Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Юров, А. А. Юрова, Об одном методе построения точных решений уравнений двумерной гидродинамики несжимаемой жидкости, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 1, 64–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2023>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:16:30

© 2006 г.

А. В. Юров*, А. А. Юрова†

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Предложен простой алгебраический метод построения точных решений уравнений двумерной гидродинамики несжимаемой жидкости. В случае невязкой жидкости задача сводится к последовательному решению трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных, а в случае вязкой – к решению трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных и одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

Ключевые слова: двумерная несжимаемая жидкость, точные решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика несжимаемых вязких потоков жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса (НС). В режиме больших чисел Рейнольдса (Re) возникает турбулентность – одна из главнейших нерешенных задач теоретической и математической физики. Формально устремляя число Рейнольдса к бесконечности (или вязкость к нулю), получаем уравнения Эйлера, математический анализ которых еще более затруднен, чем исследование уравнений НС; при этом сами уравнения НС при больших числах Re можно рассматривать как сингулярное возмущение уравнений Эйлера. Результаты Като показывают, что двумерные уравнения НС глобально определены в $C^0([0, \infty]; H^s(\mathbb{R}^2))$, при $s > 2$ и при $0 < T < \infty$ “слабое решение” двумерных уравнений НС стремится к решению двумерного уравнения Эйлера в $C^0([0, T]; H^s(\mathbb{R}^2))$ [1]. В свою очередь, трехмерное уравнение НС локально определено в $C^0([0, \tau]; H^s(\mathbb{R}^2))$, при $s > 5/2$ его “слабые решения” приближаются решениями трехмерного уравнения Эйлера в $C^0([0, \tau]; H^s(\mathbb{R}^3))$, где τ определяется начальными данными (нормой) и внешними силами [2]. Невязкий предел интенсивно исследовался в работах [3]. Без сомнения, математическое исследование уравнений НС и Эйлера является одной из важнейших задач математической физики. В настоящее

*Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград, Россия. E-mail: artyom_yurov@mail.ru

†Калининградский государственный технический университет, Калининград, Россия. E-mail: yurov@freemail.ru

время количество работ, посвященных тем или иным математическим аспектам этих уравнений, громадно. Среди важнейших результатов можно отметить факт гамильтоновости двумерных уравнений Эйлера, доказанный Арнольдом [4], и результаты исследования симплектической структуры этих уравнений [5]. В работах [6] было найдено представление Лакса для двумерного уравнения Эйлера, записанное в эйлеровых переменных. Позднее было построено представление Лакса и в евклидовых переменных [7].

В настоящей работе мы описываем удивительно простой, но эффективный метод построения точных решений уравнений двумерной гидродинамики несжимаемой жидкости, применимый как к невязкой (уравнения Эйлера), так и к вязкой жидкости (уравнения НС). Статья организована следующим образом. Во втором разделе мы продемонстрируем этот метод для двумерных уравнений Эйлера, описывающих течения невязкой несжимаемой жидкости. Некоторые примеры точных решений приведены в разделе 3. В разделе 4 мы обобщим вышеописанный метод на случай вязких двумерных течений, в разделе 5 подведем итоги.

2. ДВУМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим невязкую несжимаемую двумерную жидкость. Две компоненты скорости v_x и v_y выражаются через функцию тока $\psi = \psi(t, x, y)$:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

так что выполняется уравнение неразрывности: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. В этих переменных двумерное уравнение Эйлера принимает вид [8]

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где Δ означает двумерный лапласиан.

Уравнение (2) представляет собой нелинейное уравнение, которое не относится к числу так называемых интегрируемых (несмотря на наличие представления Лакса). Тем не менее для него можно развить процедуру построения точных решений. Точнее, существуют преобразования, позволяющие находить точные решения уравнения (2), описывающие непотенциальные потоки жидкости (т.е. содержащие вихри), начиная с решений, описывающих потенциальные потоки. Суть дела выражает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi(x, y)$ – гармоническая в области D функция: $\Delta \psi = 0$, где Δ – двумерный лапласиан. Пусть $F(t, x, y)$ есть решение переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta F &= kF, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d \ln k}{dt} F, \end{aligned} \quad (3)$$

где $k(t)$ – некоторая функция времени. Тогда функция

$$\psi_1 = \psi + F \quad (4)$$

удовлетворяет в D уравнению (2), т.е.

$$\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} = 0.$$

Справедливость теоремы проверяется прямым вычислением. В дальнейшем будем ссылаться на формулы (3) и (4) как на процедуру “одевания” двумерных уравнений Эйлера.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Гармоническая функция ψ считается зависящей от двух переменных: $\psi = \psi(x, y)$. Можно, однако, считать, что она зависит также и от t как от параметра. Как легко убедиться, теорема останется верной и в этом случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Преобразование (4) похоже на преобразование Дарбу (ПД), используемое в теории интегрируемых систем. В самом деле, суть ПД заключается в нахождении решения пары Лакса Ψ с заданным “затравочным” потенциалом (который, в свою очередь, является решением исследуемого нелинейного уравнения) и последующем использовании Ψ для нахождения новых потенциалов.

Сходство ПД с описанным выше преобразованием очевидно. В самом деле, в качестве промежуточного шага необходимо решить два линейных уравнения с переменными коэффициентами (3), зависящими от гармонической функции ψ , которая может считаться “затравочным” потенциалом, поскольку удовлетворяет уравнению (2) и описывает плоское (стационарное, если ψ не зависит от t) потенциальное течение. Новая функция тока ψ_1 (4) будет уже описывать нестационарное течение с завихренностью.

Тем не менее это не ПД, поскольку линейная система (3) не является $[L, A]$ -парой уравнения Эйлера (2). Условие совместности уравнений (3) имеет вид

$$\Delta \theta - k\theta = \frac{dk}{dt} F, \quad (5)$$

где

$$\theta = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Используя уравнения (3) и факт гармоничности ψ , можно переписать уравнение (5) в другом виде:

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} F. \quad (6)$$

Не следует, однако, считать, что система (3) является парой Лакса для уравнений (5) или (6). Дело в том, что пара линейных уравнений может считаться парой Лакса, только если их условие совместности имеет вид нелинейного уравнения для потенциалов. Другими словами, “волновая функция” (роль которой в нашем случае играла бы функция F) не должна входить в условие совместности, являясь лишь вспомогательной величиной. У нас иная ситуация: величина F содержится в уравнении (6). Разумеется, можно сделать следующий шаг и найти условие совместности уравнений (6) и (3), однако и тогда величину F не удастся исключить. Мы не будем здесь обсуждать интересный вопрос о том, можно ли прекратить эту процедуру, выписав лишь конечное число уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В систему (3) входит вспомогательная функция времени $k = k(t)$. Ее величина не фиксирована, а определяется формой гармонической функции ψ . В частности, не для всякой гармонической ψ система (3) совместна, т.е. не для всякой ψ существует функция $k(t)$ такая, что система (3) имеет решение.

Покажем, что этот элементарный подход неожиданно оказывается достаточно эффективным для построения точных решений двумерного уравнения Эйлера.

3. ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим гармоническую функцию вида $\psi_N = X_N A_N Y_N$, где

$$X_N = (1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^N), \quad Y_N = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ \vdots \\ y^N \end{pmatrix}, \quad (7)$$

A_N – постоянная $((N+1) \times (N+1))$ -матрица с элементами a_{ik} , а i и k пробегает значения от нуля до N . Вид матрицы A_N определяется путем подстановки ψ_N в уравнение $\Delta\psi_N = 0$. Ниже мы приводим несколько примеров A_N при различных N :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & 0 \\ -a_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_3 &= \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & -3a_{30} & a_{13} \\ -a_{02} & -3a_{03} & 0 & 0 \\ a_{30} & -a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} \\ a_{10} & a_{11} & -3a_{30} & a_{13} & 0 \\ -a_{02} & -3a_{03} & -6a_{04} & 0 & 0 \\ a_{30} & -a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{04} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A_5 &= \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & -3a_{30} & a_{13} & 5a_{50} & -\frac{3a_{33}}{10} \\ -a_{02} & -3a_{03} & -6a_{04} & -10a_{05} & 0 & 0 \\ a_{30} & -a_{13} & -10a_{50} & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{04} & 5a_{05} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{50} & -\frac{3a_{33}}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и т.д. Число свободных параметров $M(N)$ (т.е. число независимых элементов в матрицах A_N) определяется следующим образом: если N нечетное число, то $M(N) = 2(N+1)$, а если N – четное, то $M(N) = 2N+1$. Так как функция тока служит лишь вспомогательным средством для вычисления поля скоростей и при дифференцировании по пространственным переменным a_{00} обращается в нуль, то, не теряя общности, можно положить $a_{00} = 0$, что мы и будем подразумевать в дальнейшем. Остальные коэффициенты следует рассматривать как функции времени: $a_{ij} = a_{ij}(t)$. Подставляя ψ_N в систему (3) и решая ее, извлекаем функцию F , после чего по формуле (4) вычисляем соответствующую $\psi_{1,N}$.

Проиллюстрируем этот подход на конкретных примерах. Пусть $N = 1$. В этом случае следует выбрать $a_{11} = 0$. Удобно воспользоваться следующей параметризацией для $a_{01}(t)$ и $a_{10}(t)$:

$$a_{01}(t) = A(t) \sin \alpha(t), \quad a_{10}(t) = A(t) \cos \alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ и $A(t)$ – произвольные вещественные функции. После простого вычисления получаем окончательно

$$\psi_1 = A(t)(y \sin \alpha(t) + x \cos \alpha(t)) + \sum_{i=1}^n (c_i \sin g_i + c'_i \cos g_i), \quad (8)$$

где $g_i = x \cos \phi_i + y \sin \phi_i + f_i(t)$, величины ϕ_i , c_i , c'_i – произвольные постоянные, а $f_i(t)$ дается интегралом

$$f_i(t) = f_i(0) + \int dt A(t) \sin(\phi_i - \alpha(t)).$$

Величина k в этом случае есть просто отрицательная постоянная¹⁾, которую мы, не теряя общности, выбрали равной минус единице. Можно непосредственно подставить выражение (8) в (2) и убедиться, что получено решение уравнения Эйлера, параметризованное двумя произвольными функциями $A(t)$ и $\alpha(t)$. Выберем $n = 1$, $A(t) = \mu / \text{ch}^2(\nu t)$, $\alpha = \text{const}$, $c'_1 = 0$, $c_1 = c$, $\phi_1 = \phi$, $f_1(0) = 0$. В этом частном случае решение принимает вид

$$\psi_1 = \frac{\mu}{\text{ch}^2(\nu t)}(y \sin \alpha + x \cos \alpha) + c \sin \left[\kappa \left(x \cos \phi + y \sin \phi + \frac{\mu}{\nu} \sin(\phi - \alpha) \text{th}(\nu t) \right) \right], \quad (9)$$

где мы ввели $\kappa = \sqrt{-k}$, $k < 0$. На рис. 1 изображены поля скоростей соответствующего течения в моменты времени $t = 0$, $t = 1$ и $t = 50$, причем $\alpha = 0$, $\phi = \pi/4$, а остальные (размерные) параметры выбраны равными единице. Полученное решение качественно напоминает решение нелинейного уравнения Шредингера, называемое “экзультон” [9]. Экзультон – рациональное возмущение, которое появляется на фоне периодической волны, растет, а потом так же быстро исчезает²⁾. Аналогично ведет себя решение (9): при достаточно больших по модулю, но отрицательных временах течение качественно выглядит так же, как на рис. 1в. При t , стремящемся к нулю слева, в решении (9) начинает доминировать первое слагаемое, которое искажает эту картину. Максимальное искажение имеет место при $t = 0$ (см. рис. 1а), после чего первое слагаемое экспоненциально быстро исчезает и мы опять получаем первоначальную (хотя и смещенную) картину, изображенную на рис. 1в.

Теперь рассмотрим случай $N = 2$. Полагая a_{01} , a_{10} , a_{11} и a_{02} функциями времени, будем искать F в виде $F = \xi(t) \sin(a(t)x + b(t)y + c(t))$. Решая уравнения (3) и используя функцию (4), находим

$$\psi_1 = a_{02}(t)(y^2 - x^2) + a_{11}(t)xy + a_{01}(t)y + a_{10}(t)x + \frac{\xi_0 \sin(a(t)x + b(t)y + c(t))}{a^2(t) + b^2(t)}, \quad (10)$$

¹⁾Эта величина размерна: $[k] = 1/\text{м}^2$. Во избежание недоразумений отметим, что аргументы синусов и косинусов в выражении (8) умножаются на $\sqrt{-k}$.

²⁾От exultare (лат.) – выпрыгивать, внезапно появляться.

Рис. 1. Графики поля скоростей при $N = 1$ в области $-10 < x, y < 10$ в моменты времени а) $t = 0$; б) $t = 1$; в) $t = 50$.

где $\xi_0 = \text{const}$, а функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da(t)}{dt} &= -a_{11}(t)a(t) - 2a_{02}(t)b(t), \\ \frac{db(t)}{dt} &= a_{11}(t)b(t) - 2a_{02}(t)a(t), \\ \frac{dc(t)}{dt} &= -a_{01}(t)a(t) + a_{10}(t)b(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь можно произвольно задавать функции $a_{ij}(t)$. На следующем шаге подставляем их в систему (11) и решаем ее относительно $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$. Наконец, подставляя найденные функции в выражение (10), получаем искомое решение.

В качестве простого примера положим $a_{11} = \text{const}$ и $a_{02} = \text{const}$. Производя вышеуказанные вычисления, находим

$$a(t) = a_0 \text{ch}(\omega t), \quad b(t) = -\frac{a_0}{2a_{02}} (a_{11} \text{ch}(\omega t) + \omega \text{sh}(\omega t)),$$

где a_0 – постоянная интегрирования, а $\omega = \sqrt{a_{11}^2 + 4a_{02}^2}$. Что же до $c(t)$, то удобно положить $a_{10}(t)b(t) = a_{01}(t)a(t)$, что дает $c = \text{const}$, причем можно, без потери общности, выбрать $c = 0$. Отметим, что решение (10) не сингулярно, а $k(t) = -a^2(t) - b^2(t)$.

Рис. 2. Графики поля скоростей при $N = 2$ в области $-0.5 < x, y < 0.5$ в моменты времени: а) $t = 0$; б) $t = 50$.

Поведение поля скоростей при $t = 0$ и $t = 50$ изображено на рис. 2. Здесь параметры $a_{10} = a_{01} = 0$, а все остальные положены равными единице. Отметим, что в отличие от предыдущего решения при больших по модулю t доминирует первое, а не второе слагаемое. Кроме того, при больших значениях x и y тоже доминирует первый член в выражении (10). Искажение структуры происходит лишь в окрестности начала системы координат, когда $t \rightarrow 0$. По этой причине на рис. 2 выбрана малая пространственная область $-0.5 < x, y < 0.5$. В масштабах, принятых на рис. 1, изменения не были бы заметны.

Наконец, отметим, что тем же методом можно строить и решения, описывающие потенциальные течения. Например, выбирая $N = 3$, $k = 0$, можно получить следующее решение уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \psi_1 = & a_{01}y + a_{02}y^2 + a_{03}y^3 + a_{10}x + a_{11}xy - 3a_{30}xy^2 + a_{13}xy^3 - a_{02}x^2 - 3a_{03}x^2y + \\ & + a_{30}x^3 - a_{13}x^3y + e^{ax+by+c} (A \sin(bx - ay - \tilde{c}) + B \cos(bx - ay - \tilde{c})), \end{aligned}$$

где все коэффициенты, кроме A и B , являются произвольными функциями времени. Легко убедиться, что $\Delta\psi_1 = 0$. Разумеется, потенциальные двумерные течения могут быть описаны с помощью мощного метода, основанного на введении комплексного потенциала [8], поэтому использование вышеописанной техники выглядит неудобным. Преимущества нашего подхода к построению точных решений двумерных уравнений Эйлера становятся очевидными только для нестационарных течений, содержащих завихренность.

4. ДВУМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Удивительно, но вышеописанная методика легко обобщается на случай двумерного течения несжимаемой вязкой жидкости, описываемой уравнением

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} = \nu \Delta^2 \psi, \quad (12)$$

где ν – кинематическая вязкость. А именно, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ψ – гармоническая в области D функция: $\Delta\psi = 0$. Пусть $F(t, x, y)$ – решение переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\Delta F &= u(t)F, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} + U(u)F,\end{aligned}\quad (13)$$

где $u(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{du(t)}{dt} + uU(u) = \nu u^2, \quad (14)$$

а $U(u)$ – произвольная функция своего аргумента. Тогда функция $\psi_1 = \psi + F$ удовлетворяет в D уравнению (12):

$$\frac{\partial \Delta\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \Delta\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \Delta\psi_1}{\partial y} = \nu \Delta^2 \psi_1.$$

Справедливость теоремы 2, как и теоремы 1, проверяется прямым вычислением.

В качестве простейшего примера рассмотрим “одевание” на нулевом фоне: $\psi = 0$. Выберем $U(u) = \nu u$; тогда, как следует из уравнения (14), величина u является постоянной. Решая систему (13), находим

$$\psi_1 = K e^{-\nu(a^2+b^2)t} (C_1 \sin(ax + by) + C_2 \cos(ax + by)),$$

где $K, a, b, C_{1,2}$ – произвольные постоянные. Разумеется, это простое и известное решение. Мы привели его только для демонстрации работоспособности метода.

Теперь рассмотрим случай $N = 1$. По аналогии с выражением (8) можно построить решение уравнения (12) вида

$$\psi_1 = A(t)(y \sin \alpha(t) + x \cos \alpha(t)) + \xi_1(t) \sin g + \xi_2(t) \cos g, \quad (15)$$

где

$$g = R(x \cos \phi + y \sin \phi + f(t)), \quad U(u) = \nu u, \quad u = -R^2 = \text{const},$$

$A(t), \alpha(t), f(t)$ – произвольные функции, ϕ – произвольная постоянная, а функции $\xi_1(t), \xi_2(t)$ суть решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1(t)}{dt} &= -\nu R^2 \xi_1 + R \left(\frac{df(t)}{dt} - A(t) \sin(\phi - \alpha(t)) \right) \xi_2, \\ \frac{d\xi_2(t)}{dt} &= -\nu R^2 \xi_2 - R \left(\frac{df(t)}{dt} - A(t) \sin(\phi - \alpha(t)) \right) \xi_1.\end{aligned}$$

Разумеется, подобно выражению (8), можно построить суперпозицию произвольного числа синусов и косинусов вместо решения (15). Это наблюдение является следствием линейности уравнений (13) и линейности преобразуемой функции ψ по пространственным переменным.

В частном случае $df(t)/dt = A(t) \sin(\phi - \alpha(t))$ находим

$$\psi_1 = A(t)(y \sin \alpha(t) + x \cos \alpha(t)) + e^{-\nu R^2 t} (\xi_1(0) \sin g + \xi_2(0) \cos g),$$

где $\xi_{1,2}(0)$ – постоянные интегрирования. Сравнивая это решение с выражениями (8) и (9), видим, что учет вязкости приводит, как и следовало ожидать, к появлению дополнительного экспоненциального множителя, описывающего диссипацию.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, уравнения двумерной гидродинамики несжимаемой жидкости допускают простой алгебраический метод построения точных решений. В данной работе мы ограничились демонстрацией простейших решений отдельно для случаев невязкой и вязкой жидкости. Не вызывает никаких сомнений то, что, используя вышеописанную методику, можно построить множество значительно более сложных и интересных с физической точки зрения решений.

Интереснейшим открытым вопросом является использование “метода одевания” для решения граничных задач. Рассмотрим, например, уравнения (13), (14). Если решить два уравнения $\Delta\psi = 0$ и $\Delta F = u(t)F$ с заданными одинаковыми граничными условиями S (разумно рассматривать вторую краевую задачу, т.е. задачу Неймана), то решение ψ_1 , полученное вышеописанным методом, будет удовлетворять граничному условию $2S$. С другой стороны, функция F должна удовлетворять дополнительному динамическому уравнению, которое может оказаться не совместным с решением данной краевой задачи. Вопрос, следовательно, должен ставиться так: каков класс граничных условий Неймана, совместный с системой (13), (14) и уравнением $\Delta\psi = 0$? Мы надеемся вернуться к этой задаче в дальнейших публикациях.

Благодарности. Авторы хотят выразить признательность рецензенту, чьи полезные замечания и предложения, бесспорно, улучшили статью. Авторы признательны А. К. Погребкову и Ю. Ли. Один из авторов (А. В. Юров) искренне благодарен Отделению математики Университета Миссури – Колумбия (США) за предоставленную “Miller Scholar” позицию.

Список литературы

- [1] T. Kato, *Proc. Symp. Pure Math. Part 2*, **45** (1986), 1.
- [2] T. Kato, *J. Funct. Anal.*, **9** (1972), 296; “Quasi-linear equations of evolution with applications to partial differential equations”, *Spectral Theory and Differential Equations. Proc. of Symp. (Dundee, Scotland, July 1–9, 1974). Lect. Notes Math. V. 448*, ed. W.N. Everitt, Springer, Berlin, 1975, 25.
- [3] P. Constantin, J. Wu, *Indiana Univ. Math. J.*, **45**:1 (1996), 67; J. Wu, *J. Diff. Equat.*, **142**:2 (1998), 413.
- [4] V.I. Arnold, *Ann. Inst. Fourier*, **16**:1 (1966), 319.
- [5] J.E. Marsden, *Lectures on Mechanics (Lond. Math. Soc. Lect. Note, Ser. 174)*, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [6] S. Friedlander, M. Vishik, *Phys. Lett. A*, **148**:6–7 (1990), 313; *Nonlinearity*, **6**:2 (1993), 231.
- [7] Y. Li, A. Yurov, *Stud. Appl. Math.*, **111** (2003), 101.
- [8] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, М., 1986.
- [9] А. Р. Итс, А. В. Рыбин, М. А. Салль, *ТМФ*, **74**:1 (1988), 29.

Поступила в редакцию 12.VII.2005 г.,
после доработки 21.X.2005 г.