Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, Р. Р. Гадильшин, О спектре оператора Шредингера с быстроосциллирующим финитным потенциалом, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 1, 58–63

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2022>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 07:21:04

© 2006 г. Д. И. Борисов*, Р. Р. Гадыльшин*

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИМ ФИНИТНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Изучается эффект возникновения собственного значения из границы существенного спектра оператора Шредингера, возмущенного финитным быстроосциллирующим потенциалом. Доказаны достаточные условия существования и отсутствия такого собственного значения. В случае существования собственного значения получены первые члены его асимптотического разложения.

Ключевые слова: оператор Шредингера, спектр, возмущение, асимптотика.

Настоящая работа посвящена изучению спектра оператора

$$H_\varepsilon := -\frac{d^2}{dx^2} + V\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right)$$

в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$. Здесь ε – малый положительный параметр, $V(x, \xi)$ – комплекснозначная 1-периодическая по ξ функция из $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ такая, что для всех $\xi \in \mathbb{R}$ носители $\text{supp } V(\cdot, \xi)$ ограничены равномерно по ξ .

Оператор $H_0 := -d^2/dx^2$ в $L_2(\mathbb{R})$ с областью определения $W_2^2(\mathbb{R})$ самосопряжен, его дискретный спектр пуст, существенный спектр совпадает с полуосью $[0, +\infty)$, а оператор умножения на функцию $V(x, x/\varepsilon)$ является H_0 -компактным. Поэтому в силу теорем 1.1, 5.35 главы IV монографии [1] оператор H_ε замкнут для всех ε , и существенные спектры операторов H_ε и H_0 совпадают.

Целью работы является изучение вопроса о существовании и асимптотическом поведении собственных значений оператора H_ε , стремящихся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, в случае, когда для всех $x \in \mathbb{R}$ среднее значение функции $V(x, \cdot)$ по периоду равно нулю. Такие собственные значения можно также рассматривать как возникающие из границы существенного спектра при возмущении оператора H_0 потенциалом $V(x, x/\varepsilon)$. Отметим, что эффект возникновения собственных значений из границы существенного спектра при возмущении потенциалом исследовался в работах [2] для

*Башкирский государственный педагогический университет, Уфа, Россия. E-mail: BorisovDI@ic.bashedu.ru, BorisovDI@yandex.ru, gadylshin@bspu.ru, gadylshin@yandex.ru

потенциалов вида $\varepsilon U(x)$, где $U(x)$ – достаточно быстро убывающий вещественный потенциал. Подобный эффект исследовался и в [3] для возмущения вида $\varepsilon L_\varepsilon$, где $L_\varepsilon: W_{2,\text{loc}}^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}; Q)$ – произвольный линейный оператор, удовлетворяющий равномерному по ε неравенству $\|L_\varepsilon u\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W_2^2(Q)}$ для некоторого конечного интервала Q на оси, а $L_2(\mathbb{R}; Q)$ – подмножество функций из $L_2(\mathbb{R})$ с носителями из $\overline{Q}$. Для указанных возмущений в [2], [3] был изучен вопрос о существовании собственных значений, возникающих из границы непрерывного спектра, а в случае существования были построены первые члены асимптотического разложения данного собственного значения. Отметим также, что эффект возникновения собственных значений из существенного спектра в случае малых возмущений исследовался и в работах [4]. Возмущения, рассмотренные в цитированных работах, не включают в себя потенциал $V(x, x/\varepsilon)$. Более того, возмущение, описываемое таким потенциалом, не является регулярным в том смысле, что оператор умножения на этот потенциал при $\varepsilon \rightarrow 0$ не стремится равномерно к нулю.

Пусть отрезок $M = [x_0, x_1]$ таков, что для всех $\xi \in \mathbb{R}$ выполнено условие $\text{supp } V(\cdot, \xi) \subseteq M$. Через W обозначим множество 1-периодических по ξ функций $u(x, \xi)$ из $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ таких, что $\text{supp } u(\cdot, \xi) \subseteq M$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Для функций из W среднее по периоду обозначим как

$$\langle u(x, \cdot) \rangle := \int_0^1 u(x, \xi) d\xi.$$

ЛЕММА. Для любой функции $u \in W$ и любого числа $n \geq 1$ верно равенство

$$\int_{\mathbb{R}} u\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \langle u(x, \cdot) \rangle dx + O(\varepsilon^n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы достаточно доказать для случая $\langle u(x, \cdot) \rangle \equiv 0$, так как общий случай сводится к данному заменой $\tilde{u}(x, \xi) = u(x, \xi) - \langle u(x, \cdot) \rangle$. Пусть $\langle u(x, \cdot) \rangle \equiv 0$. Введем обозначение

$$P[u](x, \xi) := \int_0^\xi u(x, \tau) d\tau + \int_0^1 \tau u(x, \tau) d\tau.$$

Тогда $P[u] \in W$ и $\langle P[u](x, \cdot) \rangle = 0$. Учитывая очевидное равенство

$$u\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \frac{d}{dx} P[u]\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon \frac{\partial P[u]}{\partial x}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

получаем

$$\int_{\mathbb{R}} u\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx = -\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial P[u]}{\partial x}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx. \quad (1)$$

Так как $\frac{\partial P[u]}{\partial x} \in W$ и $\langle \frac{\partial P[u]}{\partial x}(x, \cdot) \rangle \equiv 0$, то равенство (1) применимо и к функции $\frac{\partial P[u]}{\partial x}$. Применяя это равенство достаточное число раз, приходим к утверждению леммы.

Обозначим

$$k_2 := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle (P[V](x, \cdot))^2 \rangle dx. \quad (2)$$

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА. Пусть

$$\langle V(x, \cdot) \rangle \equiv 0. \quad (3)$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Если $\operatorname{Re} k_2 > 0$, то существует единственное собственное значение λ_ε оператора H_ε , стремящееся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Данное собственное значение простое, и его асимптотика имеет вид

$$\lambda_\varepsilon = -\varepsilon^4 k_2^2 + O(\varepsilon^5). \quad (4)$$

2. Если $\operatorname{Re} k_2 < 0$, то оператор H_ε не имеет собственных значений, стремящихся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что функция

$$v(x, \xi) := \int_0^\xi (\xi - \tau) V(x, \tau) d\tau + \xi \int_0^1 \tau V(x, \tau) d\tau + v_1(x)$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = V, \quad (5)$$

причем

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = P[V]. \quad (6)$$

В силу условия (3) и принадлежности $V \in W$ функция v является 1-периодической по ξ , и, следовательно, ограниченной равномерно по $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$. Будем считать, что $v_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\operatorname{supp} v_1 \subseteq M$, тогда $v \in W$.

Положим $q_\varepsilon(x, \xi) := 1 + \varepsilon^2 v(x, \xi)$. Оператор умножения на функцию $\tilde{q}_\varepsilon(x) := q_\varepsilon(x, x/\varepsilon)$ (обозначим его через Q_ε) взаимно однозначно отображает $L_2(\mathbb{R})$ на себя. Поэтому собственные значения оператора H_ε совпадают с собственными значениями оператора $Q_\varepsilon^{-1} H_\varepsilon Q_\varepsilon$. В силу (5) и определения $\tilde{q}_\varepsilon(x)$ справедливо представление $Q_\varepsilon^{-1} H_\varepsilon Q_\varepsilon = H_0 - \varepsilon L_\varepsilon$, где

$$L_\varepsilon = \varepsilon \frac{2}{\tilde{q}_\varepsilon(x)} \frac{d}{dx} v \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{d}{dx} - \frac{f_\varepsilon(x, \frac{x}{\varepsilon})}{\tilde{q}_\varepsilon(x)}, \quad f_\varepsilon = \varepsilon V v - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \xi}. \quad (7)$$

Так как $V, v \in W$, то носители коэффициентов оператора L_ε лежат в M для всех значений ε , а оператор $L_\varepsilon: W_{2, \text{loc}}^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}; M)$ удовлетворяет равномерному по ε неравенству

$$\|L_\varepsilon u\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W_2^2(M)}. \quad (8)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} m_\varepsilon^{(1)} &= \int_{\mathbb{R}} L_\varepsilon[1] dx, & m_\varepsilon^{(2)} &= \int_{\mathbb{R}} L_\varepsilon \left[\int_{\mathbb{R}} |x-t| L_\varepsilon[1] dt \right] dx, \\ k_\varepsilon &= \frac{\varepsilon}{2} m_\varepsilon^{(1)} + \frac{\varepsilon^2}{2} m_\varepsilon^{(2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как для оператора L_ε справедлива оценка (8), то из теоремы 1 работы [3] следует, что если

$$k_\varepsilon = \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + O(\varepsilon^3), \quad c_1, c_2 = \text{const}, \quad (10)$$

то достаточным условием наличия у оператора $(H_0 - \varepsilon L_\varepsilon)$ собственного значения, стремящегося к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, является неравенство $\text{Re}(c_1 + \varepsilon c_2) > 0$, а достаточным условием отсутствия такого собственного значения – неравенство $\text{Re}(c_1 + \varepsilon c_2) < 0$. Если $\text{Re}(c_1 + \varepsilon c_2) > 0$, то оператор $(H_0 - \varepsilon L_\varepsilon)$ имеет единственное собственное значение, стремящееся к нулю, данное собственное значения является простым, и имеет место равенство $\lambda_\varepsilon = -(\varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2)^2 + O(c_1 \varepsilon^4 + \varepsilon^5)$.

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать справедливость равенства (10) при $c_1 = 0$, $c_2 = k_2$. Докажем это. Для упрощения вычислений положим

$$v_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\tau - \tau^2) V(x, \tau) d\tau.$$

Легко видеть, что тогда

$$\langle v(x, \cdot) \rangle = 0, \quad (11)$$

следовательно,

$$\left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, \cdot) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \xi}(x, \cdot) \right\rangle = 0. \quad (12)$$

Обозначим $\tilde{f}_\varepsilon(x) := f_\varepsilon(x, x/\varepsilon)$. Из (9), (7) и определения $\tilde{q}_\varepsilon$ в силу леммы и равенств (12), (5), (6) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon m_\varepsilon^{(1)}}{2} &= -\frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{f}_\varepsilon(x)}{\tilde{q}_\varepsilon(x)} dx = -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}} V\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx + O(\varepsilon^3) = \\ &= -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \langle V(x, \cdot) v(x, \cdot) \rangle dx + O(\varepsilon^3) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \left\langle v(x, \cdot) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(x, \cdot) \right\rangle dx + O(\varepsilon^3) = \\ &= \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \left\langle \left(\frac{\partial v}{\partial \xi}(x, \cdot) \right)^2 \right\rangle dx + O(\varepsilon^3) = \varepsilon^2 k_2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (13)$$

где k_2 определено в формуле (2).

Так как в силу определения $\tilde{q}_\varepsilon$

$$\frac{d}{dx} \ln \tilde{q}_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^2}{\tilde{q}_\varepsilon(x)} \frac{d}{dx} v\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right),$$

то, интегрируя по частям и учитывая, что для любой функции $g \in C_0(\mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{\mathbb{R}} |x-t|g(t) dt = 2g(x),$$

из (9), (7) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^2 m_\varepsilon^{(2)}}{2} &= -\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \ln \tilde{q}_\varepsilon(x) \frac{d^2}{dx^2} \int_{\mathbb{R}} |x-t| \frac{\tilde{f}_\varepsilon(t)}{\tilde{q}_\varepsilon(t)} dt dx + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{M^2} \frac{|x-t| \tilde{f}_\varepsilon(x) \tilde{f}_\varepsilon(t)}{\tilde{q}_\varepsilon(x) \tilde{q}_\varepsilon(t)} dt dx = \\ &= -2\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{f}_\varepsilon(x) \ln \tilde{q}_\varepsilon(x)}{\tilde{q}_\varepsilon(x)} dx + \varepsilon^2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\tilde{f}_\varepsilon(x)}{\tilde{q}_\varepsilon(x)} \left(\int_{x_0}^x \frac{(x-t) \tilde{f}_\varepsilon(t)}{\tilde{q}_\varepsilon(t)} dt \right) dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части последнего равенства есть величина порядка $O(\varepsilon^3)$.

Интегрируя по частям второе слагаемое, запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\tilde{f}_\varepsilon(x)}{\tilde{q}_\varepsilon(x)} \left(\int_{x_0}^x \frac{(x-t) \tilde{f}_\varepsilon(t)}{\tilde{q}_\varepsilon(t)} dt \right) dx &= \\ &= \int_{x_0}^{x_1} x \tilde{f}_\varepsilon(x) \left(\int_{x_0}^x \tilde{f}_\varepsilon(t) dt \right) dx - \int_{x_0}^{x_1} \tilde{f}_\varepsilon(x) \left(\int_{x_0}^x t \tilde{f}_\varepsilon(t) dt \right) dx + O(\varepsilon^2) = \\ &= 2 \int_{x_0}^{x_1} x \tilde{f}_\varepsilon(x) \left(\int_{x_0}^x \tilde{f}_\varepsilon(t) dt \right) dx - \int_{\mathbb{R}} x \tilde{f}_\varepsilon(x) dx \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_\varepsilon(x) dx + O(\varepsilon^2) = \\ &= - \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^x \tilde{f}_\varepsilon(t) dt \right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} (x_1 - x) \tilde{f}_\varepsilon(x) dx \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}_\varepsilon(x) dx + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Из определения функции $\tilde{f}_\varepsilon$, формулы для f_ε из (7), равенств (12) и леммы следует, что второе слагаемое в правой части последнего равенства есть величина порядка $O(\varepsilon^2)$. Вновь учитывая определение функции $\tilde{f}_\varepsilon$ и равенство

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \xi} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) = \varepsilon \frac{d}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right),$$

получаем

$$- \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^x \tilde{f}_\varepsilon(t) dt \right)^2 dx = -4 \int_M \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \xi} \left(t, \frac{t}{\varepsilon} \right) dt \right)^2 dx + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2).$$

Таким образом,

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\tilde{f}_\varepsilon(x)}{\tilde{q}_\varepsilon(x)} \left(\int_{x_0}^x \frac{(x-t) \tilde{f}_\varepsilon(t)}{\tilde{q}_\varepsilon(t)} dt \right) dx = O(\varepsilon^2),$$

а потому $\varepsilon^2 m_\varepsilon^{(2)} = O(\varepsilon^4)$, и равенство (10) с $c_1 = 0$, $c_2 = k_2$ теперь следует из (9) и (13).

Из теоремы 1 работы [3] также следует, что, кроме собственного значения, стремящегося к нулю, остальные собственные значения оператора H_ε (если они существуют) должны стремиться к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если V – вещественнозначная функция (не равная тождественно нулю), то все собственные значения оператора H_ε

вещественны и отрицательны. Более того, в этом случае k_2 вещественно и положительно, а потому оператор H_ε имеет единственное собственное значение, данное собственное значение простое, стремится к нулю и имеет асимптотику (4).

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1446.2003.1) и программы “Университеты России” (грант УР.04.01.484), а также при финансовой поддержке РФФИ (гранты 05-01-97912-р_агидель (Д. И. Борисов) и 05-01-01008 (Р. Р. Гадыльшин)).

Список литературы

- [1] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [2] B. Simon, *Ann. Phys.*, **97** (1976), 279; M. Klaus, *Ann. Phys.*, **108** (1977), 288; R. Blankenbecler, M. L. Goldberger, B. Simon, *Ann. Phys.*, **108** (1977), 69; M. Klaus, B. Simon, *Ann. Phys.*, **130** (1980), 251.
- [3] Р. Р. Гадыльшин, *ТМФ*, **132**:1 (2002), 97–104.
- [4] Д. Е. Пелиновский, К. Салем, *ТМФ*, **122** (2000), 118–128; P. Zhevandrov, A. Merzon, “Asymptotics of eigenfunctions in shallow potential well and related problems”, *Asymptotic Methods for Wave and Quantum Problems. AMS Transl. Ser. 2. Adv. Math. Sci.*, ed. M. V. Karasev, AMS, Providence, RI, 2003, 235–284; F. Bentosela, R. M. Cavalcanti, P. Exner, V. A. Zagrebanov, *J. Phys. A*, **32** (1999), 3029–3039; T. Weidl, *Comm. Part. Diff. Eq.*, **24**:1&2 (1999), 25–60.

Поступила в редакцию 22.VII.2005 г.