Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бальдо, В. С. Ольховский, Аналитические свойства S -матрицы для взаимодействий с “хвостами” в виде потенциала Юкавы, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 1, 113–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2027>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:45:07

© 2006 г. М. Бальдо*, В. С. Ольховский†

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА S -МАТРИЦЫ ДЛЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С “ХВОСТАМИ” В ВИДЕ ПОТЕНЦИАЛА ЮКАВЫ

Получено явное аналитическое выражение для S -матрицы при произвольном центральном взаимодействии внутри сферы конечного радиуса для “хвоста” в виде потенциала Юкавы на больших расстояниях. Метод использует полноту волновых функций вне конечной сферы, а также условия унитарности и симметрии S -матрицы.

Ключевые слова: S -матрица, центрально-симметричное взаимодействие, потенциал Юкавы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время аналитическая структура нерелятивистской одноканальной S -матрицы достаточно хорошо известна для широкого класса сферических взаимодействий (см., например, книги [1], [2] и работы [3]–[5]). По-видимому, только случай взаимодействий с “хвостами” в виде потенциала Юкавы, для которого явные аналитические представления S -матриц неизвестны, представляет собой существенное исключение. Действительно, этот случай характерен для ядерной физики – как для нуклон-нуклонных, так и для нуклон-ядерных взаимодействий. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы на основании метода, развитого в работах [3]–[5], до некоторой степени восполнить этот пробел.

2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ОБЩИЕ СВОЙСТВА S -МАТРИЦЫ

Предположим, что взаимодействие между двумя сталкивающимися частицами вне сферы радиуса a ($a < \infty$) описывается центральным потенциалом Юкавы

$$V = V_0 [(br)^{-1} e^{-br}], \quad V_0 < 0, \quad b^{-1} \sim a, \quad (1)$$

*I.N.F.N., Sezione di Catania, Catania, Italy. E-mail: baldo@ct.infn.it

†Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев, Украина.
E-mail: olkhovsk@kinr.kiev.ua

в то время как внутри сферы оно имеет произвольный вид.

Радиальную волновую функцию рассеяния $R_l^{(+)}$ при граничных условиях, содержащих расходящуюся волну, для l -й парциальной волны и волнового числа k при $r > a$ можно записать в виде

$$R_l^{(+)}(k, r) = \frac{i}{2kr} [f_{l-}(k, r)e^{i\pi/2} - S_l(k)f_{l+}(k, r)e^{-i\pi/2}]. \quad (2)$$

Радиальную волновую функцию R_l^n для связанного состояния в той же области можно записать в виде

$$R_l^n(k_{nl}, r) = (2\pi)^{-1/2} \frac{B_l(k_{nl})f_{l+}(k_{nl}, r)}{r}, \quad (3)$$

где k_{nl} – соответствующее собственное значение, B_l – так называемая постоянная связанного состояния. S -матрица, или, более точно, функция $S_l(k)$ в уравнении (2), удовлетворяет (расширенному) условию унитарности

$$S_l(k)S_l^*(k^*) = 1 \quad (4)$$

и условию симметрии

$$S_l(k)S_l(-k) = 1 \quad (5)$$

(см., например, [1]–[5]). Определения и некоторые свойства функций $f_{l\pm}(k, r)$ представлены в монографии [1]. Вся информация о взаимодействии при $r < a$ содержится в функциях $S_l(k)$, постоянных $B_l(k_{nl})$ и числах k_{nl} .

Рассмотрим аналитические свойства функций $f_{l\pm}(k, r)$ для потенциалов Юкавы (1). Прежде всего, согласно [1] для случая $l = 0$ имеем

$$f_{0\pm}(k, r) = \left[1 + \int_b^\infty S_\pm(b', k) e^{-b'r} db' \right] e^{\pm ikr}, \quad (6)$$

где $S_\pm(b', k)$ – решение уравнения

$$b(b \mp 2ik)S_\pm(b, k) = \rho + \int_b^\infty \rho S_\pm(b', k) db', \quad (7)$$

где $\rho = 2\mu V_0/(\hbar^2 b^3) < 0$, μ – приведенная масса. Решение уравнения (7) можно записать в виде

$$S_\pm(b, k) = \rho \left\{ b(b \mp 2ik) \left[1 \mp \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 \mp \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \right\}, \quad (8)$$

тогда из уравнения (6) получаем

$$f_{0\pm}(k, r) = \left\{ 1 + \rho \left[1 \mp \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 \mp \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \int_b^\infty \frac{e^{-b'r} db'}{b'(b' \mp 2ik)} \right\} e^{\pm ikr}. \quad (6a)$$

В уравнении (8) имеется логарифмическая особенность функции $f_{0\pm}(k, r)$ в точке $k = k_\gamma = ib/2$. Рассмотрим аналитические свойства множителя

$$A_- = \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1}. \quad (9)$$

Легко проверить, что при комплексном значении k , если как $\operatorname{Re} k$, так и $\operatorname{Im} k$ отличны от нуля, множитель A_-^{-1} не имеет нулей, и поэтому A_- не имеет полюсов. Тот же результат получается при вещественных k . Положим далее $k = ix$, где x – вещественное число, и перепишем выражение (9) в виде

$$A_- = \left[1 + \frac{\rho}{2x} \ln \left(1 - \frac{2x}{b} \right) \right]^{-1}.$$

В случае $2x/b > 1$ множитель A_-^{-1} не имеет нулей, поскольку логарифм является комплексным, и поэтому A_- не имеет полюсов. В случае $0 \leq 2x/b < 1$ при $\rho < 0$, как и для дальнедействующей части ядерных сил, множитель A_- снова не имеет полюсов. Наконец, в случае $2x/b \leq 0$ полюсы могут существовать, однако они должны быть расположены в нижней полуплоскости комплексной плоскости k .

В заключение заметим, что множитель A_- не содержит дополнительных сингулярностей в верхней полуплоскости комплексной плоскости k , за исключением точки ветвления при $k_\gamma = ib/2$.

Рассуждения можно распространить на более высокие значения момента импульса $l > 0$. Та же логарифмическая особенность в точке $k = k_\gamma = ib/2$ появляется также и для функции $f_{l-}(k, r)$. Чтобы это показать, можно воспользоваться интегральным уравнением, которое позволяет вычислить функцию $f_{l-}(k, r)$ исходя из функции $f_{0-}(k, r)$:

$$f_{l-}(k, r) = f_{0-}(k, r) + l(l+1) \int_r^\infty G(k; r, r') (r')^{-2} f_{l-}(k, r') dr', \quad (10)$$

где $r > a$ и функция Грина $G(k; r, r')$ имеет вид [1]

$$\begin{aligned} G(k; r, r') &= (2ik)^{-1} [f_{0-}(k, r) f_{0+}(k, r') - f_{0-}(k, r') f_{0+}(k, r)] = \\ &= [f_{0+}(k, 0)]^{-1} [\Phi(k, r) f(k, r') - \Phi(k, r') f(k, r)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку функция $\Phi(k, r)$ всюду регулярна, функция Грина в уравнении (11) не имеет особенностей в точке k . Решение $f_{l-}(k, r)$ уравнения (10) при любом значении l содержит ту же логарифмическую особенность в точке $k_\gamma = ib/2$, что и функция $f_{0-}(k, r)$.

После этих предварительных замечаний рассмотрим аналитическую структуру S -матрицы $S_l(k)$. Для этого используем, как и в работах [3], [5], условие полноты волновых функций в области $r \geq a$. Мы предполагаем, что в этой внешней области сталкивающиеся частицы могут описываться с помощью уравнения Шредингера

только с одним потенциалом Юкавы (возможно, с добавлением потенциала, убывающего быстрее, чем любая экспонента). Поэтому при $r, r' > a$ можно записать

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty k^2 R_l^{(+)}(k, r) R_l^{(+)*}(k, r') dk + \sum_n R_l^{(n)}(k_{nl}, r) R_l^{(n)*}(k_{nl}, r') = r^{-2} \delta(r - r'). \quad (12)$$

Используя хорошо известное свойство [1]

$$f_{l+}^*(k, r) = f_{l-}(k, r), \quad f_{l-}^*(k, r) = f_{l+}(k, r), \quad (13)$$

которое выполняется для вещественных k , и условия (4) и (5), уравнение (12) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r'} \int_C f_{l-}(k, r) f_{l+}(k, r') dk - \frac{(-1)^l}{rr'} \int_C S_l(k) f_{l+}(k, r) f_{l+}(k, r') dk + \\ + \frac{1}{rr'} \sum_n (B_l(k_{nl}))^2 f_{l+}(k_{nl}, r) f_{l+}(k_{nl}, r') = \frac{2\pi \delta(r - r')}{r^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Путь интегрирования C в уравнении (14) проходит вдоль вещественной оси от $-\infty$ до ∞ , кроме окрестности начала координат $k = 0$, где он проходит по полуокружности бесконечно малого радиуса в верхней полуплоскости D^+ . В точке $k = 0$ функции $f_{l\pm}(k, r)$ имеют полюсы порядка l .

Поскольку для выбранного потенциала во внешней области ($r > a$) функции $f_{l\pm}(k, r)$ имеют пределы $e^{\pm ikr}$ при $|k| \rightarrow \infty$ по всем направлениям в комплексной плоскости, можно преобразовать путь интегрирования внутри D^+ к другому пути, состоящему из двух частей: произвольно большой полуокружности, расположенной выше вещественной оси, и набора контуров внутри D^+ , обходящих вокруг всех существующих особенностей, разрезов или полюсов сколь угодно близко к ним. После такого преобразования, используя тождества

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+} f_{l-}(k, r) f_{l+}(k, r') dk = \int_{\Gamma^+} e^{ik(r'-r)} dk = \int_{-\infty}^\infty e^{ik(r'-r)} dk = 2\pi \delta(r - r'), \\ \int_{\Gamma^+} S_l(k) f_{l+}(k, r) f_{l+}(k, r') dk = \int_{\Gamma^+} S_l(k) e^{ik(r'+r)} dk, \end{aligned} \quad (15)$$

получим [5]

$$\begin{aligned} \sum_m \oint_{k_m} f_{l-}(k, r) f_{l+}(k, r') dk + \sum_p \oint_{\gamma_p} f_{l-}(k, r) f_{l+}(k, r') dk - \\ - (-1)^l \sum_s \oint_{k_s} S_l(k) f_{l+}(k, r) f_{l+}(k, r') dk - \\ - (-1)^l \sum_q \oint_{\gamma_q} S_l(k) f_{l+}(k, r) f_{l+}(k, r') dk - \\ - (-1)^l \int_{\Gamma^+} S_l(k) e^{ik(r'+r)} dk + \sum_n (B_l(k_{nl}))^2 f_{l+}(k_{nl}, r) f_{l+}(k_{nl}, r') = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь Γ^+ – бесконечно большая полуокружность, расположенная выше вещественной оси, k_m, k_s обозначают изолированные особенности, а γ_p, γ_q – контуры, которые окружают неизолированные особенности или края разреза в случае точек ветвления. Поскольку функции $f_{l+}(k, r)$ и e^{ikr} независимы как функции r в различных точках $k_{nl}, k_m, k_s, \gamma_p, \gamma_q$ (являющихся особыми точками для функций $f_{l-}(k, r)$ и $S_l(k)$) в D^+ , уравнение (16) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$-(-1)^l \oint_{k_{nl}} S_l(k) f_{l+}(k, r) f_{l+}(k, r') dk = (B_l(k_{nl}))^2 f_{l+}(k_{nl}, r) f_{l+}(k_{nl}, r'), \quad (17)$$

$$(-1)^l \oint_{k_m} S_l(k) f_{l+}(k, r) f_{l+}(k, r') dk = \oint_{k_m} f_{l-}(k, r) f_{l+}(k, r') dk, \quad (18)$$

$$(-1)^l \oint_{\gamma_p} S_l(k) f_{l+}(k, r) f_{l+}(k, r') dk = \oint_{\gamma_p} f_{l-}(k, r) f_{l+}(k, r') dk, \quad (19)$$

$$\int_{\Gamma^+} S_l(k) e^{ik(r'+r)} dk = 0, \quad r, r' \geq a. \quad (20)$$

Согласно теореме о вычетах из уравнения (17) можно заключить, что $S_l(k)$ может иметь в D^+ полюсы первого порядка, соответствующие связанным состояниям, с вычетами, равными $(-1)^{l+1} i (2\pi)^{-1} (B_{nl})^2$. Уравнение (18) можно переписать в виде

$$\oint_{k_m} f_{l+}(k, r) f_{l+}(k, r') \left[\frac{f_{l-}(k, r')}{f_{l+}(k, r')} - (-1)^l S_l(k) \right] dk = 0,$$

откуда можно заключить, что $S_l(k)$ может иметь в D^+ дополнительные изолированные особенности, которые совпадают с изолированными особенностями функции $f_{l-}(k, r)$ в D^+ , вблизи которых

$$\lim_{k \rightarrow k_m} f_{l-}(k, r) = \lim_{k \rightarrow k_m} D_m(k) f_{l+}(k, r). \quad (21)$$

Функция $D_m(k)$ не зависит от r и имеет изолированную особенность в точке k_m . Эти результаты были получены в [1] с использованием другого метода. В приложении 1 представлен перевод на русский язык работы Ольховского и Цехмистренко [6], где представлены подобные результаты относительно полюсов для более общих, чем в [1], взаимодействий, опубликованной ранее в украинском издании, которая не была переведена на русский и английский языки и поэтому неизвестна читателям, не знающим украинского языка.

Теперь рассмотрим уравнение (19) в окрестности логарифмических особенностей функции $f_{l-}(k, r)$ в D^+ . Контур γ_q можно выбрать в виде, показанном на рис. 1. Он состоит из почти замкнутой окружности γ_{acc} , проведенной вокруг точки $k_\gamma = ib/2$, с малым радиусом $\varepsilon \equiv (\varepsilon/b)b$ и двух бесконечных линий γ_{sh} вдоль краев разреза с намного меньшим расстоянием между ними, равным $(\varepsilon/b)^\delta b$, $\delta > 2$, т.е. $\gamma_q = \gamma_{acc} + \gamma_{sh}$. Обозначим через γ_{12} сегмент, соединяющий низшие для двух линий точки 1 и 2 (см. рис. 1). Обозначив через γ_c замкнутый контур, образованный почти замкнутой окружностью и сегментом, для интегралов, входящих в уравнение (19), можно

Рис. 1. Вид контура γ_q .

записать тождество

$$\int_{\gamma_{\text{acc}}} = \oint_{\gamma_c} - \int_{\gamma_{12}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\gamma_c}. \quad (22)$$

Поскольку длина сегмента γ_{12} равна $(\varepsilon/b)^\delta b$, интегралы по γ_{12} , так же как и по γ_{sh} , при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к нулю как $O(\varepsilon^{\delta-2})$. Поэтому остается только контурный интеграл вдоль замкнутой окружности γ_c с центром в точке k_γ .

Рассмотрим подробно интеграл по γ_c . Значение интеграла определяется поведением подынтегрального выражения, когда радиус окружности стремится к нулю. Поэтому рассмотрим предел

$$\lim_{k \rightarrow k_\gamma} \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \int_b^\infty \frac{e^{(ik-b')r}}{b'(b' + 2ik)} db'. \quad (23)$$

Легко показать, что интеграл по переменной b' в этом выражении имеет в точке k_γ логарифмическую расходимость, которая сокращается при обращении в нуль соответствующего множителя, и поэтому функция $f_{0-}(k, r)$ не имеет полюса в точке k_γ . Явное вычисление предела (23) показывает, что в окрестности точки k_γ функцию $f_{0-}(k, r)$ можно записать в виде (см. приложение 2)

$$f_{0-}(k, r) \rightarrow W(k, r) + \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} U(k, r), \quad (24)$$

где W и U – аналитические функции переменной k в точке k_γ и внутри малой замкнутой окружности γ_c . Поэтому уравнение (19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_c} S_0(k) f_{0+}(k, r) f_{0+}(k, r') dk &= \oint_{\gamma_c} f_{0+}(k, r) f_{0-}(k, r') dk = \\ &= \oint_{\gamma_c} W(k, r) f_{0+}(k, r') dk + \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \oint_{\gamma_c} U(k, r) f_{0+}(k, r') dk. \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку каждый интеграл в правой части обращается в нуль, можно заключить, что

$$\oint_{\gamma_c} S_0(k) f_{0+}(k, r) f_{0+}(k, r') dk = 0. \quad (26)$$

Отсюда следует, что $S_0(k)$ может содержать не более, чем сингулярный множитель вида

$$F = \left[1 - \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 - \frac{2ik}{b} \right) \right] \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1}, \quad (27)$$

связанный с аналогичной логарифмической точкой ветвления при $k = k_\gamma$. Конечно, такого множителя может и не быть или $S_0(k)$ может содержать другие множители, имеющие логарифмическую точку ветвления, но обращающиеся в нуль в точке k_γ .

Рассмотрим несколько специальных случаев, когда этот множитель действительно появляется.

Если взаимодействие внутри сферы $r \leq a$ таково, что волновую функцию рассеяния во внешней части ($r > a$) можно записать в виде

$$\Psi_{\text{ext}} = f_{0-}(kr) - S_0(k) f_{0+}(kr), \quad (28)$$

причем она обращается в нуль в некоторой точке $r = r_0 > a$, то

$$S_0(k) = \frac{f_{0-}(k, r_0)}{f_{0+}(k, r_0)}. \quad (29)$$

Отсюда следует, что в $S_0(k)$ *должен содержаться* множитель F , задаваемый выражением (27).

Другая возможность возникает для широкого класса потенциалов [1], а именно когда взаимодействие внутри сферы $r \leq a$ таково, что выполняются следующие соотношения непрерывности:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{int}} &\equiv \text{const} \cdot \Phi(k, a) = f_{0-}(k, a) - S_0(k) f_{0+}(k, a), \\ \left. \frac{d\Psi_{\text{int}}}{dr} \right|_{r=a} &\equiv \text{const} \cdot \left. \frac{d\Phi(k, r)}{dr} \right|_{r=a} = \left. \frac{df_{0-}(kr)}{dr} \right|_{r=a} - S_0 \left. \frac{df_{0+}(k, r)}{dr} \right|_{r=a}. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь функция $\Phi(k, r)$ представляет собой регулярное решение радиального уравнения Шредингера внутри сферы $r \leq a$ с граничными условиями $\Phi(k, 0) = 0$. Эта функция определяется только взаимодействием внутри сферы $r \leq a$. Уравнения (30) определяют константу и соответствующую S -матрицу:

$$S_0(k) = \frac{\varphi(k, a) df_{0-}(k, a)/da - f_{0-}(k, a) d\varphi(k, a)/da}{f_{0+}(k, a) d\varphi(k, a)/da - \varphi(k, a) df_{0+}(k, a)/da}, \quad (31)$$

т.е. тогда в $S_0(k)$ также должен содержаться множитель (27).

Согласно соотношениям (10), (11) тот же результат получается и для $S_l(k)$ при $l > 0$.

Рис. 2. Наложение полюсов и разреза.

С помощью такого же подхода можно исследовать более общий случай, когда имеется наложение (см. рис. 2) разреза полюсами (теми, которые соответствуют связанным состояниям и/или “лишним” полюсам, которые появляются, когда потенциалы экспоненциально убывают). В данном случае достаточно использовать аналогичные соотношению (22) равенства

$$\int_{\gamma_{\text{acc}}(k_n)} = \oint_{k_n} - \int_{\gamma_{12}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{k_n}$$

и только повторить рассуждения, приведенные перед формулой (24). Тогда легко доказать, что для всех этих особенностей равенство (21) остается справедливым, и поэтому остаются справедливыми полученные ранее результаты относительно особенностей $S_l(k)$ в D^+ .

Наконец, можно найти аналитическое продолжение функций $S_l(k)$ в нижнюю полуплоскость D^- , как это обычно делается, на основании условия симметрии (5) и известной общей теоремы об аналитическом продолжении.

3. ЯВНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ S -МАТРИЦЫ ДЛЯ ВЫБРАННОГО КЛАССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Теперь попробуем найти явное аналитическое представление функции $S_l(k)$. Множитель F , определяемый в (27), содержит логарифмические особенности, аналогичные особенностям решения (8), в точках $k_b = ib/2$ и $-k_b$, удовлетворяет условию

симметрии (5), имеет на вещественной оси k абсолютное значение, равное единице, и, наконец, не имеет других особенностей, кроме, быть может, нуля в знаменателе в (27), и не имеет нулей, кроме, быть может, нуля в числителе в (27).

Учитывая вид уравнения (25) и равенство (20), легко видеть, что функции $\tilde{S}_l^{(F)}(k) = F^{-1}\tilde{S}_l(k)$ при $\tilde{S}_l(k) = S_l(k)e^{2ika}$ не содержат ни логарифмических особенностей, ни нулей, ни полюсов, связанных с наличием логарифмического множителя (27), для любого значения l . Они являются регулярными и ограниченными всюду в верхней полуплоскости (включая вещественную ось), кроме точек k_{nl} ¹⁾. А для функции $\tilde{S}_l^{(F)}(k)$ можно найти разложение в произведение, следуя подходу, который был намечен в общих чертах в работе [5] и получил дальнейшее развитие в настоящей работе.

В первую очередь, мы рассмотрим некоторые промежуточные произведения. Произведение

$$\prod_n \frac{k + k_{nl}}{-k + k_{nl}} \quad (32)$$

содержит все полюсы функции $S_l(k)$ в D^+ , не имеет других особенностей и нулей, удовлетворяет условиям (4) и (5) и имеет абсолютное значение, равное единице на вещественной оси k .

Произведение

$$\prod_v \frac{-k + k_{vl}}{k + k_{vl}} \quad (33)$$

содержит все нули функции $S_l(k)$ на положительной части мнимой оси (кроме, конечно, нулей функции F) и согласно условиям (4) и (5), которые выполнены для выражения (33), содержит также все полюсы функции $S_l(k)$ на отрицательной части мнимой оси, имеет абсолютное значение, равное единице на вещественной оси k , и в случае сходимости является регулярным в D^+ .

Произведение

$$\prod_s \frac{(k_{sl} - k)(k_{sl}^* + k)}{(k_{sl} + k)(k_{sl}^* - k)} \quad (34)$$

содержит все нули функции $S_l(k)$ в D^+ (кроме мнимой оси и нулей функции F), удовлетворяет условиям (4) и (5) и в случае сходимости является регулярным в D^+ и имеет абсолютное значение, равное единице на вещественной оси k .

Функция

$$J_{lN}(k) = \tilde{S}_l^{(F)}(k) \left[\prod_n \frac{k + k_{nl}}{-k + k_{nl}} \prod_v \frac{-k + k_{vl}}{k + k_{vl}} \prod_s \frac{(k_{sl} - k)(k_{sl}^* + k)}{(k_{sl} + k)(k_{sl}^* - k)} \right]^{-1} \quad (35)$$

для конечных чисел $N = N_1 + N_2$ является регулярной и ограниченной на вещественной оси k . Если предел

$$J_l(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} J_{lN}(k)$$

¹⁾ Возможный нуль в числителе (27) исключен из функции $\tilde{S}_l^{(F)}(k)$.

существует, он обладает теми же свойствами, и тогда

$$S_l(k) = e^{-2ika} F(k) \prod_n \frac{k + k_{nl}}{-k + k_{nl}} \prod_v \frac{-k + k_{vl}}{k + k_{vl}} \prod_s \frac{(k_{sl} - k)(k_{sl}^* + k)}{(k_{sl} + k)(k_{sl}^* - k)}. \quad (36)$$

Для того чтобы быть уверенными в справедливости (корректности) соотношения (36), требуется показать, что два бесконечных произведения в (36) сходятся. Условием их абсолютной сходимости является сходимость суммы

$$\begin{aligned} & \sum_s \left[\left| \frac{k_{sl} - k}{k_{sl} + k} - 1 \right| + \left| \frac{k_{sl}^* + k}{k_{sl}^* - k} - 1 \right| \right] + \sum_v \left| \frac{k_{vl} - k}{k_{vl} + k} - 1 \right| = \\ & = 2|k| \left\{ \sum_s \frac{1}{|k + k_{sl}|} + \sum_s \frac{1}{|k_{sl}^* - k|} + \sum_v \frac{1}{|k + k_{vl}|} \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

В свою очередь, сходимость формулы (37) определяется сходимостью суммы

$$2 \sum_s \frac{1}{|k_{sl}|} + \sum_v \frac{1}{|k_{vl}|}, \quad (38)$$

поскольку $|k_{sl}| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$ и $|k_{vl}| \rightarrow \infty$ при $v \rightarrow \infty$. Легко убедиться в сходимости сумм (38), если принять во внимание, что функция

$$\tilde{J}_l(k) = \tilde{S}_l^{(F)}(k) \left/ \prod_n \frac{k + k_{nl}}{-k + k_{nl}} \right. \quad (39)$$

является аналитической в D^+ при отсутствии нулей у нее выше вещественной оси k , и использовать следующую теорему.

ТЕОРЕМА [7]. Пусть функция $f(z)$ является ограниченной и аналитической при $\operatorname{Re} z \geq 0$ и пусть ее нулями в правой полуплоскости z являются $r_1 e^{\theta_1}, r_2 e^{\theta_2}, \dots$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1} \cos \theta_n$ сходится.

Поскольку для $\tilde{J}_l(\rho)$ при $\rho = ik$ справедливо $\cos \theta_n = |\cos \theta_n| \geq \varepsilon$, где $\varepsilon \neq 0$, то

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1} < \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1} \cos \theta_n < \infty,$$

что доказывает сходимость сумм (38). Таким образом, бесконечные произведения в выражении (36) равномерно сходятся и дают мероморфную функцию с полюсами $-k_{sl}$ и $-k_{vl}$.

Следует заметить, что для всех известных взаимодействий в области ядерной физики и физики элементарных частиц “резонансные” нули S -матрицы (в одноканальном пределе) при возрастании k всегда расположены на возрастающих расстояниях от вещественной оси k (и поэтому на возрастающих расстояниях от мнимой оси ρ для $\tilde{J}_l(\rho)$). Таким образом, нижняя граница ε величины $\cos \theta_n$ при $n \rightarrow \infty$ оказывается ненулевой и не слишком маленькой, и поэтому сумма $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1}$ является не только конечной, но также и не очень большой, по меньшей мере пропорциональной ε^{-1} .

Более того, для всех взаимодействий, для которых справедлива теорема Левинсона, суммы (37) должны сходиться. Это прямое следствие неположительности (отрицательности или нулевого значения) интеграла $\int_0^\infty \Delta\tau(E) dE$, $\Delta\tau(E) = (\hbar/2) \times (\partial \arg S_l / \partial E)E$ – время задержки, $\hbar = h/(2\pi)$, h – постоянная Планка, на всей положительной полуоси кинетических энергий $E = \hbar^2 k^2 / (2\mu)$ относительного движения сталкивающихся частиц [8], [9], поскольку вклад “резонансных” нулей k_s и нулей “виртуальных состояний” k_v в интеграл $\int_0^\infty \Delta\tau(E) dE$ положителен, и при этом он меньше, чем абсолютное значение вклада *конечного* числа полюсов, соответствующих связанным состояниям, и членов, связанных с отражением (от границ взаимодействия).

Возвращаясь к функции $J_l(k)$, заметим, что она не только является аналитической функцией в D^+ , но и, будучи целой функцией без нулей, может быть записана в виде e^{u+iv} , где $u+iv$ – целая функция (см., например, соответствующую теорему в работе [7]). Вещественная функция $u(k)$ должна быть отрицательной в D^+ вследствие равенства (20) и положительной в D^- вследствие условий (4) и (5). Поэтому согласно уравнениям Коши–Римана на вещественной оси k должно выполняться условие

$$0 = \frac{\partial u}{\partial \operatorname{Im} k} = -\frac{\partial v}{\partial k}, \quad \operatorname{Im} k = 0. \quad (40)$$

Отсюда следует, что функция $v(k)$ монотонно возрастает и принимает любое вещественное значение не более одного раза. Тогда функция $u+iv$ принимает любое мнимое значение не более одного раза и, следовательно, должна быть линейной функцией k :

$$u+iv = 2i\alpha_1 k + \alpha_2. \quad (41)$$

Очевидно, $\alpha_1 = 0$, и вследствие равенства $S_l(0) = 1$ мы имеем $\alpha_2 = 0$. Таким образом, окончательно получаем

$$S_l(k) = e^{-2ik\alpha} F(k) \prod_n \frac{k+k_{nl}}{-k+k_{nl}} \prod_v \frac{-k+k_{vl}}{k+k_{vl}} \prod_s \frac{(k_{sl}-k)(k_{sl}^*+k)}{(k_{sl}+k)(k_{sl}^*-k)}, \quad (42)$$

где $\alpha = a - \alpha_1 \leq a$, а множитель F определяется соотношением (27).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Формула (42) получена впервые и является прямым обобщением результатов работ [3]–[5] для взаимодействий с “хвостом” в виде потенциала Юкавы. В свою очередь, в дальнейшем, используя методы, представленные в настоящей работе и в работе [5], ее можно легко обобщить на случаи нецентральных нарушающих четность взаимодействий и взаимодействий с поглощением. Исследованию многоканального рассеяния для случая взаимодействий с “хвостом” в виде потенциала Юкавы будет посвящена отдельная работа.

Следует заметить, что во всех видах дисперсионных соотношений требуется учитывать вычеты не только в полюсах k_{nl} , но и в “лишних” полюсах для экспоненци-

ально убывающего потенциала, а также интегралы по контурам γ_q вокруг логарифмических особенностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Необходимое и достаточное условия существования “лишних” полюсов $(m/2)ib$ при $b > 0$, $m = 1, 2, \dots$ у функции $f_0(k, r)$, а поэтому и у $S_0(k)^2$

Используя уравнение Йоста

$$f_0(k, r) = e^{ikr} + k^{-1} \int_r^\infty \sin[k(r' - r)] V(r') f_0(k, r') dr' \quad (\text{П.1})$$

и решая его формально методом последовательных приближений, получим сумму

$$f_0(k, r) = \sum_{v=0}^{\infty} f_{0v}(k, r), \quad (\text{П.2})$$

где

$$\begin{aligned} f_{00}(k, r) &= e^{ikr}, \\ f_{0v}(k, r) &= e^{ikr} (2ikr)^v \int_r^\infty (e^{2ik(r_1-r)} - 1) V(r_1) \times \dots \\ &\dots \times \int_{r_{v-1}}^\infty e^{-2ik(r_v-r_{v-1})} V(r_v) dr_v \dots dr_1, \quad v = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

для случаев, когда $[10] |V| < M/r^{2+\delta}$, $M < \infty$, $\delta > 0$. Далее используем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1 [7]. Пусть $F(k, r)$ – функция комплексных переменных k и r , которая определена и непрерывна для всех значений k в некоторой области D и для всех значений r на контуре C . Тогда функция

$$\Phi(k) = \int_C F(k, r) dr$$

является аналитической функцией k в области D . Если контур C является бесконечным, то необходимой также является равномерная сходимость интеграла.

ТЕОРЕМА 2 [7]. Пусть все функции ряда $u_1(z), u_2(z), \dots$ – аналитические функции переменной z внутри области D , а сумма $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ равномерно сходится в каждой области D' , внутренней по отношению к D . Тогда функция $u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ представляет собой аналитическую функцию аргумента z внутри D .

Из уравнения (П.3) и теоремы 1 следует, что в верхней полуплоскости функции $f_{0v}(k, r)$, $v = 0, 1, 2, \dots$, являются аналитическими функциями переменной k . Если борновский ряд (П.2) равномерно сходится, то согласно теореме 2 функция $f_0(k, r)$ аналитична в верхней полуплоскости. Аналогично функция $f_0(-k, r)$ аналитична в

²⁾Здесь представлен посвященный памяти Ю.В. Цехмистренко перевод с украинского языка работы [6].

нижней полуплоскости. Более того, если функция $f_{0v}(k, r)$, $v \geq 1$, аналитична в нижней полуплоскости, то все последующие члены также являются аналитическими.

Теперь мы покажем, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Если функция $f_{0v}(k, r)$, $v > 1$, имеет особенности, то функция $f_{01}(k, r)$ тоже должна их иметь.*

Действительно, пусть функция $f_{01}(k, r)$ всюду аналитична. Тогда все последующие члены тоже всюду аналитичны. Это противоречие доказывает теорему 3.

Используем аналитическую структуру функции $f_{01}(k, r)$ в верхней полуплоскости. Очевидно, задача может быть сведена к изучению аналитической структуры интеграла

$$I = \int_r^\infty e^{-2ikr'} V(r') dr',$$

поскольку все остальные члены дают функции, аналитические на всей плоскости.

Как было показано в работах [10], [11], в случае потенциала

$$V(r) = P_n(r)e^{-br}, \quad (\text{П.4})$$

где $P_n(r)$ – полином n -й степени, $b > 0$, функция $f_0(-k, r)$ имеет полюсы порядка не выше $n + 1$ в точках $ib/2, ib, 3ib/2, \dots$ и является аналитической во всех других точках комплексной плоскости.

Покажем теперь, что если функция $f_{01}(-k, r)$ имеет полюс порядка не выше $n + 1$ в точке $ib/2$, то потенциал должен содержать член вида (П.4). Из этого условия следует, что интеграл

$$I_1 = \int_r^\infty e^{-2ikr'} V_1(r') dr',$$

где $V_1 = V - V_2$ (член V_2 не дает полюсов), можно представить на действительной оси k в виде

$$I_1 \equiv \sum_{\mu=0}^n \frac{\varphi_\mu(-2ik, r)}{(2ik + b)^\mu}, \quad (\text{П.5})$$

где $\varphi_\mu(-2ik, r)$ – функция, аналитическая по всем полюсам и не равная нулю в точке $ib/2$. Далее, переписывая интеграл I_1 в виде

$$I_1 = \int_r^\infty e^{-(2ik+b)r'} V_1(r') e^{br'} dr'$$

и интегрируя по частям, мы можем преобразовать правую часть тождества (П.5) в ряды:

$$\begin{aligned} & -e^{-2ikr} V_1 - \frac{1}{2ik + b} e^{-2ikr} \left(bV_1 + \frac{dV_1}{dr} \right) - \dots - \frac{1}{(2ik + b)^n} e^{-2ikr} \times \\ & \times \left(b^n V_1 + nb^{n-1} \frac{dV_1}{dr} + \dots + \frac{d^n V_1}{dr^n} \right) - \dots \equiv \sum_{\mu=0}^n \frac{\varphi_\mu(-2ik, r)}{(2ik + b)^\mu}. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Сравнивая коэффициенты при равных степенях $(2ik + b)$, получаем последовательную систему соответствующих тождеств. Поскольку в правой части (П.6) отсутствует член, содержащий $(2ik + b)^{-m}$, $m > n$, получаем

$$b^{n+1}V_1 + (n+1)b^n \frac{dV_1}{dr} + \frac{(n+1)n}{2} - b^{n-1} \frac{d^2V_1}{dr^2} + \dots + \frac{d^{n+1}V_1}{dr^{n+1}} = 0,$$

откуда следует

$$V = P_n(r)e^{-br} + V_2,$$

где V_2 – произвольная функция, которая не может быть приведена к виду $P_s(r)e^{-b_s r}$.

Аналогично можно доказать следующую общую теорему.

ТЕОРЕМА 4. Для того чтобы функция $f_0(-k, r)$ имела полюсы порядка не выше $(n_1 + 1)$ в точках $ib_1/2, ib_1, 3ib_1/2, \dots$, не выше $(n_2 + 1)$ в точках $ib_2/2, ib_2, 3ib_2/2, \dots$, не выше $(n_m + 1)$ в точках $ib_m/2, ib_m, 3ib_m/2, \dots$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий потенциал содержал член $\sum_{m, n_m} P_{n_m}(r)e^{-b_m r}$.

Очевидно, для того чтобы иметь существенно особые точки, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий потенциал содержал член $X(r)e^{-br}$, где $X(r)$ – равномерно сходящийся бесконечный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n$, не равный $e^{\text{const} \cdot r^\alpha}$, $0 < \alpha < \infty$.

Исследуя поведение интеграла I вдоль оси $k = ib/2$ в случае, когда $V(r) = v(r)e^{-br}$, где $v(r)$ – произвольная функция, не имеющая множителя $e^{\text{const} \cdot r^\alpha}$, $\alpha \geq 1$, легко заключить, что на этой оси могут появляться точки ветвления. Один из простейших случаев представляет собой потенциал $[e^{-br} \sin(cr)]/r^q$. Для различных значений q ($q > 0$) этот потенциал может давать точки ветвления различных видов при $k = ib/2 \pm c/2$.

Если $I(r) = v(r)e^{-br^\alpha}$, α – целое число, $\alpha > 1$, то I и, следовательно, $f_0(k, r)$ будут аналитическими функциями на всей плоскости.

Таким образом, наличие множителя e^{-br} приводит к тому, что функция $f_0(-k, r)$ становится неаналитической в верхней полуплоскости.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Вывод формулы (24)

Перепишем выражение (6а) для $f_{0-}(k, r)$ внутри окружности γ_c , проведенной вокруг точки $k_\gamma = ib/2$, в виде

$$\begin{aligned} f_{0-}(k, r) &\rightarrow \lim_{k \rightarrow k_\gamma} \left\{ 1 + \rho \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \int_b^\infty \frac{e^{-b'r}}{b'(b' \mp 2ik)} db' \right\} e^{\pm ikr} = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ 1 + \rho \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \int_0^\infty \frac{e^{-(\tilde{b}+b)r}}{(\tilde{b}+\eta)(\tilde{b}+b)} d\tilde{b} \right\} e^{-ikr}, \quad (\text{П.7}) \end{aligned}$$

где мы ввели переменные $\tilde{b} = b' - b$ и $\eta = 2ik + b$. Затем сделаем следующие простые преобразования правой части (П.7):

$$\begin{aligned}
 f_{0-}(k, r) &\rightarrow \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ 1 + \rho \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \int_0^\infty \frac{e^{-\tilde{b}r} e^{2ikr} d\tilde{b}}{(\tilde{b} + \eta)(\tilde{b} - 2ik + \eta)} \right\} e^{-ikr} = \\
 &= e^{-ikr} + \rho \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \int_0^\infty \frac{e^{-\tilde{b}r} d\tilde{b}}{\tilde{b}(\tilde{b} - 2ik)} e^{ikr} + \\
 &\quad + \rho \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^b \frac{e^{-\tilde{b}r} d\tilde{b}}{(\tilde{b} + \eta)(\tilde{b} - 2ik + \eta)} e^{ikr} = \\
 &= e^{-ikr} + \frac{A_-}{A_+} [f_{0+}(k, r) - e^{ikr}] + \\
 &\quad + \rho \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^b \frac{e^{-\tilde{b}r} d\tilde{b}}{(\tilde{b} + \eta)(\tilde{b} - 2ik + \eta)} e^{ikr}, \quad (\text{П.8})
 \end{aligned}$$

где

$$A_{\mp} = \left[1 \pm \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 \pm \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1}$$

и мы воспользовались определением (6а) для $f_{0+}(k, r)$.

Теперь проанализируем последний интеграл в правой части формулы (П.8), используя формулы (3.352.1) и (8.214.1) из [12]:

$$\begin{aligned}
 J &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^b \frac{e^{-\tilde{b}r} d\tilde{b}}{(\tilde{b} + \eta)(\tilde{b} - 2ik + \eta)} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{b - \eta} \int_0^b e^{-\tilde{b}r} \left[\frac{1}{\tilde{b} + \eta} - \frac{1}{\tilde{b} + b} \right] d\tilde{b} = \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b - \eta} e^{\eta r} [\text{Ei}(-br - \eta r) - \text{Ei}(-\eta r)] - \frac{1}{b - \eta} e^{br} [\text{Ei}(-2br) - \text{Ei}(-br)] \right\} = \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{b} [-\ln(\eta r) + X(\eta, r)], \quad (\text{П.9})
 \end{aligned}$$

где Ei – функция Эйри,

$$X(\eta, r) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-br + \eta r)^k}{k \cdot k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\eta r)^k}{k \cdot k!} - e^{br} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2br)^k}{k \cdot k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-br)^k}{k \cdot k!} \right]$$

– аналитическая функция аргумента $\eta = b + 2ik$ в точке $\eta = 0$ и внутри небольшой окружности $|\eta| < b$. Далее можно переписать (П.9) следующим очевидным образом:

$$J = \frac{1}{b} \left\{ \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right] \frac{2ik}{\rho} + Z(k, r) \right\}, \quad (\text{П.9а})$$

где $Z(k, r) = X(\eta, r) - \ln(br) - 2ik/\rho$ – аналитическая функция переменной k в точке $k = k_\gamma = ib/2$ и внутри небольшой окружности $|k| < b/2$.

Используя выражение (П.9а), продолжим преобразования выражения (П.8):

$$\begin{aligned} f_{0-}(k, r) &\xrightarrow{k \rightarrow k_\gamma} e^{-ikr} + \frac{A_-}{A_+} [f_{0+}(kr) - e^{ikr}] + \rho \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \lim_{\eta \rightarrow 0} e^{ikr} \frac{1}{b} \left\{ \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right] \frac{2ik}{\rho} + Z(k, r) \right\} = \\ &= W(k, r) + \left[1 + \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 + \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} U(k, r), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W(k, r) &= e^{-ikr} + \frac{2ik}{b} e^{ikr}, \\ U(k, r) &= \left[1 - \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 - \frac{2ik}{b} \right) \right]^{-1} f_{0+}(k, r) + e^{ikr} \left\{ \frac{\rho}{b} Z(k, r) - \left[1 - \frac{i\rho}{2k} \ln \left(1 - \frac{2ik}{b} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

– аналитические функции аргумента k в точке $k = k_\gamma = ib/2$ и внутри небольшой окружности $|k| < b/2$.

Список литературы

- [1] Р. Ньютон, *Теория рассеяния волн и частиц*, Мир, М., 1969.
- [2] Х. М. Нуссенцвейг, *Причинность и дисперсионные соотношения*, Мир, М., 1976.
- [3] В. С. Ольховский, *ТМФ*, **20:2** (1974), 211.
- [4] М. В. Николаев, В. С. Ольховский, *ТМФ*, **31:2** (1977), 214.
- [5] V. S. Olkhovsky, A. K. Zaichenko, *Nuovo Cimento. A*, **63** (1981), 155.
- [6] В. С. Ольховский, Ю. В. Цехмистренко, *Укр. физ. журнал*, **6:2** (1961), 149. (по-украински).
- [7] Е. К. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980.
- [8] T. Y. Tsang, T. A. Osborn, *Nucl. Phys. A*, **247** (1975), 43.
- [9] В. С. Ольховский, *ЭЧАЯ*, **15** (1984), 289.
- [10] R. Jost, *Helv. Phys. Acta*, **20** (1947), 256.
- [11] S. Ma, *Phys. Rev.*, **71** (1947), 195.
- [12] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.

Поступила в редакцию 13.VII.2005 г.