < m(k)$ является собственным значением оператора $H(k)$ тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ есть собственное значение оператора $G(k, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ненулевое значение $f \in L_2^-(\mathbf{T})$ является решением уравнения (3.3). Введя обозначение $\varphi = V^{1/2} f$, из (3.3) получим $f = r_0(k, z) V^{1/2} \varphi$, следовательно, $V^{1/2} f = V^{1/2} r_0(k, z) V^{1/2} \varphi$. Учитывая $\varphi = V^{1/2} f$, мы получим, что уравнение

$$\varphi = G(k, z) \varphi \quad (3.5)$$

имеет ненулевое решение. Обратно, если уравнение (3.5) имеет ненулевое решение $\varphi \in L_2^-(\mathbf{T})$, то функция f , построенная в (3.4), отлична от нуля, удовлетворяет уравнению Шредингера (3.3) и принадлежит $L_2^-(\mathbf{T})$. Лемма доказана.

Из доказательства леммы 1 следует, что

$$\dim \text{Ker}(H(k) - zI) = \dim \text{Ker}(G(k, z) - I). \quad (3.6)$$

Теперь изучим, какими свойствами обладает предельный оператор $Q(k, m(k)) \equiv Q(k)$. Пользуясь представлением

$$\varepsilon_k(p) - m(k) = \frac{1}{4} \omega(k) \varepsilon_0(p),$$

запишем ядро интегрального оператора $Q(k)$ в виде

$$Q(k; p, q) = \frac{v^{1/2}(p - q)}{\sqrt{\varepsilon_k(p) - m(k)}} = \frac{2}{\sqrt{\omega(k)}} \frac{v^{1/2}(p - q)}{\sqrt{\varepsilon_0(p)}}. \quad (3.7)$$

Здесь $v^{1/2}(p - q)$ – ядро интегрального оператора $V^{1/2}$, оно равно

$$v^{1/2}(p - q) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}^{1/2}(n) \varphi_n(p) \varphi_n(q), \quad (3.8)$$

где φ_n определяется по формуле (3.1). Из (3.7) и равенства $\omega(0) = 4$ следует, что

$$Q(k; p, q) = \frac{2}{\sqrt{\omega(k)}} Q(0; p, q),$$

откуда вытекает операторное равенство

$$Q(k) = \frac{2}{\sqrt{\omega(k)}} Q(0). \quad (3.9)$$

Легко проверить, что действия оператора $Q(0)$ на элементы ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}_1^\infty$ равны (см. (3.7) и (3.8))

$$(Q(0)\varphi_n)(p) = \frac{\hat{v}^{1/2}(n)\varphi_n(p)}{\sqrt{\varepsilon_0(p)}}. \quad (3.10)$$

Из (3.10) вытекает неравенство

$$\|Q(0)\varphi_n\|^2 \leq C \hat{v}(n)n$$

при некотором $C > 0$ и для всех $n \in \mathbb{N}$. При условии (2.1) последовательность $\{\|Q(0)\varphi_n\|\} \in \ell_2$. Поэтому $Q(0)$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта Σ_2 . Отсюда и из (3.9) следует, что $Q(k) \in \Sigma_2$ при каждом $k \in (-\pi, \pi)$. Можно показать, что при каждом $k \in (-\pi, \pi)$ оператор $Q(k, z)$ равномерно сходится к предельному оператору $Q(k) \equiv Q(k, m(k))$ при $z \rightarrow m(k)$. Для любого $k \in (-\pi, \pi)$ обозначим через $G(k, m(k)) \equiv G(k)$ положительный оператор $(Q(k))^* Q(k)$. Из равенства (3.9) следует, что

$$G(k) \equiv (Q(k))^* Q(k) = \frac{4}{\omega(k)} G(0). \quad (3.11)$$

Кроме того, $G(k) \in \Sigma_1$ для любого $k \in (-\pi, \pi)$. В работе [11] доказана более общая теорема, из которой следует

$$N(k) \geq n(\omega(k), V) = n\left(4 \cos \frac{k}{2}, V\right), \quad (3.12)$$

где правая часть – неубывающая функция по $k \in [0, \pi]$. Это наводит на мысль, что $N(k)$ также обладает этим свойством. Оказывается, это действительно так (см. ниже теорему 1). Сначала докажем, что принцип Бирмана–Швингера имеет место и в случае $z = m(k)$.

ЛЕММА 2. Пусть выполнено условие (2.1). Тогда для любого $k \in (-\pi, \pi)$ имеет место равенство

$$N(k) = n(1, G(k)). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии (2.1) оператор $Q(k, z)$ принадлежит Σ_2 при всех $k \in (-\pi, \pi)$ и $z \leq m(k)$. Из представления $G(k, z) = (Q(k, z))^* Q(k, z)$ следует включение $G(k, z) \in \Sigma_1$. С учетом того, что $\|Q(k, m(k)) - Q(k, z)\| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow m(k)$, можно показать, что

$$\lim_{z \rightarrow m(k)-} \|G(k, m(k)) - G(k, z)\| = 0.$$

Из компактности $G(k, m(k)) \equiv G(k)$ следует, что число $n(1, G(k))$ конечно. Для любого $\psi \in L_2^-(\mathbf{T})$ и $z < m(k)$ имеет место соотношение

$$(G(k, z)\psi, \psi) = \int_{\mathbf{T}} \frac{|(V^{1/2}\psi)(p)|^2 dp}{\varepsilon_k(p) - z} \leq \int_{\mathbf{T}} \frac{|(V^{1/2}\psi)(p)|^2 dp}{\varepsilon_k(p) - m(k)} = (G(k)\psi, \psi).$$

Следовательно, мы имеем

$$n(1, G(k, z)) \leq n(1, G(k)). \quad (3.14)$$

Пусть $\lambda_1(k) \geq \lambda_2(k) \geq \dots \geq \lambda_n(k) > 1$ – собственные значения оператора $G(k)$, $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ – соответствующие им собственные функции. Обозначим через $\mathcal{H}_n = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ подпространство, натянутое на собственные функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы при всех $z \in (m(k) - \delta, m(k)]$ выполнялось неравенство

$$\|G(k, z) - G(k)\| < \lambda_n(k) - 1.$$

Тогда для любого ненулевого $\psi \in \mathcal{H}_n$ имеем

$$(G(k, z)\psi, \psi) = (G(k)\psi, \psi) - ([G(k) - G(k, z)]\psi, \psi) > (\psi, \psi), \quad (3.15)$$

откуда следует, что

$$n(1, G(k, z)) \geq \dim \mathcal{H}_n = n(1, G(k)) \quad \text{при} \quad z \in (m(k) - \delta, m(k)]. \quad (3.16)$$

Комбинируя (3.14) и (3.16), получим

$$n(1, G(k, z)) = n(1, G(k)) \quad \text{при} \quad z \in (m(k) - \delta, m(k)]. \quad (3.17)$$

Из принципа Бирмана–Швингера (3.2) при $z < m(k)$ и равенства (3.17) следует, что

$$N(k, z) = n(1, G(k)) \quad \text{при} \quad z \in (m(k) - \delta, m(k)).$$

По определению $N(k, z)$ – кусочно-постоянная и непрерывная слева по $z \leq m(k)$ функция, поэтому имеет место (3.13). Лемма доказана.

Теперь изучим число собственных значений оператора $G(k)$. В силу равенства (3.11) достаточно изучить число собственных значений оператора $G(0)$. Собственные значения положительного компактного оператора $G(0)$ напомним в порядке убывания: $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_n > \dots$, и кратность собственного значения μ_n , $n \in \mathbb{N}$, обозначим через ℓ_n , $n \in \mathbb{N}$. При выполнении условия (2.3) оператор $G(0)$ имеет бесконечное число положительных собственных значений, поэтому $\mu_n > 0$ для любого

$n \in \mathbb{N}$. В силу компактности $G(0)$ имеем $\mu_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Из равенств (3.13) и (3.11) получим

$$N(k) = n \left(1, \frac{4}{\omega(k)} G(0) \right) = \sum_{\mu_n > \omega(k)/4} \ell_n. \quad (3.18)$$

Отсюда следует, что точки разрыва $N(k)$ являются решением уравнения $4\mu_n = \omega(k)$, т.е. уравнения

$$\mu_n = \cos \frac{k}{2}. \quad (3.19)$$

Если $\mu_n \in [0, 1]$, то уравнение (3.19) имеет единственное решение $k_n = 2 \arccos \mu_n$ на отрезке $[0, \pi]$. Из (3.18) следует, что скачок в точке разрыва k_n равен $N(k_n + 0) - N(k_n) = \ell_n$. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Число собственных значений $N(k)$ – неубывающая функция на $[0, \pi]$, она определяется по формуле (3.18), точки разрыва $N(k)$ есть $k_n = 2 \arccos \mu_n$ и скачок в точке k_n равен ℓ_n . Если выполняется условие (2.3), то

$$\lim_{k \rightarrow \pi-} N(k) = \infty.$$

Заметим, что если оператор V имеет ранг n , то (см. (3.12))

$$N(k) = N(\pi) = n, \quad \text{если} \quad \min_{s \in \text{supp } \hat{v}} \{\hat{v}(s)\} > \omega(k) = 4 \cos \frac{k}{2}.$$

Теперь рассмотрим случай $k = k_n$. Из вышесказанного следует, что с уменьшением полного квазиимпульса k некоторые собственные значения оператора $H(k)$ приближаются к краю непрерывного спектра и при $k = k_n$ попадают на край. При $k < k_n$ они исчезают, поглощаясь непрерывным спектром, и превращаются в резонансы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для некоторых $C > 0$ и $a > 0$ выполняется неравенство

$$|\hat{v}(n)| \leq C e^{-an}. \quad (3.20)$$

Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при всех $k \in (k_n - \delta, k_n)$ оператор $H(k)$ имеет ровно ℓ_n резонансов, лежащих в некоторой ϵ -окрестности ($\epsilon > 0$) $U_\epsilon(m(k_n)) = \{z \in \mathbb{C}: |m(k_n) - z| < \epsilon\}$ точки $m(k_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении (3.20) функция $v(p)$ является аналитической в некоторой комплексной ϵ -окрестности ($\epsilon > 0$) отрезка $[-\pi, \pi]$. В работе [12] доказано, что число собственных значений и резонансов оператора Фридрихса, лежащих в достаточно малой окрестности $U_\epsilon(m(k_n)) = \{z \in \mathbb{C}: |m(k_n) - z| < \epsilon\}$, не меняется при малых возмущениях. Далее, применяя процедуру, аналогичную той, которая была использована в работе [12], можно завершить доказательство теоремы.

Теперь обсудим следующий вопрос: когда левый край $m(k)$ непрерывного спектра будет собственным значением оператора $H(k)$, т.е. при каких условиях решение f уравнения Шредингера (3.3) при $z = m(k)$ принадлежит $L_2^-(\mathbf{T})$? Пусть уравнение $G(k)\psi = \psi$ имеет нетривиальное решение $\varphi \in L_2^-(\mathbf{T})$. С помощью соотношений (3.4) можно показать, что функция

$$f(p) = \frac{(V^{1/2}\varphi)(p)}{\varepsilon_0(p)} \quad (3.21)$$

удовлетворяет уравнению Шредингера (3.3) при $z = m(k)$. Если дополнительно

$$V^{1/2}\varphi \in C^{1+1/2+0}(\mathbf{T}) \equiv \{g \in C^{(1)}(\mathbf{T}): |g'(p)| \leq C|p|^{1/2+\epsilon} \text{ для некоторого } \epsilon > 0\},$$

то функция f , определенная в (3.21), принадлежит $L_2^-(\mathbf{T})$.

При $z = m(k)$ равенство (3.6), вообще говоря, не имеет места. Например, если $\mu_n \in (0, 1]$ – простое собственное значение оператора $G(0)$, а соответствующая собственная функция φ такая, что $(V^{1/2}\varphi)'(0) \neq 0$, тогда

$$\dim \text{Ker}(H(k) - m(k)I) = 0 < 1 = \dim \text{Ker}(G(k) - I).$$

Равенство (3.6) при $z = m(k)$ превращается в неравенство

$$\dim \text{Ker}(H(k) - m(k)I) \leq \dim \text{Ker}(G(k) - I).$$

4. МОНОТОННОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Докажем монотонность каждого собственного значения $z_n(k)$ в сформулированном ниже предположении. Обозначим через $\lambda_1(k, z) \geq \lambda_2(k, z) \geq \dots \geq \lambda_n(k, z) > 0$ первые n собственных значений оператора $G(k, z)$ и через $\mathcal{H}_n(G(k, z)) = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ подпространство, натянутое на соответствующие собственные функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$. Так как $G(-k, z) = G(k, z)$, то каждое собственное значение $\lambda_n(k, z)$ – четная функция по $k \in [-\pi, \pi]$. Теперь докажем их монотонность по $z \in (-\infty, m(k))$ и $k \in [0, \pi]$.

ЛЕММА 3. *Для любого $k \in \mathbf{T}$ каждое положительное собственное значение $\lambda_n(k, z)$ оператора $G(k, z)$ возрастает по $z \in (-\infty, m(k))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $\psi \in \mathcal{H}_n(G(k, z_1)) = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$, отличного от нуля, и $z_1 < z_2 \in (-\infty, m(k))$ имеет место неравенство

$$(G(k, z_1)\psi, \psi) = \int_{\mathbf{T}} \frac{|(V^{1/2}\psi)(p)|^2 dp}{\varepsilon_k(p) - z_1} < \int_{\mathbf{T}} \frac{|(V^{1/2}\psi)(p)|^2 dp}{\varepsilon_k(p) - z_2} = (G(k, z_2)\psi, \psi).$$

Поэтому $\lambda_n(k, z_1) < \lambda_n(k, z_2)$. Лемма доказана.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Пусть либо

$$\text{supp } \hat{v} \subset \{2n: n \in \mathbb{Z}\}, \quad (4.1)$$

либо

$$\text{supp } \hat{v} \subset \{2n + 1: n \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.2)$$

ЛЕММА 4. *Пусть выполнено наше предположение и $z < m(k_0)$. Тогда каждое положительное собственное значение $\lambda_n(k, z)$ оператора $G(k, z)$ убывает по $k \in [k_0, \pi]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условия (4.1) функция $v^{1/2}(p)$ является π -периодической, а при выполнении (4.2) – π -антипериодической, т.е.

$$v^{1/2}(p + \pi) = -v^{1/2}(p).$$

Следовательно, в обоих случаях при всех $\psi \in L_2^-(\mathbf{T})$ функция $|(V^{1/2}\psi)(p)| = |\varphi(p)|$ является π -периодической. Теперь рассмотрим квадратичную форму

$$(G(k, z)\psi, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\varphi(p)|^2 dp}{2 - 2\cos(k/2)\cos p - z}.$$

Интеграл представим как сумму двух интегралов по отрезкам $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$. Сделав замену переменной $p' = \pi + p$ в первом интеграле и используя тождества $\cos(\pi + p) = -\cos p$ и $|\varphi(p + \pi)| = |\varphi(p)|$, имеем

$$(G(k, z)\psi, \psi) = 2(2 - z) \int_0^{\pi} \frac{|\varphi(p)|^2 dp}{(2 - z)^2 - 4\cos^2(k/2)\cos^2 p}. \quad (4.3)$$

Так как $2 - z > 0$ при $z < m(k_0)$, а интеграл в (4.3) убывает по $k \in [k_0, \pi]$, то для любого ненулевого $\psi \in \mathcal{H}_n(G(k, z))$ имеет место неравенство

$$(G(k, z)\psi, \psi) > (G(k', z)\psi, \psi) \quad \text{при} \quad k_0 \leq k < k' \leq \pi.$$

Это доказывает, что $\lambda_n(k, z) > \lambda_n(k', z)$ при $k_0 \leq k < k' \leq \pi$. Лемма доказана.

Из теоремы 1 следует, что если при некотором $k \in [0, \pi]$ существует собственное значение $z_n(k)$, то оно не исчезает при возрастании полного квазиимпульса. Поэтому область определения собственного значения $z_n(k)$ имеет вид $[-\pi, -k_n) \cup (k_n, \pi]$. Если оператор $G(0)$ имеет m собственных значений, больших 1 с учетом кратности, то область определения собственных значений $z_1(k) \leq z_2(k) \leq \dots \leq z_m(k)$ совпадает с $\mathbf{T}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнено наше предположение. Тогда каждое собственное значение $z_n(k)$ оператора $H(k)$ возрастает по $k \in (k_n, \pi]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть k и k' — две произвольные точки такие, что $k_n < k < k' \leq \pi$. Пусть оператор $H(k)$ имеет $N = N(k)$ собственных значений $z_1(k) \leq z_2(k) \leq \dots \leq z_N(k)$, лежащих ниже $m(k)$. Существование не менее $N(k)$ собственных значений оператора $H(k')$ следует из теоремы 1. Из (3.2) следует, что оператор $G(k, z)$ имеет ровно $N(k)$ собственных значений

$$\lambda_1(k, z) \geq \lambda_2(k, z) \geq \dots \geq \lambda_N(k, z) > 1 \quad (4.4)$$

при $z \in (z_N(k), m(k)]$. Из непрерывности $G(k, z)$ следует непрерывность каждого $\lambda_n(k, z)$ по $z \in (-\infty, m(k))$. Легко показать, что

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \|G(k, z)\| = 0. \quad (4.5)$$

Согласно (4.4), (4.5) и неравенству $\lambda_n(k, z) \leq \|G(k, z)\|$ при любом $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ уравнение $\lambda_n(k, z) = 1$ имеет единственное решение $z = z_n(k) \in (-\infty, m(k))$. Единственность следует из возрастания $\lambda_n(k, \cdot)$. В силу леммы 1 число $z_n(k)$ является собственным значением оператора $H(k)$. Из неравенства $\lambda_n(k, z) \geq \lambda_{n+1}(k, z)$ и монотонности функции $\lambda_n(k, \cdot)$ следует, что $z_n(k) \leq z_{n+1}(k)$, $n = \overline{1, N-1}$. Теперь покажем возрастание $z_n(k)$ по $k \in (k_n, \pi]$. В силу леммы 4 собственное значение $\lambda_n(k, z)$ — убывающая функция по $k \in (k_n, \pi]$. Поэтому

$$1 = \lambda_n(k, z_n(k)) > \lambda_n(k', z_n(k)).$$

С другой стороны,

$$1 = \lambda_n(k', z_n(k')) > \lambda_n(k', z_n(k)).$$

Так как $\lambda_n(k, \cdot)$ – возрастающая функция, то $z_n(k') > z_n(k)$. Теорема доказана.

Отметим, что выполнение сформулированного выше предположения является существенным.

ПРИМЕР. Пусть потенциал $\hat{v}$ удовлетворяет условию

$$\hat{v}(1) > \hat{v}(2) > \dots > \hat{v}(n) > \dots. \quad (4.6)$$

Тогда оператор $H(\pi) = 2I - V$ имеет простые собственные значения вида $z_n(\pi) = 2 - \hat{v}(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Применяя теорему Реллиха (см. [1]) для оператора $H(k) = H(\pi) - \cos(k/2)W$, где W – оператор умножения на функцию $2 \cos p$, мы утверждаем, что оператор $H(k)$ имеет единственное простое собственное значение $z_n(k)$ в окрестности $z_n(\pi)$ при малых $\pi - k$. Несложные вычисления показывают, что ряд Рэлея–Шредингера для $z_n(k)$ при $n \geq 2$ имеет вид

$$z_n(k) = z_n(\pi) + \frac{(\Delta \hat{v})(n)(\cos(k/2))^2}{(\hat{v}(n) - \hat{v}(n-1))(\hat{v}(n) - \hat{v}(n+1))} + \sum_{s=2}^{\infty} C_s \left(\cos \frac{k}{2} \right)^{2s}. \quad (4.7)$$

Если выполняется условие (4.6), то знаменатель второго слагаемого в (4.7) отрицателен. Если, кроме того, $(\Delta \hat{v})(n) < 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что собственное значение $z_n(k)$, $n \geq 2$, убывает на отрезке $[\pi - \delta, \pi]$.

Благодарности. Работа частично финансирована ФПФИ АН РУз (грант № 67-04).

Список литературы

- [1] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. IV. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [2] J. Rauch, *J. Funct. Anal.*, **35** (1980), 304–315.
- [3] B. Simon, *Ann. Phys.*, **97** (1976), 279–288.
- [4] M. Klaus, *Ann. Phys.*, **108** (1977), 288–300.
- [5] J. S. Howland, *Pacific J. Math.*, **55** (1974), 157–176.
- [6] Ш. С. Маматов, Р. А. Минлос, *ТМФ*, **79:2** (1989), 163–179.
- [7] R. A. Minlos, A. I. Mogilner, “Some problems concerning spectra of lattice models”, *Schrödinger Operators: Standard and Nonstandard*, eds. P. Exner, P. Seba, World Scientific, Singapore, 1989, 243–257.
- [8] T. Regge, *Nuovo Cimento*, **8** (1958), 671–679.
- [9] П. Лакс, Р. С. Филипс, *Теория рассеяния*, Мир, М., 1971.
- [10] P. A. Faria da Viegas, L. Ioriatti, M. O’Carrol, *Phys. Rev. E*, **66** (2002), 016130; D. C. Mattis, *Rev. Mod. Phys.*, **58:2** (1986), 361–379.
- [11] S. Albeverio, S. N. Lakaev, J. I. Abdullaev, *On the spectral properties of two-particle discrete Schrödinger operators*, Preprint, Germany, Universität Bonn, SFB 611, № 170, 2004.
- [12] J. I. Abdullaev, S. N. Lakaev, *Adv. Sov. Math.*, **5** (1991), 1–37.

Поступила в редакцию 6.VI.2005 г.