Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Криницын, В. В. Прудников, П. В. Прудников, Расчет динамического критического индекса методом суммирования асимптотических рядов, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 1, 137–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2029>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:35:01

© 2006 г. А. С. Криницын*, В. В. Прудников*,
П. В. Прудников*

РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКОГО КРИТИЧЕСКОГО ИНДЕКСА МЕТОДОМ СУММИРОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ

Рассмотрено применение методов суммирования асимптотических рядов Паде–Бореля, Паде–Бореля–Лероя и конформного отображения к расчету динамического критического индекса для однородных и неупорядоченных изингоподобных систем.

Ключевые слова: методы суммирования, асимптотические ряды, критическая динамика, ренормализационная группа, динамический критический индекс.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изложению деталей применения методов суммирования асимптотических рядов для расчета критического индекса z , определяющего критическое замедление времени релаксации системы $\tau \sim \xi^z \sim |T - T_c|^{-z\nu}$ вблизи температуры T_c фазового перехода второго рода (ξ – корреляционная длина, ν – индекс корреляционной длины). Наиболее сложным и интересным направлением теории критических явлений является исследование динамических процессов в окрестности критической точки. Существенным достижением ренормализационно-группового (РГ) подхода в исследовании статических критических явлений явилось создание концепции классов универсальности критического поведения различных систем, характеризующихся сходными критическими свойствами. Универсальность динамических критических явлений в отличие от статических значительно слабее, что проявляется в существовании большого числа моделей критической динамики с различным динамическим критическим поведением [1] при общих равновесных критических свойствах. Эта трудность частично компенсируется тем, что динамические критические характеристики многих из этих моделей могут быть выражены через характеристики их статического критического поведения. В первую очередь это касается моделей, в которых выполняются законы сохранения параметра порядка или

*Омский государственный университет, Омск, Россия. E-mail: krinitsin@univer.omsk.su; prudnikov@univer.omsk.su; prudnikp@univer.omsk.su

других долгоживущих возбуждений, в частности плотности энергии [1]. Наличие сохраняющихся величин может приводить к возникновению в стохастических уравнениях движения чисто гидродинамических слагаемых, определяющих, а иногда и подавляющих влияние флуктуационных процессов на динамическое (релаксационное) поведение. В этом случае критические индексы, описывающие динамическое критическое поведение, могут быть вычислены на основе статических индексов с точностью определения последних [1].

Однако существуют динамические модели, описание критического поведения которых не является тривиальной задачей. В первую очередь к ним относятся модели с чисто диссипативными уравнениями движения. Для исследования критического поведения таких моделей приходится развивать специальные методы и проводить расчеты динамических величин независимо от статических. Среди этих моделей наибольший интерес представляет динамическая модель Гинзбурга–Ландау (модель A в классификационной схеме Гальперина и Хоенберга [1]), впервые предложенная Ландау и Халатниковым для описания аномального затухания звука в гелии вблизи λ -точки. Впоследствии в рамках этой модели стали описывать динамическое критическое поведение других реальных систем, таких как изингоподобные магнетики.

Критическая динамика модели A исследовалась РГ-методами, основанными на ϵ -разложении, в статьях [2]. В работах [3], [4] одного из авторов этой статьи впервые для ее описания был развит теоретико-полевой подход непосредственно для трехмерных и двумерных однородных систем последовательно в 3-петлевом и 4-петлевом приближениях, а затем и для структурно-неупорядоченных трехмерных изингоподобных систем в 3-петлевом приближении [5]. Однако достигнутая в цитированных работах точность определения динамических критических характеристик все же значительно уступает точности описания статического критического поведения для данных систем, осуществленного в 6-петлевом приближении теории [6]–[9]. В первую очередь это обусловлено быстрым ростом объема вычислений уже в самых низких порядках теории возмущений, особенно при описании критической динамики структурно-неупорядоченных систем. В связи с этим при описании критической динамики модели A в однородных и неупорядоченных системах возрастают требования к точности тех методов, которые применяются для суммирования асимптотических рядов теории при получении значения динамического критического индекса z .

В данной работе впервые представлены результаты применения к рядам теории методов суммирования Паде–Бореля–Лероя (ПБЛ) и конформного отображения (КО) для вычисления значений индекса z . Проведено сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными и результатами компьютерного моделирования критической динамики методами Монте–Карло.

2. МОДЕЛЬ

Для описания аномальных свойств термодинамических характеристик систем при фазовых переходах второго рода широко применяется метод теоретико-полевой РГ, позволяющий рассчитать значения критических индексов, характеризующих асимптотическое поведение термодинамических и корреляционных функций вблизи

критической температуры.

Рассматриваемая модель критического поведения однородной ферромагнитной системы представляет собой классическую спиновую систему, термодинамически эквивалентную $O(n)$ -симметричной модели Гинзбурга–Ландау с эффективным гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^d x \left(|\nabla \varphi|^2 + r_0 \varphi^2 + \frac{g_0}{12} \varphi^4 \right), \quad (1)$$

где d – размерность системы, $\varphi(\vec{x}, t)$ – n -компонентный параметр порядка (намагниченность), $r_0 \sim T - T_{c0}$ (T_{c0} – критическая температура в приближении среднего поля) и $g_0 > 0$ – вершина взаимодействия флуктуаций намагниченности. Динамическое поведение магнетика в релаксационном режиме вблизи критической точки в рамках модели А описывается кинетическим уравнением для параметра порядка типа уравнения Ланжевена:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\lambda_0 \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} + \zeta + \lambda_0 h, \quad (2)$$

λ_0 – кинетический коэффициент, $\zeta(\vec{x}, t)$ – гауссова случайная сила, $h(\vec{x}, t)$ – внешнее магнитное поле. Известно, что его решение в виде корреляционных функций и функций отклика можно получить, используя производящий функционал следующего вида:

$$\Omega = \int D[\varphi] D[\tilde{\varphi}] \exp \left(-\mathcal{H}_{\text{eff}}[\varphi, \tilde{\varphi}] + \int (\varphi h + \tilde{\varphi} \tilde{h}) d^d x dt \right), \quad (3)$$

где введены вспомогательное поле $\tilde{\varphi}$ с источником поля $\tilde{h}$ и функционал действия

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \int d^d x dt \left(\lambda_0^{-1} \tilde{\varphi}^2 + i \tilde{\varphi} \left(\lambda_0^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} \right) \right). \quad (4)$$

При этом функция отклика параметра порядка на поле h определяется как

$$G(x, t) = \frac{\delta \langle \varphi(x, t) \rangle}{\delta h(x, t)} \Big|_{h=0} = \frac{1}{\Omega} \frac{\delta^2 \Omega}{\delta h(x, t) \delta \tilde{h}(0, 0)} = \langle \varphi(x, t) \tilde{\varphi}(0, 0) \rangle. \quad (5)$$

Вместо функции отклика удобнее рассматривать ее вершинную часть $\Gamma^{(1,1)}(k, \omega)$.

Учет далекодействующих и долгоживущих флуктуаций параметра порядка, во многом определяющих аномалии равновесных и неравновесных характеристик систем при $T \rightarrow T_c$, осуществляется в рамках разработанных РГ-методов [1], [10]. Используемые в теории перенормированные динамические вершинные функции $\Gamma_R^{(N, \tilde{N})}(k, \omega)$ ($N + \tilde{N}$)-го порядка, однозначно определяющие все наблюдаемые характеристики системы, задаются дифференциальным РГ-уравнением

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - r \gamma_r \frac{\partial}{\partial r} - \lambda \gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{(N + \tilde{N})}{2} \gamma_\varphi \right] \Gamma_R^{(N, \tilde{N})} = 0 \quad (6)$$

с перенормированным зарядом g , приведенной температурой r и кинетическим коэффициентом λ . Асимптотическое поведение термодинамических и корреляционных

функций, имеющее при $T \rightarrow T_c$ степенной характер, определяется нулем g^* функции $\beta(g)$: $\beta(g^*) = 0$, и значениями функций $\gamma_r(g^*)$, $\gamma_\lambda(g^*)$, $\gamma_\phi(g^*)$, задающими статические и динамический критические индексы: $\nu = (2 + \gamma_r(g^*))^{-1}$, $\eta = \gamma_\phi(g^*)$, $z = 2 + \gamma_\lambda(g^*)$ (как пример, $\gamma = \nu(2 - \eta)$, магнитная восприимчивость $\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}$).

Функции $\beta(g)$, $\gamma_r(g)$, $\gamma_\lambda(g)$, $\gamma_\phi(g)$, входящие в дифференциальное уравнение РГ, могут быть вычислены в виде рядов по g . Для размерности пространства d , близкой к четырем, координата неподвижной точки g^* функции $\beta(g)$ принимает малые значения. В этом случае применимы методы теории возмущений по константе связи $g \sim 4 - d$ и можно подсчитать критические индексы. Для реальных систем с $d = 3, 2$ ряды по g являются асимптотическими, и для их суммирования нужно применять специальные методы, не основанные на представлениях теории возмущений [6], [7].

При описании критического поведения структурно-неупорядоченных систем с замороженными в узлах решетки немагнитными атомами примеси или вакансиями, играющими роль точечных дефектов структуры, в эффективный гамильтониан модели Гинзбурга–Ландау (1) вводят дополнительное слагаемое

$$\Delta\mathcal{H}[\varphi, V] = \frac{1}{2} \int d^d x V(x) \varphi^2, \quad (7)$$

где $V(x)$ – потенциал случайного поля дефектов, приводящий к флуктуациям локальной критической температуры $r_0 \sim T - T_{c0}$. Распределение дефектов структуры в объеме системы полагается гауссовым (учет отклонения от гауссового распределения приводит лишь к несущественным в критической области поправкам) с функцией распределения

$$P[V] = A_V \exp \left[-(16v_0)^{-1} \int d^d x V^2(x) \right], \quad (8)$$

где A_V – нормировочный фактор, v_0 – положительный параметр, пропорциональный концентрации дефектов и квадрату величины их потенциала. Получаемые в дальнейшем с помощью производящего функционала корреляционные функции и функции отклика для структурно-неупорядоченных систем должны быть усреднены по случайному потенциалу дефектов $V(x)$. Это усреднение наиболее эффективно может быть выполнено с помощью метода реплик, широко используемого в подобных целях при исследованиях слабо неупорядоченных систем (см., например, обзор [11]). Суть метода заключается в формальном применении при получении свободной энергии неупорядоченной системы через процедуру усреднения по распределению дефектов следующего математического преобразования:

$$-\frac{F}{T} = \langle \ln Z \rangle = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m} \ln \langle Z^m \rangle = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m} \ln \text{Sp}_{\{\varphi_i\}} \exp \left(-\hat{H}_{\text{repl}} \frac{[\{\varphi_i\}]}{T} \right), \quad (9)$$

где двойные угловые скобки обозначают усреднение по распределению вероятностей различных конфигураций дефектов $P[V]$, Z – статистическая сумма исходной неупорядоченной системы и введены m реплик (“образов”) исходного поля $\varphi - \{\varphi_i\}$

с репличными индексами $i = 1, \dots, m$. При этом репличный гамильтониан определяется как

$$\exp\left(-\frac{\hat{H}_{\text{repl}}^{(m)}[\{\varphi_i\}]}{T}\right) = \left\langle \left\langle \prod_{i=1}^m \exp\left(-\frac{\hat{H}[\{\varphi_i\}]}{T}\right) \right\rangle \right\rangle \quad (10)$$

и в отличие от исходного является трансляционно-инвариантным. При применении данной процедуры усреднения к динамическому производящему функционалу (3) вместо функционала действия однородной модели (4) может быть получен репличный функционал действия

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{repl}}^{(m)} = & \sum_i \int d^d x dt \left[-\lambda_0^{-1} \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}'_i + i \tilde{\varphi}_i \left(\lambda_0^{-1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \nabla^2 \varphi_i + r_0 \varphi_i \right) + \frac{i}{3!} g_0 \tilde{\varphi}_i \varphi_i \varphi_i \right] + \\ & + 4v_0 \sum_{i,j} \int d^d x dt dt' \tilde{\varphi}_i(x, t) \varphi_i(x, t) \tilde{\varphi}_j(x, t') \varphi_j(x, t'). \end{aligned} \quad (11)$$

В соответствии с методом реплик свойства исходной неупорядоченной системы получаются в пределе $m \rightarrow 0$. Данный предел приводит к уничтожению связанных диаграмм, содержащих петли, образованные примесной вершиной v_0 .

Таким образом, учет структурной неупорядоченности систем при описании критического поведения приводит к введению дополнительной вершины взаимодействия v_0 в эффективном гамильтониане, определяющей эффекты взаимодействия флуктуаций nm -компонентного параметра порядка через поле дефектов. Последующая процедура перенормировки динамических вершинных функций задается дифференциальным РГ-уравнением

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_v \frac{\partial}{\partial v} - r \gamma_r \frac{\partial}{\partial r} - \lambda \gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{(N + \tilde{N})}{2} \gamma_\varphi \right] \Gamma_R^{(N, \tilde{N})} = 0 \quad (12)$$

с перенормированными зарядами g, v . В этом случае функции β_g и β_v зависят от g и v как от параметров модели. Неподвижные точки (g^*, v^*) РГ-преобразований определяются нулями функций β_g и β_v : $\beta_g(g^*, v^*) = 0$, $\beta_v(g^*, v^*) = 0$, а критические индексы – значениями функций $\gamma_r(g^*, v^*)$, $\gamma_\varphi(g^*, v^*)$ и $\gamma_\lambda(g^*, v^*)$ в соответствующих устойчивых неподвижных точках РГ-преобразования. Как и для однородных систем, функции $\beta_g, \beta_v, \gamma_r, \gamma_\lambda(g)$ и $\gamma_\varphi(g)$ могут быть вычислены в виде рядов по g и v лишь для размерности системы d , близкой к четырем, а для реальных систем с $d = 3$ ряды по g и v являются лишь асимптотически сходящимися.

3. МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ

Для обсуждения динамического критического поведения однородных систем и вычисления индекса z нам потребуются только функции $\beta(g)$, $\gamma_\lambda(g)$. Явный вид первой из них в 6-петлевом приближении для трехмерных систем и в 4-петлевом приближении для двумерных систем был получен в работах [6], [7]. Нами был проведен расчет динамических скейлинговых функций γ_λ в 4-петлевом приближении для двумерной и трехмерной моделей Изинга [4]. В результате функции $\beta(g)$ и $\gamma_\lambda(g)$

представляются в виде следующих рядов по заряду g : для двумерной модели

$$\begin{aligned}\frac{\beta(g)}{g} &= -1 + g - 0.716174g^2 + 0.930767g^3 - 1.582388g^4, \\ \gamma_\lambda(g) &= 0.027053g^2 - 0.004184g^3 + 0.022130g^4,\end{aligned}\quad (13)$$

для трехмерной

$$\begin{aligned}\frac{\beta(g)}{g} &= -1 + g - 0.422497g^2 + 0.351070g^3 - 0.376527g^4 + \\ &\quad + 0.495548g^5 - 0.749689g^6, \\ \gamma_\lambda(g) &= 0.008399g^2 - 0.000045g^3 + 0.020423g^4.\end{aligned}\quad (14)$$

На основе метода, предложенного Липатовым [12], в работе [13] было показано, что, хотя общий член ряда для функции $\beta(g)$ растет факториально:

$$\beta(g) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g^n, \quad c_n \approx c(-a)^n n^b n! \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right], \quad (15)$$

тем не менее ряд удовлетворяет условию асимптотической сходимости

$$\left| \beta(g) - \sum_{n=0}^N c_n g^n \right| \leq C \sigma^{N+1} [(N+1)!]^\sigma |g|^{N+1} \quad (16)$$

в клиновидной области $|\arg g| \leq (\pi/2)\sigma$ на комплексной плоскости; C, σ – некоторые константы. Сшивку асимптотики (15) со значениями первых коэффициентов дает информацию обо всех членах ряда и позволяет приближенно восстановить функцию $\beta(g)$, однако это требует специальной процедуры суммирования асимптотически сходящихся рядов. Для суммирования подобных рядов разработаны специальные методы [6]–[9], [14], из которых наиболее эффективными являются методы Паде–Бореля (ПБ), ПБЛ и КО. В работах [15] техника Липатова оценки высоких порядков теории обобщается на критическую динамику и доказывается, что асимптотика Липатова остается справедливой и для динамической РГ-функции γ_λ . Поэтому указанные методы суммирования, которые успешно зарекомендовали себя при анализе статических РГ-функций, могут быть соответственно применены и для анализа динамических РГ-функций.

Для неупорядоченной трехмерной модели Изинга полученные представления функций β_g, β_v и γ_λ в виде рядов по зарядам g и v имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\beta_g}{g} &= -1 + g + \frac{3}{2}v - \frac{308}{729}g^2 - \frac{104}{81}gv - \frac{185}{216}v^2 + \sum_{i+j \geq 3} b_{i,j}^{(g)} g^i v^j, \\ \frac{\beta_v}{v} &= -1 + \frac{2}{3}g + v - \frac{92}{729}g^2 - \frac{50}{81}gv - \frac{95}{216}v^2 + \sum_{i+j \geq 3} b_{i,j}^{(v)} g^i v^j, \\ \gamma_\lambda &= \sum_{i,j=0}^3 \gamma_{i,j} g^i v^j = -\frac{1}{4}v + 0.008400g^2 + 0.030862gv + 0.053240v^2 - \\ &\quad - 0.012642g^3 - 0.041167g^2v - 0.152964gv^2 - 0.049995v^3,\end{aligned}\quad (17)$$

где коэффициенты $b_{i,j}^{(g)}$, $b_{i,j}^{(v)}$ и $\gamma_{i,j}$ вычислены в работах [9] и [5] в 6-петлевом и 3-петлевом приближениях, соответственно.

Предварительно рассмотрим применение методов суммирования ПБ, ПБЛ и КО на примере точно решаемой задачи об определении энергии основного состояния линейного ангармонического осциллятора с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = p^2 + x^2 + gx^4. \quad (18)$$

Это позволит выделить особенности применения каждого из методов суммирования, сопоставить точность применяемых аппроксимаций в зависимости от числа учитываемых членов рядов. В соответствии с работой [16] энергия основного состояния $E_0(g)$ осциллятора может быть представлена в виде ряда теории возмущений по константе ангармонизма g , первые члены которого имеют вид

$$E_0(g) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g^n = 1 + \frac{3}{4}g - \frac{21}{16}g^2 + \frac{333}{64}g^3 - \frac{30885}{1024}g^4 + \frac{916731}{4096}g^5 - \frac{65518401}{32768}g^6 + \dots, \quad (19)$$

а точные значения E_0 в зависимости от g приведены в статье [17]. В работе [16] показано, что общий член ряда (19) растет факториально аналогично выражению (15).

Идея метода ПБ состоит в том, что ряд типа (19) представляется интегралом

$$f(g) = \int_0^{\infty} e^{-t} B(gt) dt, \quad B(g) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n g^n, \quad B_n = \frac{c_n}{n!}. \quad (20)$$

В этом выражении $B(g)$ носит название борелевского образа. Борелевский образ в соответствии с асимптотикой (15) сходится в круге радиуса $1/a$. К $B(g)$ затем применяется аппроксимация Паде, состоящая в использовании для $B(g)$ рациональной функции вида

$$\left[\frac{L}{M} \right] = \frac{\sum_{i=0}^L a_i g^i}{\sum_{j=0}^M b_j g^j}, \quad M \geq 1, \quad (21)$$

разложение которой в ряд Тейлора (в окрестности точки $g = 0$) совпадает с разложением борелевского образа до тех пор, пока это возможно. Функция вида (21) имеет $L + 1$ коэффициентов в числителе и $M + 1$ коэффициентов в знаменателе, так что весь набор коэффициентов определяется с точностью до общего множителя, и для определенности полагают $b_0 = 1$. В результате получается всего $L + M + 1$ свободных параметров. Это означает, что в общем случае коэффициенты разложения функции $[L/M]$ в ряд Тейлора должны совпадать с соответствующими коэффициентами ряда (19). Если ряд имеет конечное число членов ряда N , на аппроксиманты $[L/M]$ накладывается условие $L + M \leq N$.

Обобщением метода ПБ является метод ПБЛ, для которого формулы (20) записываются в расширенной форме:

$$f(g) = \int_0^{\infty} t^b e^{-t} B(gt) dt, \quad B(g) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n g^n, \quad B_n = \frac{c_n}{\Gamma(n + b + 1)}, \quad (22)$$

Рис. 1. Область аналитичности борелевского образа на комплексной плоскости с разрезом $(-\infty, -1/a)$ вдоль вещественной оси (а) и ее конформное отображение на единичный круг (б).

где b – произвольный параметр. В простейшем случае реализации метода, например, рассматриваются значения $b = 0$ и $b = 1$, а затем анализируются изменения в аппроксимациях ряда за счет изменения параметра b , которые позволяют сделать вывод о погрешностях аппроксимаций методами ПБ и ПБЛ. В нашем случае применения метода ПБЛ к рядам, определяющим характеристики критического поведения однородных и неупорядоченных систем, выбран в качестве тестового ряд (19) для точно решаемой задачи об энергии ангармонического осциллятора с асимптотической сходимостью ряда, аналогичной сходимости рядов (13), (14) теории критических явлений. Поэтому при применении метода ПБЛ к рядам (13), (14) теории критических явлений планируется использовать те значения параметра b , которые приведут к наилучшим аппроксимациям ряда (19).

Рассмотрим основные принципы применения метода КО к борелевскому образу (при $b = 0$). В соответствии с асимптотикой (15) борелевский образ аналитичен в комплексной плоскости g с разрезом от $-1/a$ до $-\infty$ (рис. 1а). Так как интегрирование в формулах (22) осуществляется по всей вещественной оси, то возникает необходимость в аналитическом продолжении $B(g)$ за пределы круга сходимости $|g| < 1/a$ на произвольные комплексные g , реализуемое конформным преобразованием $g = w(u)$ с

$$w(u) = \frac{4}{a} \frac{u}{(1-u)^2}, \quad u = \frac{(1+ag)^{1/2} - 1}{(1+ag)^{1/2} + 1}, \quad (23)$$

отображающим плоскость с разрезом на единичный круг $|u| < 1$ (рис. 1б). Таким образом, представление $B(g)$ в виде ряда по u дает сходящийся ряд при любых g :

$$B(g) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n g^n \Big|_{g=w(u)} \implies B(u) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n u^n. \quad (24)$$

Действительно, все возможные особые точки $P, Q, R, \dots$ функции $B(g)$ лежат вдоль

Рис. 2. Сопоставление точных значений энергии основного состояния ангармонического осциллятора E_0 (черные квадраты) для различных значений константы ангармонизма g с результатами применения методов суммирования ПБ с различными $[L/M]$ (сплошные линии), ПБЛ с отобранным значением параметра $b = 2.221426$ для аппроксиманта $[1/1]$ (белые кружки) и КПБ со значением постоянной $a = 3$ (звездочки).

разреза, а их образы $P, Q, Q', R, R', \dots$ – на границе круга $|u| = 1$, так что второй из рядов (24) сходится при всех $|u| < 1$. Связь коэффициентов U_n и B_n выражается следующим образом:

$$U_0 = B_0, \quad U_n = \sum_{m=1}^n B_m \left(\frac{4}{a}\right)^m C_{n+m-1}^{n-m}, \quad n \geq 1. \quad (25)$$

Эти формулы решают поставленную задачу: борелевский образ $B(u(g))$ сходится для любых особых точек $g = \infty$, $g = -1/a$ и $g = g_0$ с $g_0 \in (-\infty, -1/a)$, а коэффициенты U_n для него связаны линейным преобразованием (25) с исходными коэффициентами c_n и параметром b (см. формулы (22)). Поскольку для любых g переменная $|u| < 1$, то к ряду по переменной u можно эффективно применять аппроксимацию Паде. Назовем такую процедуру методом конформного Паде–Бореля (КПБ).

На рис. 2 представлено сравнение применяемых к ряду для энергии основного состояния ангармонического осциллятора аппроксимаций с точными значениями E_0 при использовании метода ПБ с различными типами аппроксимант Паде $[L/M]$, а также методов ПБЛ и КПБ (при $a = 3$ [16]) с аппроксимантой $[1/1]$. Из рис. 2 видно, что погрешность аппроксимации методом ПБ сильно растет с увеличением

значений g , хотя ситуация улучшается с ростом числа учитываемых членов ряда N и с использованием диагональных и близких к диагональному виду аппроксимант. Методы же ПБЛ при $b = 2.221426$ (в выражении (26)) и КПБ даже для аппроксиманты $[1/1]$ дают результаты, близкие к точным значениям E_0 в рассматриваемом интервале изменений переменной g . С ними оказываются сравнимыми по точности лишь результаты использования “лучшей” диагонального вида аппроксиманты $[2/2]$ в методе ПБ.

При реализации метода ПБЛ интегральное преобразование Бореля удобнее осуществлять в следующем виде:

$$f(g) = \int_0^\infty dt e^{-t} B(gt^b), \quad B(g) = \sum_{n=0}^\infty B_n g^n, \quad B_n = \frac{c_n}{\Gamma(bn + 1)}, \quad (26)$$

где параметр b для всех $[L/M]$ подбирается из требования, чтобы среднее квадратичное отклонение аппроксимаций от точных значений E_0 на всем интервале изменения g было минимальным. Использование выражения (26) позволяет добиться значительно лучшего соответствия точному значению E_0 , чем использование (22). При этом данное преобразование в отличие от преобразования (22) позволяет при указанном выше вариационном способе подбора значений b избежать появления особенностей в подинтегральном выражении. В табл. 1 представлены значения суммы квадратов отклонений S^2 для вычисленных значений энергии осциллятора E_0 при применении различных аппроксимаций от точных значений E_0 для методов ПБ, ПБЛ и КПБ. В табл. 1 не приведены результаты применения аппроксимант типа $[0/N]$, так как было выявлено, что для четных N их использование приводит к очень большим отклонениям суммы ряда от точного решения и отсутствию в погрешности S^2 минимума по b (наблюдается лишь небольшое уменьшение S^2 с ростом b), а для нечетных N возникают неустраняемые для любых значений b особенности в борелевском образе, соответствующем данной аппроксиманте. Для аппроксимант типа $[1/N - 1]$ было найдено по два значения параметра b , характеризуемых близкими значениями погрешности S^2 . Сопоставление приведенных значений S^2 наглядно показывает более высокую точность применения метода ПБЛ по сравнению с методом ПБ. Лишь начиная с аппроксимант пятого порядка, близких к диагональному виду, метод ПБ позволяет получать значения, сравнимые по точности с результатами применения метода ПБЛ. Это делает метод ПБЛ более предпочтительным для анализа коротких рядов, полученных при описании критической динамики однородных (13), (14) и неупорядоченных систем (17). Отметим также, что метод КПБ является вторым по точности среди рассмотренных методов и не уступает по точности методу ПБЛ, начиная с аппроксимант пятого порядка по N (за исключением случая применения аппроксиманты $[4/2]$). Метод ПБ, уступая по точности методу КПБ для коротких рядов, позволяет получать сравнимые с ним результаты лишь для диагональной аппроксиманты $[2/2]$ и близких к диагональному виду аппроксимант $[3/2]$ и $[4/2]$.

Рассмотрим теперь применение описанных выше методов к расчету динамического критического индекса z для однородной модели Изинга, описывающей критическое поведение систем с размерностями $d = 2$ и $d = 3$. Как отмечалось выше,

ТАБЛИЦА 1. Значения сумм квадратов отклонений вычисленных значений энергии осциллятора E_0 при применении методов ПБ, ПБЛ и КПБ от точных значений E_0 (пробелы отражают наличие полюса в борелевском образе при использовании соответствующей аппроксиманты)

$[L/M]$	[1/1]	[1/2]	[2/1]	[1/3]	[2/2]	[3/1]	[1/4]	[2/3]
$S_{\text{ПБ}}^2$	0.013923	–	0.002703	0.016687	0.000105	0.002535	–	–
b	2.221426	1.582184	1.466092	1.276639	1.131538	1.194466	2.016677	1.050884
		3.441754		3.879020			4.083434	
$S_{\text{ПБЛ}}^2$	0.000011	0.000006	0.000003	0.000007	$3 \cdot 10^{-7}$	0.000001	0.000010	0.000044
		0.000010		0.000008			0.000007	
$S_{\text{КПБ}}^2$	0.000175	0.041795	0.000836	0.000307	0.000192	–	–	0.000011
$[L/M]$	[3/2]	[4/1]	[0/6]	[1/5]	[2/4]	[3/3]	[4/2]	[5/1]
$S_{\text{ПБ}}^2$	0.000001	0.004142	2.609852	0.031233	–	–	0.000247	0.000833
b	1.005754	1.068052	‡	2.445345	0.970348	0.959599	0.964316	1.006032
				4.194370		2.003840		
$S_{\text{ПБЛ}}^2$	$3 \cdot 10^{-7}$	0.000004		0.000007	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	0.000008
				0.000006		$2 \cdot 10^{-7}$		
$S_{\text{КПБ}}^2$	–	–	0.000064	–	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0.003932	0.000003

индекс z определяется при использовании функций $\beta(g)$ и $\gamma_\lambda(g)$. Неподвижная точка g^* РГ-преобразований находится из условия $\beta(g^*) = 0$. В табл. 2 приведены значения неподвижной точки g^* и динамического критического индекса z для двумерной и трехмерной моделей Изинга, полученные методами ПБ, ПБЛ (при значениях параметра b для соответствующих аппроксимант в задаче осциллятора) и КПБ, где для последнего постоянная a в соответствии с работами [7] принималась равной 0.238659217 для $d = 2$ и 0.14777422 для $d = 3$. В методах ПБ и ПБЛ при суммировании ряда для функции $2 + \gamma_\lambda$ использовалась наилучшая (суммируемая) для них аппроксиманта четвертого порядка $[3/1]$, а в методе КПБ оказались несуммируемыми все аппроксиманты, отличные от $[N/0]$, в результате чего был реализован лишь простой метод КО.

Процедура усреднения результатов, получаемых при применении метода ПБ с учетом аппроксимант порядка $N \geq 4$, позволила получить следующие значения заряда g^* в неподвижной точке и индекса z :

$$\begin{aligned} g^* &= 1.7987 \pm 0.0201, & z &= 2.0847 \pm 0.0019, & d &= 2, \\ g^* &= 1.4270 \pm 0.0074, & z &= 2.0171 \pm 0.0002, & d &= 3; \end{aligned}$$

при применении метода ПБЛ –

$$\begin{aligned} g^* &= 1.7012 \pm 0.0115, & z &= 2.0757 \pm 0.0010, & d &= 2, \\ g^* &= 1.4125 \pm 0.0046, & z &= 2.0168 \pm 0.0001, & d &= 3; \end{aligned}$$

Таблица 2. Значения неподвижной точки g^* и динамического критического индекса z для двумерной и трехмерной моделей Изинга, полученные методами ПБ, ПБЛ и КПБ

		[L/M]	[1/1]	[1/2]	[2/1]	[1/3]	[3/1]	[1/4]	[2/3]
$d = 2$	ПБ	g^*	2.1971	—	1.8210	1.8271	1.7702		
		z	2.1262		2.0868	2.0873	2.0820		
	ПБЛ	g^*	1.6978	1.7098	—	1.7174	1.6849		
		z	2.0753	2.0764		2.0771	2.0742		
	КПБ	g^*	2.1448	—	1.9137	—	1.8193		
		z	2.1270		2.1018		2.0922		
$d = 3$	ПБ	g^*	1.5508	—	1.4314	1.4230	1.4175	1.4427	1.4753
		z	2.0202		2.0172	2.0170	2.0169	2.0175	2.0183
	ПБЛ	g^*	1.3972	1.4019	1.4671	1.4056	1.4049	1.4073	—
		z	2.0166	2.0165		2.0166	2.0166	2.0166	
	КПБ	g^*	1.5385	—	1.4552	—	1.4267	1.4253	—
		z	2.0452		2.0393		2.0374	2.0373	
		[L/M]	[3/2]	[4/1]	[1/5]	[2/4]	[3/3]	[4/2]	[5/1]
$d = 3$	ПБ	g^*	1.4234	1.4292	—	1.4263	—	1.4200	1.3854
		z	2.0170	2.0172		2.0171		2.0169	2.0161
	ПБЛ	g^*	1.4234	1.4355	1.4082	—	1.4221	1.4208	1.3848
		z	2.0170	2.0173	2.0167		2.0170	2.0170	2.0161
	КПБ	g^*	1.4242	1.4245	—	—	—	—	1.4147
		z	2.0372	2.0373					2.0366

при использовании метода КПБ —

$$\begin{aligned}
 g^* &= 1.8193, & z &= 2.0922, & d &= 2, \\
 g^* &= 1.4231 \pm 0.0019, & z &= 2.0372 \pm 0.0001, & d &= 3.
 \end{aligned}$$

Отметим, что все полученные значения заряда g^* в неподвижной точке для $d = 3$ хорошо согласуются с результатом работы Ле Гийу и Зин-Жюстина [7]: $g^* = 1.416 \pm 0.005$.

Усреднение приведенных выше значений, полученных разными методами, дает итоговые величины:

$$\begin{aligned}
 g^* &= 1.7731 \pm 0.0297, & z &= 2.0842 \pm 0.0039, & d &= 2, \\
 g^* &= 1.4209 \pm 0.0035, & z &= 2.0237 \pm 0.0055, & d &= 3.
 \end{aligned}$$

В случае описания критического поведения неупорядоченных систем ряды теории

для функций β_g , β_v и γ_λ (17) будут двухпараметрическими:

$$F(v, g) = \sum_{i,j} C_{i,j} v^i g^j, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

К таким рядам методы, описанные выше, напрямую применять нельзя. Они нуждаются в модификации на случай нескольких переменных. Один из методов, допускающих такую возможность, носит название λ -метода. Суть его заключается во введении обобщенного ряда

$$\tilde{F}(v, g; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(v, g) \lambda^n, \quad \tilde{C}_n(v, g) = \sum_{i,j} C_{i,j} v^i g^j \delta_{i+j,n}, \quad (28)$$

который при $\lambda = 1$ сводится к исходному ряду (27). Такой ряд можно считать зависящим от одной переменной λ , коэффициенты разложения в котором являются функциями u и v . Преобразование Бореля ряда (27) имеет вид

$$F(v, g) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} B(vt^b, gt^b), \quad B(v, g) = \sum_{i,j} \frac{C_{i,j}}{\Gamma((i+j)b+1)} v^i g^j. \quad (29)$$

Борелевский образ с помощью λ -метода сводится к зависимости лишь от одной переменной λ , к которому затем применяется метод аппроксимант Паде и осуществляется вычисление интеграла.

При применении метода КО к двухпараметрическим рядам используется замена $\delta = v/u$, с помощью которой ряд (27) можно переписать как

$$F(v, g)|_{g=\delta v} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_n(\delta) v^n. \quad (30)$$

Преобразование Бореля при этом принимает вид

$$F(v, \delta) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} B(vt^b, \delta), \quad B(v, \delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{C}_n(\delta)}{\Gamma(nb+1)} v^n. \quad (31)$$

Конформное преобразование определяется формулой

$$u(v) = \frac{\sqrt{1 + \alpha(\delta)v} - 1}{\sqrt{1 + \alpha(\delta)v} + 1}. \quad (32)$$

При использовании метода КО к рядам теории критического поведения неупорядоченных систем задача усложняется тем, что асимптотика рядов в этом случае не известна. В работе [9] для модели Изинга предлагается $\alpha(\delta)$ брать в следующем виде:

$$\alpha(\delta) = a \left(\frac{9}{8} + \delta \right), \quad \delta < 0, \quad \delta > 4,$$

где для трехмерной модели Изинга $a = 0.14777422$.

Рассмотрим теперь применение этих двух методов к рядам (17), характеризующим неравновесное критическое поведение неупорядоченной модели Изинга. В табл. 3 приведены результаты применения данных методов суммирования к расчету координат неподвижной точки, задающей критическое поведение неупорядоченных систем, и индекса z . В методах ПБ и ПБЛ при суммировании ряда для функции $2 + \gamma_\lambda$ использовалась наилучшая для них аппроксиманта третьего порядка $[2/1]$, а в методе КПБ – аппроксиманта $[1/2]$. Из табл. 3 видно, что все эти методы дают близкие значения для вершин в неподвижных точках и индекса z .

ТАБЛИЦА 3. Результаты применения методов ПБ, ПБЛ и КПБ к расчету неподвижных точек и динамического критического индекса z для неупорядоченной модели Изинга

$[L/M]$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$		$N = 5$			$N = 6$	
	$[1/1]$	$[1/2]$	$[2/2]$	$[3/1]$	$[1/4]$	$[3/2]$	$[4/1]$	$[4/2]$	$[5/1]$
ПБ									
v^*	-0.5868	-0.6894	-0.7383	-0.6991	-0.6394	-0.7146	-0.7201	-0.7125	
g^*	2.3900	2.2402	2.2743	2.2411	2.2497	2.2640	2.2705	2.2583	
z	2.1509	2.1756	2.1878	2.1780	2.1633	2.1819	2.1833	2.1814	
ПБЛ									
v^*	-0.6862	-0.7001	-0.7000	-0.7142	-0.6900	-0.7142	-0.7089	-0.7141	
g^*	2.3895	2.2499	2.2499	2.2459	2.2601	2.2638	2.2646	2.2600	
z	2.1757	2.1787	2.1787	2.1822	2.1762	2.1823	2.1809	2.1822	
КПБ									
v^*		-0.6800	-0.6700	-0.6808	-0.7302	-0.7239		-0.7321	-0.7321
g^*		2.1654	2.1342	2.2562	2.3079	2.2671		2.2763	2.2799
z		2.1716	2.1691	2.1710	2.1844	2.1831		2.1854	2.1853

Применим процедуру усреднения к полученным результатам, используя все значения аппроксимант $[L/M]$, кроме $[1/1]$. Ниже приведены средние значения координат неподвижной точки и индекса z , полученные с использованием метода ПБ:

$$v^* = -0.7019 \pm 0.0111, \quad g^* = 2.2569 \pm 0.0048, \quad z = 2.1788 \pm 0.0027;$$

метода ПБЛ:

$$v^* = -0.7059 \pm 0.0033, \quad g^* = 2.2563 \pm 0.0026, \quad z = 2.1802 \pm 0.0008;$$

метода КПБ:

$$v^* = -0.7070 \pm 0.0100, \quad g^* = 2.2410 \pm 0.0227, \quad z = 2.1786 \pm 0.0026.$$

Полученные различными методами близкие значения координат неподвижной точки и индекса z , практически совпадающие в пределах погрешностей, говорят о

достоверности полученных результатов. Усреднение данных значений, полученных разными методами, дает итоговые величины:

$$v^* = -0.7049 \pm 0.0013, \quad g^* = 2.2514 \pm 0.0042, \quad z = 2.1792 \pm 0.0004.$$

В работе [5] при расчете динамического критического индекса z с применением метода Чисолма–Борея было получено значение $z = 2.1653$. Это значение индекса неплохо коррелирует с полученными в настоящей работе результатами.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе впервые осуществлено последовательное применение методов суммирования ПБ, ПБЛ и КО с последующим использованием аппроксимации Падэ (метод КПБ) для определения значений динамического критического индекса z для однородных двумерных и трехмерных систем, описываемых моделью Изинга, а также неупорядоченных изингоподобных систем. Анализ был осуществлен на доступных к настоящему времени лишь коротких рядах теории, соответствующих результатам 4-петлевого описания критической динамики однородных систем и 3-петлевого описания неупорядоченных систем [4], [5].

Проведем сопоставление полученных результатов с экспериментальными данными и результатами компьютерного моделирования критической динамики методами Монте-Карло. Критическая динамика однородного изинговского антиферромагнетика FeF_2 экспериментально была исследована в работе [18], и было получено значение $z = 2.1 \pm 0.1$, которое в рамках достаточно широкого интервала погрешности измерения z не противоречит нашим результатам теоретико-полевого расчета с использованием методов суммирования. Численные исследования методами Монте-Карло критической динамики однородной трехмерной модели Изинга в соответствии с различными литературными данными привели к следующим значениям динамического критического индекса: $z = 1.99 \pm 0.02$ [19], $z = 1.97 \pm 0.08$ [20], $z = 2.04 \pm 0.03$ [21], $z = 2.04 \pm 0.01$ [22], $z = 2.032 \pm 0.004$ [23]. Данные значения индекса z находятся в хорошем согласии с полученными в настоящей работе результатами и убеждают, что предсказываемое нами значение $z = 2.0237 \pm 0.0055$ является достаточно надежным.

Что касается двумерной однородной модели Изинга, то численные исследования ее критической динамики в отличие от аналогичных исследований трехмерной модели характеризуются гораздо большим разбросом получаемых значений для динамического критического индекса: $z = 2.14 \pm 0.02$ [24], $z = 2.13 \pm 0.03$ [25], $z = 2.076 \pm 0.005$ [26], $z = 2.24 \pm 0.04$ [27], $z = 2.24 \pm 0.07$ [28], $z = 2.16 \pm 0.04$ [29], $z = 2.1667 \pm 0.0005$ [30]. Такой разброс значений z во многом объясняется тем, что критическое поведение двумерной модели Изинга характеризуется как гораздо большими по сравнению с трехмерной моделью амплитудами флуктуаций параметра порядка в критической области, так и более значительными эффектами критического замедления.

Применение метода высокотемпературного разложения к описанию критической динамики двумерной модели Изинга дает значение $z = 2.125$ [31].

Таким образом, полученные в цитируемых работах для двумерной модели Изинга значения индекса z лежат в достаточно широком интервале $2,07 \leq z \leq 2,31$, в то время как полученные в настоящей работе значения находятся на его нижней границе. Это поднимает ценность полученных нами значений как ориентиров для будущих исследований.

Проведем теперь сопоставление рассчитанных в данной работе значений динамического критического индекса для неупорядоченных систем с результатами компьютерного моделирования критической динамики неупорядоченной трехмерной модели Изинга: $z = 2.19 \pm 0.07$ для систем со спиновой концентрацией $p = 0.95$, $z = 2.20 \pm 0.08$ при $p = 0.8$, $z = 2.58 \pm 0.09$ при $p = 0.6$ и $z = 2.65 \pm 0.12$ при $p = 0.4$ [20]; $z = 2.16 \pm 0.01$ при $p = 0.95$, $z = 2.232 \pm 0.004$ при $p = 0.9$, $z = 2.38 \pm 0.01$ при $p = 0.8$ и $z = 2.93 \pm 0.03$ при $p = 0.6$ [32]. Данные результаты моделирования критической динамики находятся в достаточно хорошем согласии с результатами теоретико-полевого расчета с использованием методов суммирования лишь для слабо неупорядоченных систем с $p \geq 0.8$, в то время как для сильно неупорядоченных систем наблюдается заметное расхождение результатов. При этом следует отметить, что результаты РГ-описания критического поведения неупорядоченных систем справедливы лишь в области слабой неупорядоченности. Для объяснения наблюдаемой при компьютерном моделировании зависимости индекса z от величины структурного беспорядка в работе [20] была предложена гипотеза ступенчатой универсальности, согласно которой в системах при спиновых концентрациях выше порога спиновой перколяции может наблюдаться несколько типов различного критического поведения в зависимости от того, существует ли в системе лишь один спиновый протекающий кластер, как в случае слабо неупорядоченных систем, или наряду со спиновым протекающим кластером реализуется и примесный протекающий кластер, как в случае сильно неупорядоченных систем с существованием переходных режимов между областями. В работе [32] автор, исходя из концепции универсальности критического поведения неупорядоченных систем и независимости асимптотического значения индекса z при $L \rightarrow \infty$ от степени беспорядка, на основе приведенных выше эффективных значений индекса получил его асимптотическое значение $z = 2.4 \pm 0.1$. Однако данное значение индекса находится в сильном несоответствии с полученными в настоящей работе результатами. В работе [33] был проведен анализ численного исследования критической динамики трехмерной модели Изинга со спиновой концентрацией, изменяющейся в широком интервале. Авторы, предполагая универсальность критического поведения неупорядоченных систем, выделили асимптотическое значение индекса $z = 2.62 \pm 0.07$ с учетом эффектов влияния ведущих поправок к скейлинговой зависимости для динамической восприимчивости системы. При этом полученное в работе [33] значение индекса поправки к скейлингу $\omega = 0.50 \pm 0.13$ находится в сильном несоответствии с результатами теоретико-полевого расчета статических критических индексов, осуществленного с применением методов суммирования в работе [9] и давшего значение $\omega = 0.25 \pm 0.10$, а также с результатами численного исследования статического критического поведения той же модели [34], проведенного также с учетом эффектов влияния ведущих поправок к скейлинговой зависимости термодинамических величин и корреляционных функций с $\omega = 0.37 \pm 0.06$. При

осуществленных в работе [33] аппроксимациях наибольшими погрешностями характеризовались результаты для слабо неупорядоченных систем. Заметим также, что полученное в работе [33] значение динамического критического индекса z находится в еще более сильном несоответствии с результатами настоящей работы.

Экспериментальное исследование критической динамики неупорядоченного изинговского антиферромагнетика $\text{Fe}_{0.46}\text{Zn}_{0.54}\text{F}_2$ было осуществлено в работе [18], в которой было получено значение $z = 1.7 \pm 0.2$. Данный результат находится в противоречии как с результатами теоретико-полевого расчета с использованием методов суммирования, так и с приведенными выше результатами компьютерного моделирования. Это несоответствие, возможно, обусловлено высокой концентрацией примеси в исследованном образце и наличием крупномасштабных неоднородностей в нем, что существенно сказывается на характеристиках неравновесного критического поведения. Однако в другой экспериментальной работе [35] по исследованию критической динамики слабо разбавленного изинговского магнетика $\text{Fe}_{0.9}\text{Zn}_{0.1}\text{F}_2$ в результате проведенного методом мессбауэровской спектроскопии высокоточного измерения динамического уширения мессбауэровских линий было получено значение динамического критического индекса $z = 2.18 \pm 0.10$. Данное значение находится в прекрасном соответствии с результатами проведенных нами расчетов. Тем не менее возникает настоятельная необходимость дополнительных как экспериментальных, так и численных исследований критической динамики неупорядоченных изингоподобных систем. Полученные в данной статье результаты расчета динамического критического индекса для неупорядоченных систем будут служить ориентирами для подобных исследований.

Благодарности. Исследования поддержаны РФФИ (гранты № 04-02-17524, 04-02-39000 и 05-02-16188).

Список литературы

- [1] P. C. Hohenberg, B. I. Halperin, *Rev. Mod. Phys.*, **49** (1977), 435.
- [2] R. Bausch, H. K. Janssen, H. Wagner, *Z. Phys. B*, **24** (1976), 113; C. De Dominicis, E. Brézin, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. B*, **12** (1975), 4945; Н. В. Антонов, А. Н. Васильев, *ТМФ*, **60** (1984), 59; B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, S. Ma, *Phys. Rev. Lett.*, **29** (1972), 1548; B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, E. D. Siggia, S. Ma, *Phys. Rev. B*, **13** (1976), 2110.
- [3] В. В. Прудников, А. Н. Вакилов, *ЖЭТФ*, **101** (1992), 1853.
- [4] В. В. Прудников, А. В. Иванов, А. А. Федоренко, *Письма в ЖЭТФ*, **66** (1997), 793.
- [5] В. В. Прудников, С. В. Белим, А. В. Иванов и др., *ЖЭТФ*, **114** (1998), 972.
- [6] G. A. Baker, B. G. Nickel, M. S. Green, D. I. Meiron, *Phys. Rev. Lett.*, **36** (1976), 1351; *Phys. Rev. B*, **17** (1978), 1365.
- [7] J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.*, **39** (1977), 95; *Phys. Rev. B*, **21** (1980), 3976.
- [8] S. A. Antonenko, A. I. Sokolov, *Phys. Rev. B*, **51** (1995), 1894.
- [9] A. Pelissetto, E. Vicari, *Phys. Rev. B*, **62** (2000), 6393.
- [10] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, Clarendon Press, Oxford, 1996; А. Н. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамики*, ПИЯФ, С.-Петербург, 1998.
- [11] В. С. Доценко, *УФН*, **165** (1995), 481.

- [12] Л. Н. Липатов, *ЖЭТФ*, **72** (1977), 411.
- [13] E. Brézin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. D*, **15** (1977), 1544.
- [14] Г. Харди, *Расходящиеся ряды*, Иностран. лит., М., 1951; Д. И. Казаков, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков, *ТМФ*, **38** (1979), 15; Д. И. Казаков, В. С. Попов, *ЖЭТФ*, **122** (2002), 675; И. М. Суслов, *ЖЭТФ*, **120** (2001), 5.
- [15] J. Honkonen, M. V. Komarova, M. Yu. Nalimov, *Nucl. Phys. B*, **714** (2005), 292; **707**, 493; [hep-th/0406168](#).
- [16] C. M. Bender, T. T. Wu, *Phys. Rev.*, **184** (1969), 1231.
- [17] J. Čížek, E. R. Vrscaj, *Int. J. Quant. Chem.*, **21** (1982), 27.
- [18] D. P. Belanger, B. Fagaro, V. Jaccarino et al, *J. Phys. Collque C8*, **49** (1988), 1229.
- [19] R. B. Pearson, J. L. Richardson, D. Toussaint, *Phys. Rev. B*, **31** (1985), 4472.
- [20] В. В. Прудников, А. Н. Вакилов, *ЖЭТФ*, **103** (1993), 962.
- [21] S. Wansleben, D. P. Landau, *Phys. Rev. B*, **43** (1991), 6006.
- [22] U. Gropengiessen, *Physica A*, **213** (1995), 308.
- [23] P. Grassberger, *Physica A*, **214** (1995), 547.
- [24] C. Kalle, *J. Phys. A*, **17** (1984), L801.
- [25] J. K. Williams, *J. Phys. A*, **18** (1985), 49.
- [26] M. Mori, Y. Tsuda, *Phys. Rev. B*, **37** (1988), 5444.
- [27] P. H. Poole, N. Jan, *J. Phys. A*, **23** (1990), L453.
- [28] V. V. Prudnikov, O. N. Markov, *Europhys. Lett.*, **29** (1995), 245.
- [29] F. Wang, N. Hatane, M. Suzuki, *J. Phys. A*, **28** (1995), 4543.
- [30] M. P. Nightingale, H. W. J. Blöte, *Phys. Rev. B*, **62** (2000), 1089.
- [31] Z. Racz, M. F. Collins, *Phys. Rev. B*, **13** (1976), 3074.
- [32] H.-O. Heuer, *J. Phys. A*, **26** (1993), L341.
- [33] G. Parisi, F. Ricci-Tersenghi, J. J. Ruiz-Lorenzo, *Phys. Rev. E*, **60** (1999), 5198.
- [34] H. G. Ballesteros, L. A. Fernandez, V. Martin-Mayor et al, *Phys. Rev. B*, **58** (1998), 2740.
- [35] N. Rosov, C. Hohenemser, M. Eibschutz, *Phys. Rev. B*, **46** (1992), 3452.

Поступила в редакцию 25.VII.2005 г.,
после доработки 8.IX.2005 г.