Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Т. Ахмедов, Теория неабелевых тензорных полей: калибровочные преобразования и кривизна, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 1, 73–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2024>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:30:59

© 2006 г.

Э. Т. Ахмедов*

ТЕОРИЯ НЕАБЕЛЕВЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ: КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И КРИВИЗНА

Сделан еще один шаг на пути к формулировке теории неабелевых дватензорных полей: для них найдены правила калибровочных преобразований и тензор кривизны. Для определения теории используется поверхностная экспонента. Выводится дифференциальное уравнение для экспоненты и делается попытка сформулировать ее определение в форме матричной модели. Обсуждается применение предложенных конструкций к уравнению Янга–Бакстера для интегрируемых моделей и к струнной теории поля.

Ключевые слова: квантовая теория поля, неабелевы тензорные поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что стандартная теория расслоений была создана для того, чтобы работать с неоднозначно определенными функциями – сечениями расслоений над пространством X . С современной точки зрения это означает, что по заданному значению сечения расслоения в некоторой точке x можно найти его значение в любой другой точке y . Однако результат будет зависеть от выбранного пути из точки x в точку y и от выбора един-формы связности на расслоении. Упорядоченная по пути экспонента от связности дает отображение между слоями V_x и V_y над точками x и y .

Такая конструкция предполагает, что един-форма связности определена однозначно с точностью до калибровочных преобразований – вращений в слоях. Однако возникает вопрос: что будет, если един-форма связности неоднозначна? Простейшим известным нам примером такой ситуации является монополь Ву–Янга. Для того чтобы описать ситуацию с неоднозначной един-формой связности, требуется иметь “связность” для связностей, которая должна быть упорядочена по поверхности, охватываемой путем X . Такие упорядочения задают двумерные голономии, описывающие отображения между последовательностями слоев над различными кривыми, вдоль которых была упорядочена исходная един-форма. Математический аппарат, лежащий в основе подобной конструкции, можно найти в работах [1].

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия; RIKEN, Tokyo, Japan. E-mail: akhmedov@itep.ru

Требуется найти локальное описание теории поля для двумерных голономий в терминах два-тензорных полей. В статье [2] и в настоящей работе мы предлагаем такую теорию. Для того чтобы ее получить, следует организовать независимое от триангуляции упорядочение два-тензорного калибровочного поля, несущего цветовые индексы, по поверхности. Независимость от триангуляции весьма существенна для непротиворечивости теории. Это означает следующее. Для построения упорядочения по поверхности мы должны аппроксимировать ее с помощью триангулированных версий римановых поверхностей. Для дискретного случая упорядочение по поверхности получается следующим образом. Мы склеиваем экспоненты два-тензорных полей по всей симплициальной поверхности путем помещения их в различные симплексы (треугольники), которые “сидят” в различных точках внутри базового пространства X . Теперь легко видеть, что два-тензорная связность должна нести три цветовых индекса наряду с двумя пространственными [2]: $B_{\mu\nu}^{ijk}$, $\mu, \nu = 1, \dots, \dim X$ и $i, j, k = 1, \dots, \dim V$. Это определяется тем, что у каждого двумерного симплекса имеются три ребра. В работе [2] мы нашли способ экспоненцирования кубических матриц, приводящий к объекту, который мы называем поверхностной экспонентой. Имея такую экспоненту, можно перейти к континуальному пределу: от симплициальных поверхностей к гладким. Важно, что при использовании поверхностной экспоненты результат взятия предела не будет зависеть от того, каким образом он был взят! Это и есть то, что мы называем независимостью от триангуляции.

Статья построена следующим образом. В следующем разделе мы вкратце напомним содержание работы [2] и сжатым образом сформулируем ее утверждения. В разделе 3 мы найдем дифференциальное уравнение для поверхностной экспоненты и определим новый способ экспоненцирования квадратных матриц. Мы установим связь между такой экспонентой квадратных матриц и поверхностной экспонентой кубических матриц. В конце раздела 3 мы обсудим возможность матрично-интегральной формулировки поверхностной экспоненты. В разделе 4 мы выведем правила калибровочного преобразования и выражение для кривизны для два-тензорных калибровочных полей. Кроме того, в этом разделе мы обсудим смысл теории неабелевых тензорных полей. В разделе 5 мы установим связь указанной теории с решеточными интегрируемыми моделями и со струнной теорией поля. В заключение в разделе 6 мы сформулируем выводы.

2. ЭКСПОНЕНЦИРОВАНИЕ КУБИЧЕСКИХ МАТРИЦ И УПОРЯДОЧЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ

2.1. Поверхностная экспонента. В работе [2] мы определили поверхностную экспоненту кубической матрицы $\hat{B} = \|B_{ijk}\|$, $i, j, k = 1, \dots, N$, как¹⁾

$$\mathrm{Tr}(E_{g,I,\kappa}^{\hat{B}}) \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{\mathrm{graph}, g}^M \left(\hat{I} + \frac{\hat{B}}{M} \right), \quad (1)$$

¹⁾Причина появления нижних индексов в левой части этого уравнения будет объяснена ниже.

Рис. 1. Соотношение дуальности между графами. Трехвалентный граф показан здесь лентами.

где предел берется по последовательности замкнутых (без свободных индексов, поскольку в левой части мы берем след), связных трехвалентных графов с M вершинами²⁾. Заметим, что в работе [2] рассматривались триангуляционные графы, которые триангулируют римановы поверхности и являются дуальными к трехвалентным графам (рис. 1). Соотношение между дуальными графами следующее. Мы помещаем вершины дуального графа в центры граней исходного и соединяем вершины ребрами дуального графа, проходящими через ребра исходного. Таким образом, граф, дуальный к трехвалентному, является триангуляционным графом, т.е. его гранями являются треугольники. В настоящей работе мы в действительности используем трехвалентные графы и часто переходим от трехвалентных графов к триангуляционным. При фиксированном M произведение в правой части уравнения (1) берется по трехвалентным графам с M вершинами: для каждой вершины графа мы вводим матрицу $I_{ijk} + B_{ijk}/M$ и склеиваем индексы этих матриц при помощи билинейной формы κ^{ij} (как это показано на рис. 2). Может показаться, что для взятия предела $M \rightarrow \infty$ следует выбрать какую-то последовательность графов. Однако в работе [2] мы доказали, что в (1) предел не зависит от выбора последовательности графов при следующих условиях.

- Мы должны рассматривать трехвалентные графы так, чтобы было очевидно, на какую риманову поверхность минимального рода этот граф можно отобразить. Род g графов в последовательности должен быть фиксирован, т.е. при каждом M следует брать графы с одной и той же топологией.

- Матрицы $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$ должны подчиняться следующим условиям:

$$I_{ijk} = I_{kij} = I_{jki} - \text{циклическая симметрия,}$$

²⁾Трехвалентными являются графы, в каждой вершине которых заканчиваются три ребра.

Рис. 2. Пример произведения матриц $(\hat{I} + \hat{B}/4)$ по пирамиде, т.е. при $M = 4$.

$$\sum_{j,k=1}^N I_{ij}^k I_{lk}^j = \kappa_{il} - \text{нормировка}, \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^N I_{inl} I_{jk}^n = \sum_{n=1}^N I_{ijn} I_{kl}^n - \text{слияние}.$$

Индексы I_{ijk} поднимаются с помощью κ^{ij} . Графическое представление последних двух уравнений дано на рис. 3, на котором отражены двумерные условия, связанные с независимостью от триангуляции. Эти соотношения разрешаются с использованием полупростой ассоциативной алгебры (см., например, [2]–[4]); $I_{ij}^k = I_{ijl} \kappa^{lk}$ – структурные константы этой алгебры, а κ_{ij} – невырожденная форма Киллинга. Если алгебра коммутативна, то матрицу I_{ijk} можно привести (путем ортогонального вращения) к виду δ_{ijk} – кубической матрице, у которой ненулевыми элементами являются только единицы, стоящие на главной диагонали куба. В этом случае поверхностную экспоненту можно привести к стандартной, которая зависит только от диагональных элементов матрицы $\hat{B}$ [2]. Нетривиальный случай возникает, когда упомянутая выше полупростая алгебра некоммутативна. Впервые такой случай возникает, когда $N = 4$, и соответствует алгебре (2×2) -матриц.

- В последовательности мы ограничиваемся графами следующего вида: в пределе $M \rightarrow \infty$ число ребер у каждой грани графа должно быть много меньше M . Геометрический смысл этого условия объясняется в работе [2].

Заметим, что в работе [2] мы рассмотрели еще одно дополнительное условие. Однако это условие не является необходимым для того, чтобы предел (1) не зависел от выбора последовательности графов. Оно всего лишь упрощает выкладки, проведенные в работе [2].

В общем случае при заданном N имеется много решений уравнений для $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$, а экспонента зависит от выбора $\hat{I}$, $\hat{\kappa}$ и g . Это объясняет появление нижних индексов

$$\sum_{jk} \text{graph} = \text{graph}$$

$$\sum_n \text{graph} = \sum_n \text{graph}$$

Рис. 3. Двумерные условия, связанные с независимостью от триангуляции.

в уравнении (1). В результате в пределе получим

$$\text{Tr}(E_{g,I,\kappa}^{\hat{B}}) = \sum_{F=0}^{\infty} \frac{1}{F!} B^{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} \dots B^{j_1^{(F)} j_2^{(F)} j_3^{(F)}} I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}, \quad (3)$$

где мы использовали ту же букву I для обозначения матрицы $I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}$ с $3F$ индексами, которая получается путем перемножения I_{ijk} по любому ориентированному трехвалентному графу с g ручками, F дырками и тремя внешними ребрами у каждой дырки (рис. 4). В то же время $I^g(F=0)$ является в точности числом, получающимся после перемножения I_{ijk} по любому замкнутому графу рода g . Например, $I^0 = \sum_{i,k} \kappa_i^k \kappa_k^i = \sum_i \delta_i^i = N$. Причина разделения индексов $I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}$ на группы, разделенные вертикальной линией, состоит в следующем: эти матрицы циклически симметричны только при перестановках их индексов внутри каждой тройки, однако они полностью симметричны при любой перестановке троек индексов между собой [2]. Все это следует из топологии описанных выше графов (см. рис. 4) и равенства, отраженного на рис. 3.

Как только мы определили след поверхностной экспоненты, мы можем определить экспоненту с любым числом индексов или, лучше сказать, для любой двумерной топологии – для заданного числа ручек g , дырок L и распределения внешних индексов по дыркам. Сначала определим экспоненту для топологии диска с тремя внешними ребрами на границе. Для этого в уравнении (1) следует использовать открытые графы с одной дыркой и тремя ребрами на границе. В результате для соответствующего предела получим

$$(E_{I,\kappa}^{\hat{B}})_{m_1 m_2 m_3} = \sum_{F=0}^{\infty} \frac{1}{F!} B^{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} \dots B^{j_1^{(F)} j_2^{(F)} j_3^{(F)}} I_{m_1 m_2 m_3 | j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}. \quad (4)$$

Экспонента, определенная равенством (4), является элементом, используемым при построении поверхностной экспоненты общего вида и при упорядочении по поверхности, приводимом ниже. Действительно, двумерную поверхность любой топологии

Рис. 4. Триангуляционный граф, дуальный к трехвалентному графу, определяющему $I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}^g$.

можно склеить с помощью треугольников, дуальных трехвалентным вершинам. Теперь следует задать $(E_{I,\kappa}^{\hat{B}})_{m_1 m_2 m_3}$ вместо $(I + B/M)_{ijk}$ или I_{ijk} в вершинах. Например, выражение (3) получается путем перемножения (4) по любой замкнутой триангулированной римановой поверхности рода g : чтобы получить $E^{\hat{B}}$, в (4) следует взять $\hat{B}/J$, где J – полное число треугольников, из которых построена обсуждаемая замкнутая поверхность. Это следует из основного свойства поверхностной экспоненты, обсуждаемого в разделе 3.

2.2. Независимое от триангуляции упорядочение по поверхности. С помощью поверхностной экспоненты в работе [2] мы построили независимое от триангуляции упорядочение неабелевых два-тензорных полей по двумерным поверхностям. Повторим здесь это построение. В данном контексте естественно рассмотреть триангулированную аппроксимацию $\tilde{\Sigma}(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_L)$ ориентированной римановой поверхности $\Sigma(\gamma_1, \dots, \gamma_L)$ в объемлющем пространстве X . Эта поверхность имеет L граничных замкнутых петель γ , которые аппроксимируются замкнутыми ломаными линиями $\tilde{\gamma}$ (см. рис. 5). В конце концов мы построим континуальный предел, причем результат не зависит от того, как именно мы взяли предел, т.е. от выбора последовательности триангулированных поверхностей $\tilde{\Sigma}$, которые приближают гладкую поверхность Σ в рассматриваемом пределе.

Для того чтобы получить независимое от триангуляции упорядочение по поверхности, нам нужно поставить матрицу

$$U_{ijk}(x, \Delta\sigma^{\mu\nu}) = (E_{I,\kappa}^{\hat{B}_{\mu\nu}(x)\Delta x^\mu \Delta x^\nu})_{ijk}$$

в соответствие каждому симплексу (треугольнику), находящемуся в окрестности точки x образа триангулированной поверхности в X . Здесь $\Delta\sigma^{\mu\nu} = \Delta x^\mu \Delta x^\nu$ – ориентированный элемент поверхности, связанный с рассматриваемым треугольником. Индексы i, j и k соответствуют трем ребрам данного треугольника. Таким образом, $\hat{U}: V^3 \rightarrow \mathbb{C}$, где V есть N -мерное векторное пространство – “слой” нашего “расслоения”, база которого есть X .

Рис. 5. $\tilde{\Sigma}$ – дискретизация Σ ; $\tilde{\gamma}$ – дискретизации γ .

Упорядочение по поверхности получается путем склеивания матриц U_{ijk} на каждом треугольнике по всей симплициальной поверхности с использованием билинейной формы $\kappa^{ij} : \mathbb{C} \rightarrow V^2$ (рис. 6):

$$U[\tilde{\Sigma}(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_L)]_{j_1^{(1)} \dots j_{n_1}^{(1)} | j_1^{(2)} \dots j_{n_2}^{(2)} | \dots | j_1^{(L)} \dots j_{n_L}^{(L)}} \equiv \sum_{k_1, k_2, \dots, k_w} [U_{j_1^{(1)} k_1 k_2}(x_1, \Delta\sigma_1) U^{k_1 k_3}_{k_4}(x_2, \Delta\sigma_2) U^{k_3}_{j_2^{(1)} j_3^{(1)}}(x_3, \Delta\sigma_3) \dots], \quad (5)$$

где w – полное число внутренних ребер графа, $j^{(l)}$ – индексы, соответствующие ребрам l -й ломаной линии $\tilde{\gamma}_l$, а n_l – полное число ребер данной ломаной линии. Индексы поднимаются (опускаются) с помощью указанной выше билинейной формы κ^{ij} , $\kappa_{ij} \kappa^{jk} = \delta_i^k$.

В континуальном пределе дискретные индексы $1, \dots, n_l$ превращаются в континуальные $s_l \in [0, 2\pi)$, и мы получаем

$$U[\tilde{\Sigma}(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_L)]_{j_1^{(1)} \dots j_{n_1}^{(1)} | j_1^{(2)} \dots j_{n_2}^{(2)} | \dots | j_1^{(L)} \dots j_{n_L}^{(L)}} \longrightarrow U[\Sigma(\gamma_1, \dots, \gamma_L)]_{j^{(1)}(s_1) | j^{(2)}(s_2) | \dots | j^{(L)}(s_L)}, \quad (6)$$

где $\hat{U}(\Sigma) : V^\infty(1) \otimes \dots \otimes V^\infty(L) \rightarrow \mathbb{C}$. Здесь $j^{(l)}(s_l)$ – цветовой индекс, соответствующий непрерывному числу точек, занумерованных с помощью s_l – параметризации l -й петли γ_l . Выражение (6) не является столь незнакомым для специалистов по теории струн, как это могло бы показаться с первого взгляда. Действительно, если мы заменим $j^{(l)}(s_l)$ на $x^{(l)}(s_l)$, то можно рассматривать $U[\Sigma(\gamma_1, \dots, \gamma_L)]$ как нечто подобное струнной амплитуде, концевые петли γ которой отображаются посредством $x(s)$. Этот вопрос рассматривается в разделе 5.

Рис. 6. Фрагмент $\tilde{\Sigma}(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_L)$. Для каждого треугольника, изображенного на этом рисунке, имеется матрица U с тремя индексами и выполняется суммирование по индексам, соответствующим внутренним ребрам графа.

Используя поверхностную экспоненту (4), можно записать явное выражение для упорядоченной по поверхности экспоненты (5), (6), обозначаемый символом AE . Например, в случае диска D получаем

$$\begin{aligned}
 U_{j(s)}(D, \hat{B}) &= \left(AE_{g,I,\kappa}^{\int_D \hat{B}_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \right)_{j(s)} \equiv \sum_{F=0}^{\infty} \frac{1}{F!} I_{j(s)|j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}^g \times \\
 &\quad \times \int_D B_{\mu_1 \nu_1}^{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} dx_{\mu_1} dx_{\nu_1} \dots \int_D B_{\mu_F \nu_F}^{j_1^{(F)} j_2^{(F)} j_3^{(F)}} dx_{\mu_F} dx_{\nu_F} = \\
 &= \left(E_{g,I,\kappa}^{\int_D \hat{B}_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \right)_{j(s)}, \tag{7}
 \end{aligned}$$

где s – параметризация границы, а $j(s)$ – индекс-функция на границе ∂D . Это соотношение выполнено вследствие свойств симметрии матриц $I_{j(s)|j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}$. Эти свойства обсуждаются ниже формулы (3). В результате такое упорядочение по поверхности оказывается достаточно тривиальным, поскольку нет необходимости ничего упорядочивать. Действительно, легко изменить порядок интегралов по B в равенстве (7). Это должно быть общим свойством всех экспонент “высших размерностей” (для многоиндексных матриц) в силу тривиальности соответствующих гомотопических групп. Откровенно говоря, мы не уверены, можно ли сделать произведение I_{ijk} , приводящее к $I_{j(s)|\dots}^g$ с непрерывными индексами, совершенно осмысленным в случае, когда j принимает дискретные значения. Этот вопрос требует отдельного тщательного исследования.

Поясним этот важный вопрос. В случае одномерного упорядочения для одной формы калибровочного поля порядок важен по следующей причине. Если из от-

крытой кривой, вдоль которой проведено упорядочение, выбросить точку (т.е. поместить в точку локальную наблюдаемую), то эта кривая станет несвязной. Поэтому важно, что́ лежит слева, а что справа от рассматриваемой точки. С другой стороны, в случае двумерного упорядочения выбрасывания точки недостаточно для того, чтобы сделать поверхность несвязной, и поэтому порядок не важен. В результате нет коммутаторов локальных полей, которые описывают двумерные упорядочения по поверхности. Мы еще вернемся к этому вопросу в конце раздела 4.

Однако коммутативная природа упорядочения по поверхности не означает, что мы получили нечто тривиальное! Действительно, если мы рассмотрим поверхность Σ с одной выделенной точкой x и двумя внешними ребрами в этой точке, соответствующая матрица $U(\Sigma_x)_{ij}$ (или $U(\Sigma_x)_i^j = U(\Sigma_x)_{ik}\kappa^{kj}$) даст нетривиальное отображение (с недиагональной матрицей). Очевидно, что более сложные матрицы $U(\Sigma_{x,y,\dots})_{ijm\dots}^{kl\dots}$ дают вполне нетривиальные нелинейные отображения. Некоторым образом, соответствующие объекты включают в себя взаимодействия, поскольку B -поле и, в особенности, фон $\hat{I}$ задают нелинейные отображения $(\hat{B}, \hat{I}: V^3 \rightarrow \mathbb{C})$. В результате матрицы U задают нетривиальные нелинейные отображения между концевыми петлями соответствующих поверхностей.

Во всяком случае, мы полагаем, что этот весьма важный факт предстоит еще как следует осознать, для того чтобы установить связь обсуждаемого здесь предмета со струнной теорией поля и со стандартной теорией расслоений. Отметим, что в работе [5] мы описали, как построить модифицированную поверхностную экспоненту, которая удовлетворяет менее тривиальным соотношениям, и мы полагаем, что поверхностная экспонента может возникать в приложениях в указанной форме.

3. СУЩЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ЭКСПОНЕНТЫ

3.1. Дифференциальное уравнение для экспоненты. Выведем дифференциальное уравнение для поверхностной экспоненты. Для этого вспомним, что экспонента квадратной матрицы A_i^j обладает следующим основным свойством (которое лежит в основе теории вероятностей и всех эволюционных явлений):

$$(e^{t_1 \hat{A}})_i^j (e^{t_2 \hat{A}})_j^k = (e^{(t_1+t_2) \hat{A}})_i^k \quad (8)$$

для любых двух чисел t_1 и t_2 . Это уравнение однозначно определяет экспоненту: из него можно вывести соответствующее дифференциальное уравнение. Выберем $t_1 = t$ и $t_2 = dt \ll t$. Тогда, разлагая обе части уравнения (8) по dt , получим

$$\frac{d}{dt}(e^{t \hat{A}})_i^j = A_i^k (e^{t \hat{A}})_k^j. \quad (9)$$

Поверхностная экспонента может иметь любое число внешних индексов, а не только нуль или два, как экспонента квадратной матрицы. В результате она удовлетворяет многим различным тождествам, вытекающим из условий независимости от триан-

Рис. 7. Основное условие для поверхностной экспоненты на примере триангуляционных графов.

гуляции. При этом все эти условия следуют из одного основного условия³⁾:

$$(E_{I,\kappa}^{t_1 \hat{B}})^{k_1}_{j_1 j_2} (E_{I,\kappa}^{t_2 \hat{B}})_{j_3 j_4 k_1} = (E_{I,\kappa}^{(t_1+t_2) \hat{B}})_{j_1 j_2 j_3 j_4}, \quad (10)$$

которое графически изображено на рис. 7. Однако это уравнение не определяет поверхностную экспоненту однозначно, поскольку матрицы $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$ явно не входят в это уравнение.

Далее, если $t_1 = t$ и $t_2 = dt \ll t$, то можно получить дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} (E_{I,\kappa}^{t \hat{B}})^{k_1}_{j_1 j_2} I_{j_3 j_4 k_1} = (E_{I,\kappa}^{t \hat{B}})^{k_1}_{j_1 j_2} B_{j_3 j_4 k_1}, \quad (11)$$

которое однозначно фиксирует экспоненту при специальном выборе матриц $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$, потому что теперь они явно входят в уравнение.

Аналогичным образом можно записать вариационное уравнение для упорядоченной по поверхности экспоненты (7)

$$\frac{\delta^2}{\delta \sigma_{\mu\nu}^2(s)} \left(E_{g,I,\kappa}^{\int_D \hat{B}_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \right)_{\dots j_s} I_s^{j_s k l} = \left(E_{g,I,\kappa}^{\int_D \hat{B}_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \right)_{\dots j_s} B_{\mu\nu}^{j_s k l}[x(s)], \quad (12)$$

где $\delta^2/\delta \sigma_{\mu\nu}^2(s)$ – стандартная вариация по отношению к добавлению небольшой площади $(\Delta \sigma^{\mu\nu})$ к диску D , а j_s означает отдельный индекс j в точке s .

3.2. Новый способ экспоненцирования квадратных матриц и связь с поверхностной экспонентой. К нестандартному способу экспоненцирования квадратных матриц нас подтолкнуло исследование поверхностной экспоненты. В вершинах графов в уравнении (1) можно на самом деле поместить матрицу I_{ijk} , а не $I_{ijk} + B_{ijk}/M$, склеив при этом ее индексы с помощью $\kappa^{ij} + B^{ij}/W$, а не с помощью κ^{ij} , тогда

$$\text{Tr}(\tilde{E}_{g,I,\kappa}^{\hat{B}}) \equiv \lim_{W \rightarrow \infty} \prod_{\text{graph}(g)}^W \left(\hat{\kappa} + \frac{\hat{B}}{W} \right), \quad (13)$$

³⁾ Отметим, что, согласно обсуждению в конце раздела 2, на самом деле, имеет место соотношение $(E_{I,\kappa}^{\hat{B}_1})^{k_1}_{j_1 j_2} (E_{I,\kappa}^{\hat{B}_2})_{j_3 j_4 k_1} = (E_{I,\kappa}^{\hat{B}_1 + \hat{B}_2})_{j_1 j_2 j_3 j_4}$ для любых кубических матриц $\hat{B}_1$ и $\hat{B}_2$.

где индекс произведения “graph” указывает на трехвалентный замкнутый граф рода g (с W ребрами) того же типа, что и в (1). В свете предыдущих рассуждений предел (13) не зависит от выбора последовательности графов. Результат взятия предела имеет вид

$$\mathrm{Tr}(\tilde{E}_{g,I,\kappa}^{\hat{B}}) = \sum_{F=0}^{\infty} \frac{1}{F!} B^{j_1^{(1)} j_2^{(1)}} \dots B^{j_1^{(F)} j_2^{(F)}} I_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} | \dots | j_1^{(F)} j_2^{(F)}}^g, \quad (14)$$

где $I_{j_1^{(1)} j_2^{(1)} | \dots | j_1^{(F)} j_2^{(F)}}^g$ – матрица с $2F$ индексами, полученная перемножением матриц I_{ijk} по любому ориентированному графу с g ручками, F дырками и двумя внешними ребрами для каждой дырки. Аналогично можно определить экспоненты с любым распределением индексов.

Теперь покажем, что эта экспонента эквивалентна исходной. Действительно, легко видеть, что

$$\lim_{W \rightarrow \infty} \prod_{\mathrm{graph}(g)}^W \left(\hat{\kappa} + \frac{\hat{B}}{W} \right) = \lim_{W \rightarrow \infty} \prod_{\mathrm{graph}(g)}^W \left(\hat{\kappa} + \frac{\hat{B}}{2W} \right)^2 = \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{\mathrm{graph}(g)}^M \left(1 + \frac{\hat{B}}{3M} \right)^3 \hat{I}, \quad (15)$$

где M – число вершин того же графа (заметим, что $2W = 3M$ для трехвалентных графов). В последнем выражении в формуле (15) мы поместили в вершины следующую матрицу:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\hat{B}}{3M} \right)^3 \hat{I} &\equiv \left\| \left(1 + \frac{B}{3M} \right)_i^{i'} \left(1 + \frac{B}{3M} \right)_j^{j'} \left(1 + \frac{B}{3M} \right)_k^{k'} I_{i'j'k'} \right\| = \\ &= \left\| I_{ijk} + \frac{B_i^{i'}}{3M} I_{i'jk} + \frac{B_j^{j'}}{3M} I_{ij'k} + \frac{B_k^{k'}}{3M} I_{ijk'} + O\left(\frac{1}{M^2}\right) \right\|. \end{aligned} \quad (16)$$

Индексы в этом выражении поднимаются с помощью κ^{ij} . Мы также пользуемся в (15) и (16) тем фактом, что $\kappa_{ij} \kappa^{jk} = \delta_i^k$. В пределе $M \rightarrow \infty$ члены порядка $O(1/M^2)$ в (16) исчезают, и мы получаем связь

$$\tilde{B}_{ijk} = \frac{B_i^{i'}}{3} I_{i'jk} + \frac{B_j^{j'}}{3} I_{ij'k} + \frac{B_k^{k'}}{3} I_{ijk'} \quad (17)$$

между кубическими и квадратными матрицами, для которых имеет место равенство

$$\tilde{E}_{g,I,\kappa}^{\hat{B}} = E_{g,I,\kappa}^{\hat{\hat{B}}}. \quad (18)$$

Таким образом, мы имеем по существу единственную “двумерную” экспоненту. Стоит отметить, что все существенные свойства поверхностной экспоненты являются следствием того, что именно фон I_{ijk} , а не входящая в экспоненту матрица B_{ijk} несет три цветовых индекса. Как бы то ни было, мы используем новый способ экспоненцирования квадратной матрицы в разделе 4.

3.3. На пути к представлению экспоненты через матричную модель.

В этом пункте мы обсудим наши попытки представления поверхностной экспоненты с помощью матричного интеграла. Действительно, упомянутые выше матрицы $I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}$ являются двумерными топологическими инвариантами в смысле, обсуждавшемся, например, в работе [4]. Это следует из условий (2), наложенных на матрицы $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$: матрица $I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}$ зависит только от топологии дискретизованной римановой поверхности⁴⁾, но не от ее конкретной триангуляции.

Мы намерены записать явное представление для этой матрицы с помощью корреляционной функции в двумерной топологической теории. Для этого рассмотрим матричный интеграл, являющийся обобщением интеграла из работы [6]:

$$Z(K, N, \kappa, I) = \int \prod_{i=1}^N d\hat{\Phi}^i \exp \left\{ -K \operatorname{Tr} \left[\hat{\Phi}^i \hat{\Lambda} \hat{\Phi}^j \kappa_{ij} + \frac{i}{3} I_{ijk} \hat{\Phi}^i \hat{\Phi}^j \hat{\Phi}^k \right] \right\}. \quad (19)$$

Здесь и далее мы полагаем $\hat{\Lambda} = 1$. Интеграл берется по эрмитовым матрицам $\hat{\Phi}_i = \|\Phi_i^{ab}\|$, где $i = 1, \dots, N$ и $a = 1, \dots, K$. Разлагая этот интеграл в ряд Тейлора по степеням матрицы I_{ijk} и используя расщепление корреляций для гауссова интеграла (обычно называемое теоремой Вика), получим выражения для вкладов в интеграл в виде фейнмановских диаграмм. Легко видеть, что

$$\left. \frac{\partial \chi(g)}{\partial K \chi(g)} Z(K, N, \kappa, I) \right|_{K=0} \propto I^g, \quad g \geq 1, \quad (20)$$

поскольку, беря эту производную, мы отбираем трехвалентный замкнутый граф рода g (фейнмановскую диаграмму) с матрицей I_{ijk} в вершинах и с “пропагатором” κ^{ij} ($\kappa^{ij} \kappa_{jk} = \delta_k^i$) на ребрах. Заметим, что интеграл (19) сходится и вычисляется явно:

$$\ln Z(K, N, \kappa, I) = \sum_{g=0}^{\infty} C_g K^{\chi(g)} I^g, \quad (21)$$

где C_g – некий комбинаторный коэффициент, задающий (с переменными знаками) количество трехвалентных связных графов для данного g .

Представляется, что рассмотрение вклада в корреляционную функцию, соответствующего g ручкам,

$$\int \prod_{i=1}^N d\hat{\Phi}^i : \hat{\Phi}_{j_3^{(1)}} \hat{\Phi}_{j_2^{(1)}} \hat{\Phi}_{j_1^{(1)}} : \dots : \hat{\Phi}_{j_3^{(F)}} \hat{\Phi}_{j_2^{(F)}} \hat{\Phi}_{j_1^{(F)}} : \exp \left\{ -K \operatorname{Tr} \left[\hat{\Phi}^i \hat{\Phi}^j \kappa_{ij} + \frac{i}{3} I_{ijk} \hat{\Phi}^i \hat{\Phi}^j \hat{\Phi}^k \right] \right\} \quad (22)$$

⁴⁾Под “топологией” мы в данном случае подразумеваем заданное число ручек g , число дырок L и распределение внешних ребер по дыркам.

даст желаемую матрицу $I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}^g$, если те $\widehat{\Phi}$, которые стоят внутри “нормального упорядочения” : $\Phi\Phi\Phi$:, не подвергать сверткам по теореме Вика. Действительно, данная корреляционная функция дает двумерный топологический инвариант в смысле, указанном в работе [4]. Однако этот топологический инвариант не совпадает с $I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}^g$, потому что невозможно отделить контактные члены от желаемых: наряду с матрицей $I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | j_3^{(2)} j_2^{(2)} j_1^{(2)}}^g$ результат вычисления вклада рода g в равенство (22) (при $F = 2$) содержит вклад типа $I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_2^{(2)} j_1^{(2)}}^g \cdot \kappa_{j_1^{(1)} j_3^{(2)}}$ (вклад контактных членов).

На данном этапе мы не знаем, как разделить эти два типа вкладов в корреляционные функции (22). Однако мы хотели бы найти способ это сделать, поскольку тем самым была бы установлена более тесная связь наших рассуждений со струнной теорией поля.

4. ТЕОРИЯ НЕАБЕЛЕВЫХ ДВА-ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

В этом разделе мы обсудим калибровочные преобразования и кривизну для два-тензорной калибровочной связности. Чтобы объяснить идею нашей аргументации и ввести обозначения, приведем здесь вывод калибровочного преобразования и кривизны для обыкновенного калибровочного поля. Рассмотрим матрицу голономии

$$\widehat{U}(x, \Delta x) = e^{i\hat{A}_\mu(x)\Delta x^\mu}$$

с малым Δx . При вращениях в слоях эта матрица преобразуется в

$$\widehat{\tilde{U}}(x, \Delta x) = \hat{g}^{-1}(x)\widehat{U}(x, \Delta x)\hat{g}(x + \Delta x).$$

Разлагая обе части этого выражения по степеням Δx , получим

$$\hat{\tilde{A}}_\mu(x) = \hat{g}^{-1}(x)[\partial_\mu + i\hat{A}_\mu(x)]\hat{g}(x),$$

что является калибровочным преобразованием для калибровочного поля.

Рассматривая также матрицу голономии для малой квадратной петли и разлагая по степеням ее размера, получим

$$\widehat{U}(x, \Delta x^\mu)\widehat{U}(x + \Delta x^\mu, \Delta x^\nu)\widehat{U}^+(x + \Delta x^\nu, \Delta x^\mu)\widehat{U}^+(x, \Delta x^\nu) = 1 + i\widehat{F}_{\mu\nu}\Delta x^\mu\Delta x^\nu + \dots, \quad (23)$$

где $\widehat{F}_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}\hat{A}_{\nu]} - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]$.

Очевидно, что для два-формы калибровочной связности ситуация будет аналогичной, если мы заменим линейную голономию для квадратных матриц поверхностной голономией для кубических. Например, кажется естественным постулировать следующее преобразование для упорядоченной по поверхности экспоненты в случае диска D :

$$\left(E_{I,\kappa}^{\int_D \widehat{\tilde{B}}_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}\right)_{j(s)} = \left(E_{I,\kappa}^{\int_D \widehat{B}_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu}\right)_{k(s)} \left(e^{i \oint_{\partial D} \dot{x}^\mu \hat{A}_\mu ds}\right)_{j(s)}^{k(s)}, \quad (24)$$

Рис. 8. Топология диска с четырьмя внешними ребрами.

где s – параметризация границы, а $j(s)$ и $k(s)$ – индекс-функции на границе ∂D . Здесь

$$\left(e^{i \oint_{\partial D} \dot{x}^\mu \hat{A}_\mu ds} \right)_{j(s)}^{k(s)} = \lim_{|\Delta x| \rightarrow 0, L \rightarrow \infty} \prod_{a=1}^L (e^{i \hat{A}_\mu(x_a) \Delta x^\mu})_{j_a}^{k_a} \quad (25)$$

– некоторая звездчатая линия: “вильсоновская линия” со всеми свободными (без сверток) индексами для всех $\hat{A}$ для каждого $s \in [0, 2\pi)$. Экспонента здесь является просто стандартной экспонентой для квадратных матриц.

Однако B -поле таким способом преобразоваться не может. Действительно, рассмотрим следующее преобразование для малого квадрата с четырьмя внешними индексами (рис. 8):

$$\begin{aligned} (E_{I,\kappa}^{\hat{B}_{\mu\nu}[x]\Delta x^\mu \Delta x^\nu})_{k_1 k_2 n} (E_{I,\kappa}^{\hat{B}_{\mu\nu}[x]\Delta x^\mu \Delta x^\nu})_{k_3 k_4}^n &= (E_{I,\kappa}^{\hat{B}_{\mu\nu}[x]\Delta x^\mu \Delta x^\nu})_{j_1 j_2 n} \times \\ &\times (E_{I,\kappa}^{\hat{B}_{\mu\nu}[x]\Delta x^\mu \Delta x^\nu})_{j_3 j_4}^n (e^{i \hat{A}_\mu \Delta x^\mu})_{k_1}^{j_1} (e^{i \hat{A}_\nu \Delta x^\nu})_{k_2}^{j_2} (e^{-i \hat{A}_\mu \Delta x^\mu})_{k_3}^{j_3} (e^{-i \hat{A}_\nu \Delta x^\nu})_{k_4}^{j_4}. \end{aligned} \quad (26)$$

Разлагая это выражение по степеням Δx , получим

$$\begin{aligned} 2I_{k_1 k_2 k_3 k_4 | m_3 m_2 m_1} \tilde{B}_{\mu\nu}^{m_1 m_2 m_3} \Delta x^\mu \Delta x^\nu &= 2I_{k_1 k_2 k_3 k_4 | m_3 m_2 m_1} B_{\mu\nu}^{m_1 m_2 m_3} \Delta x^\mu \Delta x^\nu + \\ &+ iI_{j_1 j_2 j_3 j_4} [(A_\mu \Delta x^\mu)_{k_1}^{j_1} \delta_{k_2}^{j_2} \delta_{k_3}^{j_3} \delta_{k_4}^{j_4} - \delta_{k_1}^{j_1} \delta_{k_2}^{j_2} (A_\mu \Delta x^\mu)_{k_3}^{j_3} \delta_{k_4}^{j_4}] + \\ &+ iI_{j_1 j_2 j_3 j_4} [\delta_{k_1}^{j_1} (A_\nu \Delta x^\nu)_{k_2}^{j_2} \delta_{k_3}^{j_3} \delta_{k_4}^{j_4} - \delta_{k_1}^{j_1} \delta_{k_2}^{j_2} \delta_{k_3}^{j_3} (A_\nu \Delta x^\nu)_{k_4}^{j_4}] + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь мы не выписали высшие члены по A , поскольку они не влияют на тот факт, что не существует способа преобразовать B -поле таким образом, чтобы компенсировать линейные по Δx члены.

Предположим тогда, что упорядоченная по поверхности экспонента преобразуется при помощи поверхностной экспоненты:

$$\left(E_{I,\kappa}^{\int_D \hat{B}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \right)_{j(s)} = \left(E_{I,\kappa}^{\int_D \hat{B}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \right)_{k(s)} \left(\tilde{E}_{I,\kappa}^{i \oint_{\partial D} \dot{x}^\mu \hat{A}_\mu ds} \right)_{j(s)}^{k(s)}, \quad (28)$$

где мы полагаем более естественным интегрировать квадратную (а не кубическую) матрицу $\hat{A}_\mu = \|A_\mu^{ab}\|$ по границе диска ∂D и поэтому используем экспоненту, определенную в п. 3.2.

Рис. 9. Матрица голономии для куба определяет кривизну B -поля.

Если мы теперь возьмем диск, как на рис. 8, и разложим обе части соответствующего выражения (аналогично (26)) по степеням Δx , то получим, что все линейные члены (как и в (27)) сокращаются и никакие другие опасные члены не появляются. В результате B -поле преобразуется по правилу

$$\tilde{B}_{\mu\nu}^{ijk} = B_{\mu\nu}^{ijk} + i \frac{\partial_{[\mu} A_{\nu]}^i}{3} I^{ljk} + i \frac{\partial_{[\mu} A_{\nu]}^j}{3} I^{ilk} + i \frac{\partial_{[\mu} A_{\nu]}^k}{3} I^{ijl}, \quad (29)$$

т.е. как набор абелевых струнных B -полей для каждой группы индексов i, j, k . Для нас это не выглядит неожиданным, коль скоро мы ранее осмыслили основные свойства поверхностной экспоненты, обсуждавшиеся в конце раздела 2.

Мы можем также вычислить кривизну “неабелева” B -поля. Для этого надо рассмотреть небольшую замкнутую поверхность, имеющую геометрию куба (рис. 9). Тогда соответствующую матрицу голономии можно разложить:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} [\hat{U}(x, \Delta x^\mu \Delta x^\nu) \hat{U}(x + \Delta x^\nu, \Delta x^\mu \Delta x^\alpha) \hat{U}(x, \Delta x^\nu \Delta x^\alpha) \times \\ & \quad \times \hat{U}^{-1}(x, \Delta x^\nu \Delta x^\mu) \hat{U}^{-1}(x + \Delta x^\mu, \Delta x^\alpha \Delta x^\nu) \hat{U}^{-1}(x + \Delta x^\alpha, \Delta x^\nu \Delta x^\alpha)] = \\ & = N + I_{ijk} \partial_{[\mu} B_{\nu\alpha]}^{kji} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \Delta x^\alpha + \dots, \end{aligned} \quad (30)$$

где каждая из матриц $\hat{U}$ соответствует прямоугольнику и представляет собой произведение его треугольных составляющих:

$$U_{j_1 j_2 j_3 j_4}(x, \Delta x^\mu \Delta x^\nu) = (E_{I, \kappa}^{\hat{B}_{\mu\nu}[x] \Delta x^\mu \Delta x^\nu})_{j_1 j_2 n} (E_{I, \kappa}^{\hat{B}_{\mu\nu}[x] \Delta x^\mu \Delta x^\nu})_{j_3 j_4}^n. \quad (31)$$

Таким образом, мы получаем кривизну для два-тензорного поля в виде

$$F_{\mu\nu\alpha}^{ijk} = \partial_{[\mu} B_{\nu\alpha]}^{ijk}. \quad (32)$$

В результате соответствующая локальная теория поля оказывается свободной. Это тоже не является для нас неожиданностью. Некоторым образом, коль скоро мы

рассматриваем локальные поля как нелинейные переменные ($\hat{B}: V^3 \rightarrow \mathbb{C}$), теория для них становится линейной! Однако, как мы уже отмечали, двумерные матрицы голономии

$$\left(E_{I,\kappa}^{\int \hat{B}_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu} \right) \dots$$

включают взаимодействия из-за нелинейной природы B -поля и особенно фона $\hat{I}$. Стоит заметить, что в работе [7] два-тензорное поле рассматривалось как поле, несущее два цветовых индекса, т.е. как линейное поле ($B_{\mu\nu}^{ij} \Delta x^\mu \Delta x^\nu: V \rightarrow V$). Тогда, для того чтобы получить независимое от триангуляции упорядочение по поверхности с помощью стандартной экспоненты, приходилось также включать один-форму калибровочного поля (A). В результате теория для такой пары полей (B, A) становится взаимодействующей из-за присутствия коммутаторов.

Поясним эти наблюдения. Вся идея поверхностной экспоненты и независимого от триангуляции упорядочения по поверхности была предложена именно для того, чтобы получить локальное описание теории неабелевых два-тензорных полей⁵⁾. Однако для локальных полей все становится коммутативным, если мы снабдим их (и особенно фон $\hat{I}$) тремя цветовыми индексами. В результате в этом случае, как мы отмечали в конце раздела 2, коммутаторы отсутствуют. А раз нет коммутаторов, то нет взаимодействий!

Представляется, что для получения нетривиального упорядочения необходимо удалить с поверхности линию. Соответствующая линейная наблюдаемая может быть чувствительной к нетривиальному упорядочению. Однако такая нелокальная наблюдаемая должна быть построена только из локального B -поля. В результате нелокальная теория может быть некоммутативной, но теория для локальных полей коммутативна [5]. Таким образом, на этом этапе проблема заключается не в том, что мы не знаем, как записать взаимодействующую локальную теорию для неабелевых два-тензорных полей, а в том, что мы даже не знаем природы их возможных взаимодействий. Что тут можно сказать? Вероятно, такова просто природа вещей, и мы должны радоваться, что дела обстоят именно так, потому что нелинейные поля свободны и с ними легко работать! Вопрос состоит в том, можно ли построить нечто нетривиальное с помощью таких свободных полей. Мы обсудим это прямо сейчас.

5. ПЛАНЫ НА БУДУЩЕЕ

5.1. Связь с уравнением Янга–Бакстера. В этом разделе мы покажем, что существует интересная связь между проведенными выше рассмотрениями и уравнениями Янга–Бакстера в теории интегрируемых решеточных моделей. Эта связь состоит в следующем (см., например, [8]). Рассмотрим поверхностную матрицу голономии для куба (рис. 9). Согласно условию нулевой кривизны матрица голономии для куба тривиальна:

$$\begin{aligned} & \hat{U}(x, \Delta x^\mu \Delta x^\nu) \hat{U}(x + \Delta x^\nu, \Delta x^\mu \Delta x^\alpha) \hat{U}(x, \Delta x^\nu \Delta x^\alpha) \times \\ & \times \hat{U}^{-1}(x, \Delta x^\nu \Delta x^\mu) \hat{U}^{-1}(x + \Delta x^\mu, \Delta x^\alpha \Delta x^\nu) \hat{U}^{-1}(x + \Delta x^\alpha, \Delta x^\nu \Delta x^\alpha) = 1. \end{aligned} \quad (33)$$

⁵⁾Под “неабелевыми” мы понимаем просто поля, несущие цветовые индексы.

Это уравнение представляет собой в точности уравнение Янга–Бакстера, причем $U_{j_1 j_2 j_3 j_4}(x, \Delta x^\mu \Delta x^\nu)$ из формулы (30) играет в нем роль R -матрицы.

В этом контексте интересно выяснить, можно ли классифицировать все возможные R -матрицы в соответствии со всеми возможными выборами $(E_{I,\kappa}^{\hat{B}})_{j_1 j_2 j_3 j_4}$. Здесь нам хотелось бы вспомнить о звездно-треугольном уравнении (которое как раз в духе рассмотрений нашей работы) и его связи с уравнением Янга–Бакстера (см., например, [9]).

Кроме всего прочего, эти рассуждения важны для установления гамильтонова формализма для многомерной эволюции. Этому вопросу посвящен следующий пункт.

5.2. Связь со струнной теорией поля. Рассмотрим случай, когда объемлющим пространством X является просто $\mathbb{R}^D$. Возьмем также $V = \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Тогда индексы i, j и k принимают непрерывные значения, и мы полагаем их равными x, y и z – координатам на X . Возьмем за базу нашего расслоения мировой лист (пространство σ и τ), а не объемлющее пространство X . Тогда поле $B_{\mu\nu}$ в точности представляет собой плотность $\hat{B}_{\sigma\tau}(\sigma, \tau) = \hat{B}(\sigma, \tau)$ с тремя цветовыми индексами: $\hat{B}: \mathcal{H}^3 \rightarrow \mathbb{C}$.

В результате наблюдаемые в теории имеют вид

$$\begin{aligned} U[\Sigma(\gamma_1, \dots, \gamma_L)]_{x^{(1)}(s_1) | x^{(2)}(s_2) | \dots | x^{(n)}(s_n)}^{y^{(1)}(t_1) | y^{(2)}(t_2) | \dots | y^{(m)}(t_m)} = \\ = \langle y^{(1)}(t_1) | \langle y^{(2)}(t_2) | \dots \langle y^{(m)}(t_m) | E_{g,I,\kappa}^{-\int_{\Sigma} \hat{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau} | x^{(1)}(s_1) \rangle | x^{(2)}(s_2) \rangle \dots | x^{(n)}(s_n) \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь $|x(s)\rangle = \prod_s |x_s\rangle$, а $|x_s\rangle$ – стандартное когерентное состояние в квантовой механике. Наблюдаемые (34) при правильном выборе $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$ и $\hat{B}(\sigma, \tau)$ представляют собой амплитуды взаимодействующей теории струн. Такая ситуация много лучше, чем ситуация с гамильтоновым квантованием в стандартной струнной теории поля [10], где исходной точкой является амплитуда свободной теории струн:

$$U(\text{цилиндр}) = \langle x(\sigma) | e^{-HT} | y(\sigma) \rangle, \quad \text{где} \quad H = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\delta^2}{\delta x^2(\sigma)} + \frac{[\partial_\sigma x(\sigma)]^2}{2\pi} \right) d\sigma. \quad (35)$$

Только после этого в рассмотрение включают взаимодействия в виде пертурбативного разложения по кубическому взаимодействию над квадратичным фоном⁶⁾. Такой формализм страдает, помимо всего прочего, хорошо известной зависимостью от фона. Мы видим, однако, что подобная проблема не возникает в нашем формализме, характерной особенностью которого является кубичность, т.е. его не нужно разлагать над квадратичной частью! Чтобы сделать это утверждение полностью строгим, следует явно установить, что имеет место следующее соотношение:

$$\langle x(\sigma) | E_{I,\kappa}^{-\int_{\Sigma} \hat{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau} | y(\sigma) \rangle = \langle x(\sigma) | e^{-HT} | y(\sigma) \rangle. \quad (36)$$

⁶⁾ На этом этапе мы не обращаем внимания на связи и духи.

Другими словами, в данном уравнении для заданного H требуется найти явные значения $\hat{I}$, $\hat{\kappa}$ и $\hat{B}(\sigma, \tau)$ при произвольном выборе $x(\sigma)$ и $y(\sigma)$. Этому будет посвящена отдельная публикация.

Стоит отметить, что анализ, проведенный в этом пункте, вместе с рассуждениями, проведенными в п. 3.3, вплотную подводят нас к проблеме симплициальной струны и открытой/замкнутой струнной дуальности в духе работ [11]. Кроме того, мы считаем, что эти рассуждения прояснят наши представления о природе интегрируемости теории Янга–Миллса при больших N_c [12].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили локальное теоретико-полевое описание неабелевых два-тензорных полей. Вследствие тривиальности соответствующих групп гомотопии в размерностях выше единицы не имеется коммутаторных членов для локальных два-тензорных полей. Раз нет коммутаторов, то нет и взаимодействий, т.е. мы получаем свободную теорию поля для локальных неабелевых два-тензорных полей (мы называем их неабелевыми, поскольку они несут цветовые индексы). Однако это не означает, что теория этих полей не имеет никакого нетривиального содержания. В действительности, поскольку фон I_{ijk} и поле $B_{\mu\nu}^{ijk}$ несут три цветовых индекса, двумерные матрицы голономии в этой теории описывают нетривиальные отображения между слоями расслоений над пространствами петель.

Вследствие последнего из перечисленных фактов, мы находим многообещающую связь наших построений с независимой от фона формулировкой струнной теории поля. В то же время наша теория связана с R -матрицей и интегрируемостью в решеточных моделях. Все вместе эти наблюдения образуют узел, который предстоит распутать для лучшего понимания всех перечисленных в работе вопросов.

Помимо остальных перспективных направлений, перечисленных в основном тексте статьи, нам хотелось бы привлечь внимание к еще одной важной задаче: поиску редукции неабелевых два-тензорных полей к неабелевым калибровочным полям (один-формам). Если поверхность, по которой проведено упорядочение, имеет цилиндрическую топологию, то ее можно стянуть в кривую в объемлющем пространстве. В этом случае можно надеяться каким-то образом воспроизвести способ упорядочения один-формы калибровочного поля вдоль кривой. Однако эта задача является гораздо более сложной по сравнению с рассмотренной в п. 5.2. Действительно, если мы имеем дело с один-формой калибровочного поля A_μ , $\mu = 1, \dots, D$, при $D \geq 2$, то упорядочение вдоль кривой является нетривиальным, и вопрос заключается в том, как воспроизвести такое упорядочение из тривиального для два-тензорных полей. Это также является предметом отдельной работы.

Благодарности. Автор выражает благодарность У. Шрайберу, Т. Тада, Т. Пиллингу, Н. Амбургу, Д. Васильеву, А. Лосеву, А. Рослому и особенно А. Герасимову, Г. Шарыгину, В. Долотину, С. Локтеву и А. Морозову за ценные обсуждения. Автор также благодарит Т. Тада и Ю. Ишимото за теплый прием в RIKEN, Токио, где эта работа была закончена. Данная работа выполнена при частичной финансовой под-

держке РФФИ (грант № 04-01-00646), INTAS (грант № 03-51-5460), а также гранта Президента РФ № МК-2097.2004.2.

Список литературы

- [1] J. Baez, U. Schreiber, *Higher gauge theory: 2-connections on 2-bundles*, **hep-th/0412325**;
J. C. Baez, A. S. Crans, D. Stevenson, U. Schreiber, *From loop groups to 2-groups*,
math.qa/0504123.
- [2] Э. Т. Ахмедов, *ТМФ*, **145**:3 (2005), 321; **hep-th/0503234**.
- [3] E. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **300** (1988), 360.
- [4] M. Fukuma, S. Hosono, H. Kawai, *Commun. Math. Phys.*, **161** (1994), 157;
hep-th/9212154.
- [5] E. T. Akhmedov, V. Dolotin, A. Morozov, *Comment on the surface exponential for tensor fields*, **hep-th/0504160**.
- [6] M. Kontsevich, *Commun. Math. Phys.*, **147**:1 (1992).
- [7] V. V. Dolotin, *Groups of flagged homotopies and higher gauge theory*, **math.gt/9904026**.
- [8] T. A. Larsson, *Gerbes, covariant derivatives, p-form lattice gauge theory, and the Yang-Baxter equation*, **math-ph/0205017**.
- [9] A. P. Isaev, *Nucl. Phys. B*, **662** (2003), 461; **hep-th/0303056**.
- [10] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **268** (1986), 253.
- [11] Э. Т. Ахмедов, *Письма в ЖЭТФ*, **80** (2004), 247; **hep-th/0407018**; **81** (2005), 445;
hep-th/0502174; R. Gopakumar, *Phys. Rev. D*, **70** (2004), 025009; **hep-th/0308184**;
2004, 025010; **hep-th/0402063**; *From free fields to AdS. III*, **hep-th/0504229**; D. Gaiotto,
L. Rastelli, *A paradigm of open/closed duality: Liouville D-branes and the Kontsevich model*, **hep-th/0312196**.
- [12] J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **0303** (2003), 013; **hep-th/0212208**.

Поступила в редакцию 6.VI.2005 г.