Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Спиридонов, Модулярность и полная эллиптичность некоторых многократных рядов гипергеометрического типа, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 3, 462–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:57:06

© 2003 г.

В. П. Спиридонов*

МОДУЛЯРНОСТЬ И ПОЛНАЯ ЭЛЛИПТИЧНОСТЬ НЕКОТОРЫХ МНОГОКРАТНЫХ РЯДОВ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

Приводятся новые аргументы в пользу справедливости гипотезы о том, что любой полностью эллиптический гипергеометрический ряд модулярен. Кратко обсуждается обобщение таких рядов на римановы поверхности произвольного рода.

Ключевые слова: тета-функции, эллиптические гипергеометрические ряды, модулярная группа, формулы суммирования.

Следующее общее определение эллиптических гипергеометрических функций было дано в работе [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Формальные (многократные) ряды

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n=0}^{\infty} c(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{или} \quad \sum_{0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \infty} c(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (1)$$

определяют *эллиптические гипергеометрические функции*, если:

- 1) коэффициенты $c(\lambda)$ симметричны относительно действия группы перестановок $\mathcal{S}_n$ на индексы суммирования $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и свободные параметры, входящие в $c(\lambda)$;
- 2) для любых $\ell = 1, \dots, n$ отношения

$$h_\ell(\lambda) = \frac{c(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell + 1, \dots, \lambda_n)}{c(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell, \dots, \lambda_n)} \quad (2)$$

являются эллиптическими функциями индексов λ_ℓ , $\ell = 1, \dots, n$, рассматриваемых как комплексные переменные.

Удобно принять начальное условие $c(0, \dots, 0) = 1$, при котором коэффициенты $c(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_j \in \mathbb{N}$, однозначно определяются функциями $h_\ell(\lambda)$ после решения n рекуррентных соотношений первого порядка (2).

*Институт математики им. Макса Планка, Бонн, Германия; Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: spiridon@thsun1.jinr.ru

При $n = 1$ отправной точкой служит общая эллиптическая функция порядка $r + 1$, которая может быть факторизована следующим образом [2]:

$$h(\lambda) = z \frac{\theta_1(u_0 + \lambda, \dots, u_r + \lambda; \sigma, \tau)}{\theta_1(v_0 + \lambda, \dots, v_r + \lambda; \sigma, \tau)} = z \frac{\theta(t_0 q^\lambda, \dots, t_r q^\lambda; p)}{\theta(w_0 q^\lambda, \dots, w_r q^\lambda; p)}, \quad (3)$$

$$\theta_1(u_0, \dots, u_k; \sigma, \tau) = \prod_{i=0}^k \theta_1(u_i; \sigma, \tau), \quad \theta(t_0, \dots, t_k; p) = \prod_{i=0}^k \theta(t_i; p),$$

где $p = e^{2\pi i \tau}$, $\text{Im } \tau > 0$, $q = e^{2\pi i \sigma}$ и функция

$$\begin{aligned} \theta_1(u; \sigma, \tau) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n p^{(2n+1)^2/8} q^{(n+1/2)u} = \\ &= p^{1/8} i q^{-u/2} (p; p)_{\infty} \theta(q^u; p), \quad u \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

является одной из стандартных тета-функций Якоби. Функция $\theta(z; p)$ представляется бесконечным произведением вида

$$\theta(z; p) = (z; p)_{\infty} (pz^{-1}; p)_{\infty}, \quad (a; p)_{\infty} = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - ap^n), \quad (4)$$

и обладает следующими свойствами:

$$\theta(pz; p) = \theta(z^{-1}; p) = -z^{-1} \theta(z; p). \quad (5)$$

Иногда для краткости удобно опускать в обозначениях для тета-функций или эллиптических сдвинутых факториалов базовые (q, p) или модулярные (σ, τ) параметры. Мы будем пользоваться также обозначением для эллиптических чисел [3]

$$[u; \sigma, \tau] \equiv \theta_1(u; \sigma, \tau) \quad \text{или} \quad [u] \equiv \theta_1(u).$$

Параметры u_i, v_i, t_i, w_i в (3) связаны друг с другом соотношениями $t_i = q^{u_i}$, $w_i = q^{v_i}$ и удовлетворяют ограничениям

$$\sum_{i=0}^r (u_i - v_i) = 0 \quad \text{или} \quad \prod_{i=0}^r t_i = \prod_{i=0}^r w_i, \quad (6)$$

которые гарантируют, что мероморфная функция $h(\lambda)$ дважды периодическая:

$$h(\lambda + \sigma^{-1}) = h(\lambda), \quad h(\lambda + \tau \sigma^{-1}) = h(\lambda).$$

Напомним, что функция $[u]$ является целой, нечетной ($[-u] = -[u]$) и дважды квазипериодической:

$$[u + \sigma^{-1}] = -[u], \quad [u + \tau \sigma^{-1}] = -e^{-\pi i \tau - 2\pi i \sigma u} [u]. \quad (7)$$

Модулярная $PSL(2, \mathbb{Z})$ группа,

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \sigma \rightarrow \frac{\sigma}{c\tau + d}, \quad (8)$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ и $ad - bc = 1$, генерируется двумя преобразованиями: $\tau \rightarrow \tau + 1$, $\sigma \rightarrow \sigma$ и $\tau \rightarrow -\tau^{-1}$, $\sigma \rightarrow \sigma\tau^{-1}$. В этих двух случаях мы имеем

$$[u; \sigma, \tau + 1] = e^{\pi i/4} [u; \sigma, \tau], \quad (9)$$

$$[u; \sigma/\tau, -1/\tau] = i(-i\tau)^{1/2} e^{\pi i \sigma^2 u^2 / \tau} [u; \sigma, \tau], \quad (10)$$

и знак корня $(-i\tau)^{1/2}$ фиксируется условием положительности его реальной части.

Поместим один из полюсов функции $h(\lambda)$ (3) в точку $\lambda = -1$, положив $v_0 = 1$ или $w_0 = q$ (что является общепринятой нормировкой). Результирующая функция $h(\lambda)$ порождает эллиптический гипергеометрический ряд одной переменной, который мы представим в мультипликативной системе обозначений:

$${}_{r+1}E_r \left(\begin{matrix} t_0, \dots, t_r \\ w_1, \dots, w_r \end{matrix}; q, p; z \right) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\theta(t_0, t_1, \dots, t_r; q)_{\lambda}}{\theta(q, w_1, \dots, w_r; q)_{\lambda}} z^{\lambda}, \quad (11)$$

где эллиптические сдвинутые факториалы определены следующим образом:

$$\theta(t_0, \dots, t_k; p; q)_{\lambda} \equiv \prod_{m=0}^k \prod_{j=0}^{\lambda-1} \theta(t_m q^j; p).$$

В аддитивной форме эллиптические сдвинутые факториалы имеют вид

$$[u_0, \dots, u_k]_{\lambda} \equiv \prod_{m=0}^k \prod_{j=0}^{\lambda-1} [u_m + j; \sigma, \tau].$$

Ряды (11) могут быть определены и без условия эллиптичности (6). Поэтому удобно называть общие ряды гипергеометрического типа, построенные из тета-функций Якоби, *тета-гипергеометрическими рядами*. В этом случае равенства (6) называются *условием балансировки*.

Можно расширить определение (1), (2), заменив двойную периодичность на квазипериодичность (7), характерную для тета-функций Якоби. В результате получаются тета-функциональные аналоги обычных и базисных обобщенных гипергеометрических рядов ${}_sF_r$ и ${}_s\Phi_r$, не содержащих ограничений на параметры типа (6) (подробнее см. [1]).

Тета-гипергеометрические ряды (11) называются *полностью эллиптическими*, если функция $h(\lambda)$ (3) эллиптична не только по переменной λ , но также и по всем свободным параметрам среди u_i, v_i . Как показано в [1], требование полной эллиптичности приводит к дополнительным ограничениям на параметры

$$u_0 + 1 = u_1 + v_1 = \dots = u_r + v_r \quad \text{или} \quad qt_0 = t_1 w_1 = \dots = t_r w_r, \quad (12)$$

которые хорошо известны как условия *вполне уравновешенности* для обычных и базисных гипергеометрических рядов [4]. Это дает некоторое объяснение происхождения самого этого понятия.

В эллиптическом случае условие *совершенной уравновешенности* отличается от соответствующих условий для обычных и базисных гипергеометрических рядов [4]. А именно, оно требует, чтобы в дополнение к условиям (12) четыре параметра были помещены в четыре точки второго порядка эллиптической функции $h(\lambda)$ вокруг некоторой выделенной точки:

$$\begin{aligned} u_{r-3} &= \frac{1}{2}u_0 + 1, & u_{r-2} &= \frac{1}{2}u_0 + 1 - \frac{1}{2\sigma}, \\ u_{r-1} &= \frac{1}{2}u_0 + 1 - \frac{\tau}{2\sigma}, & u_r &= \frac{1}{2}u_0 + 1 + \frac{1+\tau}{2\sigma}, \end{aligned} \quad (13)$$

или в мультипликативной форме

$$t_{r-3} = t_0^{1/2}q, \quad t_{r-2} = -t_0^{1/2}q, \quad t_{r-1} = t_0^{1/2}qp^{-1/2}, \quad t_r = -t_0^{1/2}qp^{1/2}. \quad (14)$$

В результате совершенно уравновешенные тета-гипергеометрические ряды ${}_{r+1}E_r$ принимают вид

$${}_{r+1}E_r = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\theta(t_0 q^{2\lambda}; p)}{\theta(t_0; p)} \prod_{m=0}^{r-4} \frac{\theta(t_m; p; q)_{\lambda}}{\theta(qt_0/t_m; p; q)_{\lambda}} (-qz)^{\lambda}. \quad (15)$$

При $p \rightarrow 0$ ряды (15) сводятся к совершенно уравновешенным базисным гипергеометрическим рядам ${}_{r-1}\Phi_{r-2}$ [4] аргумента $-qz$ (обращаем внимание на сдвиг индекса r на -2).

Ряды типа (15) (в других обозначениях, с другим подсчетом числа параметров и выбором $z = -1$) были рассмотрены впервые Тураевым и Френкелем [5]. Их анализ был инспирирован точно решаемыми моделями статистической механики, построенными Дате с сотрудниками [3]. В другом контексте в рамках программы по систематическому пересмотру специальных функций одной переменной как “самоподобных” функций (см., например, обзор [6]) эллиптические гипергеометрические ряды были получены Жедановым и автором как решения специального трехчленного рекуррентного соотношения, описывающего новые семейства биортогональных рациональных функций [7].

Тураев и Френкель [5] доказали следующую формулу суммирования:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^N q^{\lambda} \frac{\theta(t_0 q^{2\lambda}; p)}{\theta(t_0; p)} \prod_{r=0}^5 \frac{\theta(t_r; p; q)_{\lambda}}{\theta(qt_0 t_r^{-1}; p; q)_{\lambda}} &= \\ &= \frac{\theta(qt_0; p; q)_N \prod_{1 \leq r < s \leq 3} \theta(qt_0/t_r t_s; p; q)_N}{\theta(qt_0/t_1 t_2 t_3; p; q)_N \prod_{r=1}^3 \theta(qt_0/t_r; p; q)_N}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\prod_{i=1}^5 t_i = qt_0^2$ и $t_4 = q^{-N}$, $N \in \mathbb{N}$. По классификации, введенной в [1], это соответствует замкнутому выражению для обрывающегося совершенно уравновешенного сбалансированного тета-гипергеометрического ряда ${}_{10}E_9$ при $z = -1$.

В случае многих переменных общая форма эллиптических гипергеометрических рядов еще не установлена. В литературе предложено несколько типов таких рядов и явных формул суммирования, обобщающих (16). Эти суммы расширяют богатую совокупность тождеств для рядов гипергеометрического типа, которые были найдены впервые Биденхарном, Лауком и Холманом (см., например, [8]) и впоследствии обобщены на базисные гипергеометрические ряды Милне (см., например, [9], [10]) и Густафсоном (см., например, [11], [12]). Варнааром были предложены [13] первые два примера многократных эллиптических гипергеометрических рядов, для одного из которых он доказал обобщение суммы Тураева–Френкеля. Для второго типа рядов Варнаар предположил аналогичную формулу суммирования. Она была доказана для случая обычных и q -гипергеометрических рядов ван Диехеном и автором в работе [14] (некоторые предельные случаи этой суммы были доказаны ранее в [15]). Там же было дано частичное доказательство эллиптической суммы. Она была полностью доказана Розенгреном с помощью другой техники [16].

Третий тип рядов был предложен в [17] вместе с эллиптическим расширением многократной суммы Джексона из работ [10], [11], которая была частично доказана на основе инвариантности относительно группы модулярных преобразований. В настоящей статье мы рассматриваем два новых типа многократных эллиптических рядов, изучаем их свойства, обсуждаем соответствующие суммы типа Джексона и на основе модулярности показываем их частичную справедливость. Независимо Розенгреном также рассмотрел эти суммы, доказал их (совместно с суммой, предложенной в [17]) и исследовал ряд их следствий [18].

Точно так же, как и в одномерном случае, многократные тета-гипергеометрические ряды называются полностью эллиптическими, если функции $h_\ell(\lambda)$ эллиптичны по λ_j и по всем свободным параметрам, входящим в аргументы θ_1 -функций. Одна из основных целей настоящей работы состоит в приведении новых аргументов в пользу справедливости следующей гипотезы.

ГИПОТЕЗА. *Любой полностью эллиптический гипергеометрический ряд автоматически является модулярно-инвариантным.*

Для ряда с $n = 1$ (в общей ситуации) и C_n -сумм, обсуждавшихся в работах [13], [14], [16], [17], это утверждение было доказано в [1]. Докажем его для самой первой формулы суммирования многократного эллиптического гипергеометрического ряда, найденной Варнааром [13] (эта формула была пропущена в анализе [1]), и для упомянутых выше двух новых рядов.

Варнаар доказал [13] следующий эллиптический аналог многократной C_n -суммы Шлоссера [19]:

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n=0}^N q^{\sum_{j=1}^n j \lambda_j} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\theta(t_i t_j^{-1} q^{\lambda_i - \lambda_j}, t_i t_j q^{\lambda_i + \lambda_j}; p)}{\theta(t_i t_j^{-1}, t_i t_j; p)} \times \\ \times \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j^2 q^{2\lambda_j}; p) \theta(t_j^2, b t_j, c t_j, d t_j, e t_j, q^{-N}; p; q)_{\lambda_j}}{\theta(t_j^2; p) \theta(q, t_j q/b, t_j q/c, t_j q/d, t_j q/e, t_j^2 q^{N+1}; p; q)_{\lambda_j}} =$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\theta(t_i t_j q^N; p)}{\theta(t_i t_j; p)} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j^2 q, q^{2-j}/(bc), q^{2-j}/(bd), q^{2-j}/(cd); p; q)_N}{\theta(t_j^{-1} q^{2-n}/(bcd), t_j q/b, t_j q/c, t_j q/d; p; q)_N}, \quad (17)$$

где параметры удовлетворяют условию балансировки $bcd e = q^{N-n+2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Формулы суммирования, приведенные в [13], [19], содержат один дополнительный параметр a , но он может быть устранен переопределением переменных t_j, b, c, d, e .

ТЕОРЕМА 1. *Тета-гипергеометрический ряд, стоящий слева в формуле (17), является полностью эллиптическим и модулярно-инвариантным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отношения последовательных коэффициентов в ряде (17):

$$\begin{aligned} h_\ell(\lambda) &= q^\ell \frac{\theta(t_\ell^2 q^{2\lambda_\ell+2}; p)}{\theta(t_\ell^2 q^{2\lambda_\ell}; p)} \prod_{i=1}^{\ell-1} \frac{\theta(t_i t_\ell^{-1} q^{\lambda_i - \lambda_\ell - 1}, t_i t_\ell q^{\lambda_i + \lambda_\ell + 1}; p)}{\theta(t_i t_\ell^{-1} q^{\lambda_i - \lambda_\ell}, t_i t_\ell q^{\lambda_i + \lambda_\ell}; p)} \times \\ &\times \prod_{j=\ell+1}^n \frac{\theta(t_\ell t_j^{-1} q^{\lambda_\ell - \lambda_j + 1}, t_\ell t_j q^{\lambda_\ell + \lambda_j + 1}; p)}{\theta(t_\ell t_j^{-1} q^{\lambda_\ell - \lambda_j}, t_\ell t_j q^{\lambda_\ell + \lambda_j}; p)} \times \\ &\times \frac{\theta(t_\ell^2 q^{\lambda_\ell}, b t_\ell q^{\lambda_\ell}, c t_\ell q^{\lambda_\ell}, d t_\ell q^{\lambda_\ell}, e t_\ell q^{\lambda_\ell}, q^{-N+\lambda_\ell}; p)}{\theta(q^{\lambda_\ell+1}, t_\ell q^{\lambda_\ell+1}/b, t_\ell q^{\lambda_\ell+1}/c, t_\ell q^{\lambda_\ell+1}/d, t_\ell q^{\lambda_\ell+1}/e, t_\ell^2 q^{N+1+\lambda_\ell}; p)}. \quad (18) \end{aligned}$$

Докажем сначала, что эта функция эллиптична по λ_k . Для этого достаточно заменить q^{λ_k} на $p q^{\lambda_k}$, применить правило $\theta(pz; p) = -z^{-1} \theta(z; p)$ и проверить сокращение всех дополнительных факторов, появляющихся в результате этого. Для $k < \ell$ или $k > \ell$ ситуация достаточно проста и мы не рассматриваем ее. В случае $k = \ell$ первая дробь из тета-функций в (18) дает множитель q^{-4} , следующие два произведения дают $q^{2(1-n)}$. Последняя дробь, содержащая параметры $b, \dots, e$, генерирует произведение $q^{2N+6} (bcde)^{-2}$. В итоге полный результирующий множитель равен единице согласно условию балансировки.

Для проверки эллиптичности по параметрам и модулярной инвариантности $h_\ell(\lambda)$ произведем замену $t_j, b, c, d, e \rightarrow q^{g_j}, q^\beta, q^\gamma, q^\delta, q^\epsilon$. После этого мы можем переписать (18) в терминах эллиптических чисел следующим образом:

$$\begin{aligned} h_\ell(\lambda) &= \frac{[2g_\ell + 2\lambda_\ell + 2]}{[2g_\ell + 2\lambda_\ell]} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n \frac{[g_i - g_\ell + \lambda_i - \lambda_\ell - 1, g_i + g_\ell + \lambda_i + \lambda_\ell + 1]}{[g_i - g_\ell + \lambda_i - \lambda_\ell, g_i + g_\ell + \lambda_i + \lambda_\ell]} \times \\ &\times \frac{[2g_\ell + \lambda_\ell, \beta + g_\ell + \lambda_\ell, \gamma + g_\ell + \lambda_\ell]}{[\lambda_\ell + 1, g_\ell + \lambda_\ell + 1 - \beta, g_\ell + \lambda_\ell + 1 - \gamma]} \times \\ &\times \frac{[\delta + g_\ell + \lambda_\ell, \epsilon + g_\ell + \lambda_\ell, \lambda_\ell - N]}{[g_\ell + \lambda_\ell + 1 - \delta, g_\ell + \lambda_\ell + 1 - \epsilon, 2g_\ell + N + 1 + \lambda_\ell]}. \quad (19) \end{aligned}$$

Из этого представления следует, что при переписывании (17) в терминах эллиптических чисел первый множитель $q^{\sum_{j=1}^n j \lambda_j}$ исчезает. В итоге одновременная перестановка

переменных λ_j, λ_k и параметров g_j, g_k не меняет коэффициентов $c(\lambda)$ (имеет место одинаковое число изменений знаков в числителе и знаменателе $c(\lambda)$, происходящих из-за нечетности $[-u] = -[u]$). Таким образом, инвариантность относительно симметрической группы естественным образом реализована в этих рядах.

Эллиптичность по g_k в (19) следует из инвариантности (18) относительно сдвига $t_k \rightarrow pt_k$. Для $k < \ell$ или $k > \ell$ это легко проверяется. Для $k = \ell$ первая дробь тета-функций порождает множитель q^{-4} , следующие два произведения дают $q^{2(1-n)}$. Остаток в h_ℓ приводит к множителю $q^{2N+6}(bcde)^{-2}$, и полный множитель равен единице благодаря условию балансировки. Для проверки эллиптичности по β (или, что эквивалентно, по γ или δ) заменим $b \rightarrow pb$, $e \rightarrow p^{-1}e$ в (18). Только последняя дробь дает некоторые вклады, и, поскольку $\theta(p^{-1}z; p) = -p^{-1}z\theta(z; p)$, они сокращают друг друга.

Обратимся теперь к модулярной инвариантности. Поскольку числитель и знаменатель h_ℓ содержит одинаковое число θ_1 -функций, численные факторы, появляющиеся из-за преобразований $\tau \rightarrow \tau + 1$, $\tau \rightarrow -1/\tau$ в (9), (10), сокращаются. Таким образом, достаточно проверить, что разность квадратов аргументов эллиптических чисел в числителе и знаменателе равна нулю. Для первой дроби тета-функций в (19) эта разность равна $4 + 8(g_\ell + \lambda_\ell)$. Следующее произведение дает $2(1 + 2(g_\ell + \lambda_\ell))(n - 1)$. Остаток h_ℓ генерирует разность $2(\beta + \gamma + \delta + \epsilon)(1 + 2(g_\ell + \lambda_\ell)) - 4 - 4(g_\ell + \lambda_\ell)(N + 3) - 2(N + 1)$. Полная сумма этих выражений равна нулю, что доказывает модулярную инвариантность функции h_ℓ . По терминологии Эйхлера–Загира [20] это означает, что все функции $h_\ell(\lambda)$, $\ell = 1, \dots, n$, в (19) являются мероморфными формами Якоби веса 0 и индекса 0. Все вместе они образуют некоторую структуру, связанную с системой корней C_n .

Хотя совпадение левой и правой частей (17) было доказано в работе [13], для полноты мы проверили, что выражение справа в (17) является эллиптической функцией всех параметров $g_j, \beta, \gamma, \delta$ и оно модулярно-инвариантно.

Во время работы над эллиптической цепочкой Бэйли автор познакомился со статьей Бхатнагара и Шлоссера [22], в которой изучались различные преобразования Бэйли для многократных рядов $_{10}\Phi_9$. Цепочка Бэйли, построенная в [21], генерирует бесконечную последовательность таких преобразований для одномерных эллиптических гипергеометрических рядов. Сравнение [21] и [22] естественным образом привело к предположению, что многие результаты работы [22] должны допускать эллиптическое обобщение. В частности, это предположение подразумевает справедливость следующих эллиптических аналогов многократных сумм Джексона, найденных Милне [9], Шлоссером [23] и Бхатнагаром [24]:

эллиптическая A_n -сумма Милне

$$\sum_{\substack{0 \leq \lambda_j \leq N_j \\ j=1, \dots, n}} q^{\sum_{j=1}^n j \lambda_j} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j q^{\lambda_j + |\lambda|}; p)}{\theta(t_j; p)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\theta(t_i t_j^{-1} q^{\lambda_i - \lambda_j}; p)}{\theta(t_i t_j^{-1}; p)} \times \\ \times \prod_{i,j=1}^n \frac{\theta(t_i t_j^{-1} q^{-N_j}; p; q)_{\lambda_i}}{\theta(q t_i t_j^{-1}; p; q)_{\lambda_i}} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j; p; q)_{|\lambda|}}{\theta(t_j q^{1+N_j}; p; q)_{|\lambda|}} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\theta(b, c; p; q)_{|\lambda|}}{\theta(q/d, q/e; p; q)_{|\lambda|}} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(dt_j, et_j; p; q)_{\lambda_j}}{\theta(t_j q/b, t_j q/c; p; q)_{\lambda_j}} = \\
& = \frac{\theta(q/(bd), q/(cd); p; q)_{|N|}}{\theta(q/d, q/(bcd); p; q)_{|N|}} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j q, t_j q/(bc); p; q)_{N_j}}{\theta(t_j q/b, t_j q/c; p; q)_{N_j}}, \quad (20)
\end{aligned}$$

где $|\lambda| = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $|N| = N_1 + \dots + N_n$ и $bcd e = q^{1+|N|}$;

эллиптическая D_n -сумма Бхатнагара–Шлоссера (как заявлено в [22], D_n -суммы работ [23], [24] существенно эквивалентны друг другу)

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{0 \leq \lambda_j \leq N_j \\ j=1, \dots, n}} q^{\sum_{j=1}^n j \lambda_j} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j q^{\lambda_j + |\lambda|}; p)}{\theta(t_j; p)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\theta(t_i t_j^{-1} q^{\lambda_i - \lambda_j}; p)}{\theta(t_i t_j^{-1}; p)} \times \\
& \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \theta(t_i t_j q/(bcd); p; q)^{-1}_{\lambda_i + \lambda_j} \prod_{i, j=1}^n \theta(t_i t_j q^{1+N_j}/(bcd); p; q)_{\lambda_i} \times \\
& \times \prod_{i, j=1}^n \frac{\theta(t_i t_j^{-1} q^{-N_j}; p; q)_{\lambda_i}}{\theta(q t_i t_j^{-1}; p; q)_{\lambda_i}} \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j; p; q)_{|\lambda|} \theta(bcd t_j^{-1}; p; q)_{|\lambda| - \lambda_j}}{\theta(t_j q^{1+N_j}, bcd t_j^{-1} q^{-N_j}; p; q)_{|\lambda|}} \times \\
& \times \frac{\theta(b, c, d; p; q)_{|\lambda|}}{\prod_{j=1}^n \theta(t_j q/b, t_j q/c, t_j q/d; p; q)_{\lambda_j}} = \\
& = \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_j q, t_j q/(bc), t_j q/(bd), t_j q/(cd); p; q)_{N_j}}{\theta(t_j q/(bcd), t_j q/b, t_j q/c, t_j q/d; p; q)_{N_j}}. \quad (21)
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В представлении A_n -суммы Милне, приведенном в приложении статьи [22], имеется дополнительный параметр a , но он может быть устранен переопределением t_j , d и e . Аналогично в версии Шлоссера D_n -суммы, приведенной там же, дополнительный параметр a может быть устранен переопределением t_j (то же самое справедливо для версии Бхатнагара этой суммы).

ТЕОРЕМА 2. Тета-гипергеометрические A_n - и D_n -ряды, стоящие слева в равенствах (20) и (21), являются полностью эллиптическими и модулярно-инвариантными. Соответствующие выражения в правых частях обладают теми же свойствами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $h_\ell(\lambda)$ в A_n -случае:

$$\begin{aligned}
h_\ell(\lambda) &= q^\ell \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^n \frac{\theta(t_j q^{\lambda_j + |\lambda| + 1}; p)}{\theta(t_j q^{\lambda_j + |\lambda|}; p)} \frac{\theta(t_\ell q^{\lambda_\ell + |\lambda| + 2}; p)}{\theta(t_\ell q^{\lambda_\ell + |\lambda|}; p)} \times \\
& \times \prod_{i=1}^{\ell-1} \frac{\theta(t_i t_\ell^{-1} q^{\lambda_i - \lambda_\ell - 1}; p)}{\theta(t_i t_\ell^{-1} q^{\lambda_i - \lambda_\ell}; p)} \prod_{j=\ell+1}^n \frac{\theta(t_\ell t_j^{-1} q^{\lambda_\ell - \lambda_j + 1}; p)}{\theta(t_\ell t_j^{-1} q^{\lambda_\ell - \lambda_j}; p)} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_\ell t_j^{-1} q^{\lambda_\ell - N_j}, t_j q^{|\lambda|}; p)}{\theta(t_\ell t_j^{-1} q^{\lambda_\ell + 1}, t_j q^{1+N_j+|\lambda|}; p)} \times \\
& \times \frac{\theta(bq^{|\lambda|}, cq^{|\lambda|}, dt_\ell q^{\lambda_\ell}, et_\ell q^{\lambda_\ell}; p)}{\theta(q^{|\lambda|+1}/d, q^{|\lambda|+1}/e, t_\ell q^{\lambda_\ell+1}/b, t_\ell q^{\lambda_\ell+1}/c; p)}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Докажем сначала эллиптичность $h_\ell(\lambda)$ по λ_k . Для $k < \ell$ или $k > \ell$ сдвиг $q^{\lambda_k} \rightarrow pq^{\lambda_k}$ в h_ℓ приводит к следующим дополнительным множителям: q^{-n} и q^{-2} от первых двух дробей тета-функций, соответственно; следующие два произведения дают q ; из произведения $\prod_{j=1}^n$ получается вклад $q^{n+|N|}$, а остаток h_ℓ генерирует фактор $q^{1-|N|}$. Полный множитель равен единице.

Аналогично, заменяя q^{λ_ℓ} на pq^{λ_ℓ} , мы получаем последовательно множители q^{1-n} , q^{-4} , $q^{1-\ell}$, $q^{\ell-n}$, $q^{2n+2|N|}$ и $q^{2-2|N|}$, и их перемножение дает единицу. Таким образом, функции $h_\ell(\lambda)$, порождающие левую часть (20), эллиптичны по всем λ_k .

Для того чтобы увидеть естественное действие симметрической группы, заменим $t_j, b, c, d, e \rightarrow q^{g_j}, q^\beta, q^\gamma, q^\delta, q^\epsilon$ и перепишем сумму (20) в терминах эллиптических чисел:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{0 \leq \lambda_j \leq N_j \\ j=1, \dots, n}} \prod_{j=1}^n \frac{[g_j + \lambda_j + |\lambda|]}{[g_j]} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{[g_i - g_j + \lambda_i - \lambda_j]}{[g_i - g_j]} \times \\
& \times \prod_{i,j=1}^n \frac{[g_i - g_j - N_j]_{\lambda_i}}{[1 + g_i - g_j]_{\lambda_i}} \prod_{j=1}^n \frac{[g_j]_{|\lambda|}}{[g_j + 1 + N_j]_{|\lambda|}} \times \\
& \times \frac{[\beta, \gamma]_{|\lambda|}}{[1 - \delta, 1 - \epsilon]_{|\lambda|}} \prod_{j=1}^n \frac{[\delta + g_j, \epsilon + g_j]_{\lambda_j}}{[g_j + 1 - \beta, g_j + 1 - \gamma]_{\lambda_j}} = \\
& = \frac{[1 - \beta - \delta, 1 - \gamma - \delta]_{|N|}}{[1 - \delta, 1 - \beta - \gamma - \delta]_{|N|}} \prod_{j=1}^n \frac{[1 + g_j, 1 + g_j - \beta - \gamma]_{N_j}}{[g_j + 1 - \beta, g_j + 1 - \gamma]_{N_j}}. \quad (23)
\end{aligned}$$

Сделаем перестановку (λ_k, g_k, N_k) и (λ_m, g_m, N_m) для некоторых фиксированных k и m . Имеется только два множителя, которые требуют некоторого рассмотрения. Первый, заданный произведением $\prod_{1 \leq i < j \leq n}$, оказывается симметричным из-за равного числа изменений знака в числителе и знаменателе (точно так же, как это было для суммы (17)). Произведение $\prod_{i,j=1}^n$ оказывается симметричным, поскольку оно учитывает все возможные значения обоих индексов i и j . Таким образом, согласно определению, данному в начале статьи, мы имеем дело с частным случаем эллиптических гипергеометрических рядов.

Докажем теперь полную эллиптичность функций h_ℓ . Эллиптичность по β (или γ), или инвариантность (22) при сдвигах $b \rightarrow pb$, $e \rightarrow p^{-1}e$, следует из сокращения множителей $-b^{-1}q^{-|\lambda|}$, $-p^{-1}et_\ell q^{\lambda_\ell}$ и $-q^{|\lambda|+1}e^{-1}$, $-pbt_\ell^{-1}q^{-\lambda_\ell-1}$, порожденных числителем и знаменателем последней дроби, соответственно. Аналогичная ситуация имеет место для сдвигов $d \rightarrow pd$, $e \rightarrow p^{-1}e$, что доказывает эллиптичность по δ .

Существенно более сложное вычисление необходимо для проверки модулярной инвариантности $s(\lambda)$ в (23). Рассмотрим разность квадратов аргументов эллиптических

чисел в числителе и знаменателе h_ℓ . Первая дробь тета-функций дает $n - 1 + 2(|g| - g_\ell + n|\lambda| - \lambda_\ell)$, где $|g| = g_1 + \dots + g_n$. Вторая дробь дает $4(1 + |\lambda| + \lambda_\ell + g_\ell)$. Следующие два произведения генерируют разность $n - 1 + 2n(g_\ell + \lambda_\ell) - 2|g| - 2|\lambda|$. Произведение $\prod_{j=1}^n$ отношений тета-функций дает вклад $-2(n + |N|)(1 + g_\ell + \lambda_\ell + |\lambda|)$. Остаток h_ℓ дает

$$(\beta + |\lambda|)^2 + (\gamma + |\lambda|)^2 + (\delta + g_\ell + \lambda_\ell)^2 + (\epsilon + g_\ell + \lambda_\ell)^2 - (|\lambda| + 1 - \delta)^2 - \\ - (|\lambda| + 1 - \epsilon)^2 - (g_\ell + \lambda_\ell + 1 - \beta)^2 - (g_\ell + \lambda_\ell + 1 - \gamma)^2.$$

Сумма всех этих громоздких выражений равна нулю, т.е. h_ℓ инвариантна относительно преобразований (9), (10), порождающих полную модулярную группу.

Полная эллиптичность и модулярность выражения, стоящего справа в равенстве (23), легко проверяются. Действительно, инвариантность правой части (20) при сдвигах $t_j \rightarrow pt_j$ или $d \rightarrow pd$ (т.е. эллиптичность по g_j или δ) очевидна. Сдвиг $b \rightarrow pb$ генерирует фактор $c^{|N|}$ из эллиптических сдвинутых факториалов $\theta(\cdot)_{|N|}$, и он сокращается дополнительными множителями, обусловленными эллиптическими сдвинутыми факториалами $\theta(\cdot)_{N_j}$. По соображениям симметрии это означает эллиптичность и по β , и по γ .

Что касается разности квадратов аргументов эллиптических чисел в числителе и знаменателе правой части (23), отношение эллиптических сдвинутых факториалов $[\cdot]_{|N|}$ дает (после упрощений) $-2|N|\beta\gamma$. Произведение отношений $[\cdot]_{N_j}$ дает вклад

$$\sum_{j=1}^n N_j ((1 + g_j)^2 + (1 + g_j - \beta - \gamma)^2 - (1 + g_j - \beta)^2 - (1 + g_j - \gamma)^2),$$

который сокращает предыдущее выражение. Это доказывает модулярную инвариантность правой части равенства (23).

Обратимся теперь к D_n -сумме (21). Отношения коэффициентов ряда в левой части имеют следующий вид:

$$h_\ell(\lambda) = q^\ell \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^n \frac{\theta(t_j q^{\lambda_j + |\lambda| + 1}, bcd t_j^{-1} q^{|\lambda| - \lambda_j}; p)}{\theta(t_j q^{\lambda_j + |\lambda|}, t_\ell t_j q^{\lambda_j + \lambda_\ell + 1} / (bcd); p)} \frac{\theta(t_\ell q^{\lambda_\ell + |\lambda| + 2}; p)}{\theta(t_\ell q^{\lambda_\ell + |\lambda|}; p)} \times \\ \times \prod_{i=1}^{\ell-1} \frac{\theta(t_i t_\ell^{-1} q^{\lambda_i - \lambda_\ell - 1}; p)}{\theta(t_i t_\ell^{-1} q^{\lambda_i - \lambda_\ell}; p)} \prod_{j=\ell+1}^n \frac{\theta(t_\ell t_j^{-1} q^{\lambda_\ell - \lambda_j + 1}; p)}{\theta(t_\ell t_j^{-1} q^{\lambda_\ell - \lambda_j}; p)} \times \\ \times \prod_{j=1}^n \frac{\theta(t_\ell t_j q^{1 + N_j + \lambda_\ell} / (bcd), t_\ell t_j^{-1} q^{-N_j + \lambda_\ell}, t_j q^{|\lambda|}; p)}{\theta(t_\ell t_j^{-1} q^{\lambda_\ell + 1}, t_j q^{1 + N_j + |\lambda|}, bcd t_j^{-1} q^{|\lambda| - N_j}; p)} \times \\ \times \frac{\theta(bq^{|\lambda|}, cq^{|\lambda|}, dq^{|\lambda|}; p)}{\theta(t_\ell q^{\lambda_\ell + 1} / b, t_\ell q^{\lambda_\ell + 1} / c, t_\ell q^{\lambda_\ell + 1} / d; p)}. \quad (24)$$

Сдвиги $q^{\lambda_k} \rightarrow pq^{\lambda_k}$ не меняют этих функций, т.е. они эллиптичны по переменным λ_k . Для $k < \ell$ или $k > \ell$ это следует из сокращения множителей квазипериодичности

$$q^{-n}, \quad -\frac{t_k t_\ell}{bcd} q^{1+\lambda_k+\lambda_\ell}, \quad \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, \ell}}^n \left(-\frac{t_j}{bcd} q^{\lambda_j - |\lambda|} \right),$$

появляющихся из произведения $\prod_{j=1, j \neq \ell}^n$ фактора q^{-2} (из следующего отношения тета-функций), q (из двух следующих произведений) и

$$\prod_{j=1}^n (-bcd t_j^{-1} q^{|\lambda|+1}), \quad -q^{-3|\lambda|} / (bcd)$$

(из двух последних дробей, соответственно). Для $k = \ell$ мы имеем множители q^{1-n} (из первой дроби),

$$\prod_{j=1, j \neq \ell}^n (t_j^2 t_\ell q^{2\lambda_j + \lambda_\ell - |\lambda|+1} / (b^2 c^2 d^2))$$

(из второй дроби), q^{-4} (из третьей дроби), q^{1-n} (из следующих двух произведений) и

$$\prod_{j=1}^n \frac{b^2 c^2 d^2}{t_\ell t_j^2} q^{1+|\lambda|-\lambda_\ell}, \quad \frac{t_\ell^3}{b^2 c^2 d^2} q^{3(1+\lambda_\ell-|\lambda|)}$$

(из последних двух строк, соответственно). Их произведение равно единице, т.е. функции h_ℓ эллиптичны по всем λ_k .

После переписывания суммы (21) в терминах эллиптических чисел,

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{0 \leq \lambda_j \leq N_j \\ j=1, \dots, n}} \prod_{j=1}^n \frac{[g_j + \lambda_j + |\lambda|]}{[g_j]} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{[g_i - g_j + \lambda_i - \lambda_j]}{[g_i - g_j]} \times \\ & \times \frac{\prod_{i,j=1}^n [g_i + g_j + 1 + N_j - \beta - \gamma - \delta]_{\lambda_i}}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} [g_i + g_j + 1 - \beta - \gamma - \delta]_{\lambda_i + \lambda_j}} \times \\ & \times \prod_{i,j=1}^n \frac{[g_i - g_j - N_j]_{\lambda_i}}{[1 + g_i - g_j]_{\lambda_i}} \prod_{j=1}^n \frac{[g_j]_{|\lambda|} [\beta + \gamma + \delta - g_j]_{|\lambda| - \lambda_j}}{[g_j + 1 + N_j, \beta + \gamma + \delta - g_j - N_j]_{|\lambda|}} \times \\ & \times \frac{[\beta, \gamma, \delta]_{|\lambda|}}{\prod_{j=1}^n [g_j + 1 - \beta, g_j + 1 - \gamma, g_j + 1 - \delta]_{\lambda_j}} = \\ & = \prod_{j=1}^n \frac{[g_j + 1, g_j + 1 - \beta - \gamma, g_j + 1 - \beta - \delta, g_j + 1 - \gamma - \delta]_{N_j}}{[g_j + 1 - \beta - \gamma - \delta, g_j + 1 - \beta, g_j + 1 - \gamma, g_j + 1 - \delta]_{N_j}}, \end{aligned} \quad (25)$$

перестановочная симметрия между (λ_k, g_k, N_k) и (λ_m, g_m, N_m) для фиксированных k и m становится очевидной.

Эллиптичность по переменным g_k , $k \neq \ell$, следует из сокращения следующей последовательности множителей в (24), появляющихся после сдвига $t_k \rightarrow pt_k$:

$$q^{-1}, \quad -t_k t_\ell q^{1+\lambda_k+\lambda_\ell} / (bcd), \quad -p^{-1} bcd q^{|\lambda|-\lambda_k} t_k^{-1}, \quad q, \quad pq^{-1-|\lambda|-\lambda_\ell} t_\ell^{-1}.$$

Аналогично для g_ℓ мы получаем множители (в порядке появления)

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^n \left(-\frac{t_j t_\ell q^{1+\lambda_j+\lambda_\ell}}{bcd} \right), \quad q^{-2}, \quad q^{1-n}, \quad \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^n \left(-\frac{bcd q^{-\lambda_\ell}}{t_j t_\ell} \right), \\ -\frac{bcd q^{-1-|\lambda|-2\lambda_\ell}}{t_\ell^3}, \quad -\frac{t_\ell^3 q^{3+3\lambda_\ell}}{bcd},$$

произведение которых равно единице. Эллиптичность по β (или γ , δ) подтверждается аналогичным вычислением, которое мы опускаем для краткости.

Доказательство модулярности h_ℓ требует существенно более трудоемкого расчета. Опустим начальное выражение для разности квадратов аргументов эллиптических чисел в h_ℓ . Первая цепочка упрощений в нем приводит к сумме

$$2(1+|\lambda|+g_\ell+\lambda_\ell)(\lambda_\ell-|\lambda|-N_\ell+1) + (2g_\ell-\beta-\gamma-\delta+N_\ell+1+\lambda_\ell)^2 - \\ - (g_\ell-\beta-\gamma-\delta+N_\ell-|\lambda|)^2 + \sum_{\rho=\beta,\gamma,\delta} ((\rho+|\lambda|)^2 - (g_\ell+\lambda_\ell+1-\rho)^2),$$

которая равна нулю.

Работа с правой частью (21) существенно проще. Ее эллиптичность по параметрам следует из того, что отношение

$$\frac{[g_j, g_j - \beta - \gamma, g_j - \beta - \delta, g_j - \gamma - \delta]}{[g_j - \beta - \gamma - \delta, g_j - \beta, g_j - \gamma, g_j - \delta]}$$

эллиптично по всем переменным. Модулярная инвариантность гарантирована следующим равенством:

$$g_j^2 + (g_j - \beta - \gamma)^2 + (g_j - \beta - \delta)^2 + (g_j - \gamma - \delta)^2 = (g_j - \beta - \gamma - \delta)^2 + (g_j - \beta)^2 + (g_j - \gamma)^2 + (g_j - \delta)^2.$$

Таким образом, мы доказали полную эллиптичность и модулярность обеих сторон обеих A_n - и D_n -сумм.

СЛЕДСТВИЕ. C_n -сумма Варнаара, эллиптическая A_n -сумма Милне и эллиптическая D_n -сумма Бхатнагара-Шлоссера, заданные формулами (17), (20) и (21), соответственно, справедливы при разложении по малому параметру σ до степени σ^{12} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольно малого $\epsilon > 0$ можно подобрать достаточно малое абсолютное значение параметра σ такое, что обе стороны равенств (17), (20), (21) будут голоморфны по модулярному параметру τ в области $\text{Im } \tau > \epsilon$. Являясь $PSL(2, \mathbb{Z})$ -инвариантными функциями, они имеют σ -разложения вида $\sum_{k=0}^{\infty} m_k(\tau) \sigma^{2k}$, где $m_k(\tau)$ суть модулярные формы веса $2k$. Для $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$ (т.е. $p \rightarrow 0$) разности выражений левых и правых частей этих равенств обращаются в нуль. Поэтому в разложении этих разностей по σ могут появиться только параболические формы. Поскольку не существует параболических модулярных форм с весом меньше 12, рассматриваемые C_n -, A_n -, D_n -формулы суммирования справедливы в σ -разложении до членов степени σ^{12} . Приведенные аргументы не новы, они уже использовались в работах [14], [17] в аналогичной ситуации.

Результаты данной работы значительно усиливают аргументы в пользу гипотезы, приведенной в начале статьи. Кроме того, они показывают, что свойства полной эллиптичности и модулярной инвариантности дают простой способ построения эллиптических обобщений некоторых тождеств для базисных гипергеометрических рядов. Полные доказательства C_n -суммы, предложенной в [17], и A_n -, D_n -сумм (20), (21), полученные Розенгреном [18], усиливают последнее утверждение. Здесь уместно задаться вопросом о существовании аналогичных тождеств для других систем корней.

В заключение кратко обсудим обобщение подхода работы [1] на ряды, использующие многомерные тета-функции Римана. В случае общих абелевых многообразий можно потребовать, чтобы функции $h_\ell(\lambda)$ (2) были мероморфными $2n$ -периодическими функциями, определенными на n -мерном комплексном торе. Как известно, такие функции однозначно факторизуются в виде отношения некоторых произведений тета-функций рода n , так что коэффициенты $c(\lambda)$ описываются некоторыми общими тета-аналогами сдвинутых факториалов. В этом случае перестановочная симметрия $\mathcal{S}_n$, вообще говоря, нарушена, а ее наличие подразумевает некоторый самосогласованный выбор функций $h_\ell(\lambda)$.

В случае алгебраических кривых в качестве h_ℓ можно взять мероморфные функции на компактной римановой поверхности S произвольного рода g . Рассмотрим несколько подробнее ситуацию при $n = 1$. Многомерная тета-функция Римана на якобиане определяется матрицей периодов, порожденной нормированным базисом голоморфных дифференциалов $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)^{1)}$. Обозначим тета-функцию с нечетными характеристиками как $[\mathbf{u}]$, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^g$. В частности, мы имеем $[-\mathbf{u}] = -[\mathbf{u}]$ и $[\mathbf{u} + \mathbf{e}_k] = [\mathbf{u}]$, где $\mathbf{e}_k$, $k = 1, \dots, g$, определяют базис единичных векторов в $\mathbb{C}^g$. Некоторое представление об общей структуре тета-гипергеометрических рядов на S дает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Введем некоторую последовательность несовпадающих точек на компактной римановой поверхности рода g : $x_0, x_1, \dots, x_N \in S$. Пусть $\mathbf{u}_0$ — произвольный вектор из $\mathbb{C}^g$ и параметры $\mathbf{u}_i = \int_{P_i}^{Q_i} \omega$, $i = 1, 2$, для некоторых $P_i, Q_i \in S$. Тогда имеет место следующая формула суммирования для специального ряда ги-*

¹⁾ Подробнее о теории римановых поверхностей и связанных с ними структур см., например, [25].

пергеометрического типа, определенного на поверхности S :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{[\mathbf{u}_0 + 2 \int_{x_0}^{x_n}]}{[\mathbf{u}_0]} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{[\mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^{x_j}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_j}, \mathbf{u}_1 + \int_{x_0}^{x_j}, \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_j}]}{[\int_{x_0}^{x_{j+1}}, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_{j+1}}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 + \int_{x_0}^{x_{j+1}}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_{j+1}}]} = \\ = \prod_{j=1}^N \frac{[\mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^{x_j}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_j}, \mathbf{u}_1 + \int_{x_0}^{x_j}, \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_j}]}{[\int_{x_0}^{x_j}, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_j}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 + \int_{x_0}^{x_j}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_j}]}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\int_a^b \omega \equiv \int_a^b \omega$ и произведения $\prod_{j=0}^{n-1}, \prod_{j=1}^n$ при $n = 0$ принимаются равными единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для вывода этой формулы нам потребуется тождество Фэя для тета-функций на алгебраических кривых [25]

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{u} + \int_a^c \omega, \mathbf{u} + \int_b^d \omega, \int_c^b \omega, \int_a^d \omega \right] + \left[\mathbf{u} + \int_b^c \omega, \mathbf{u} + \int_a^d \omega, \int_a^c \omega, \int_b^d \omega \right] = \\ = \left[\mathbf{u}, \mathbf{u} + \int_a^c \omega + \int_b^d \omega, \int_c^d \omega, \int_a^b \omega \right], \end{aligned} \quad (27)$$

справедливое при произвольных $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^g$ и $a, b, c, d \in S$. Отметим также, что $\int_a^c \omega + \int_b^d \omega = \int_b^c \omega + \int_a^d \omega$.

Запишем равенство (26) как $\sum_{n=0}^N c_n = s_N$, $c_0 = s_0 = 1$. Покажем, что $c_n = s_n - s_{n-1}$, где $s_{-1} = 0$. Действительно,

$$1 - \frac{s_{n-1}}{s_n} = 1 - \frac{[\int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_n}]}{[\mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_1 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_n}]}. \quad (28)$$

Подставляя параметры

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_n} \omega, \quad \int_c^d \omega \equiv \int_{x_0}^{x_n} \omega, \quad \int_d^b \omega \equiv \mathbf{u}_1, \quad \int_a^c \omega \equiv \mathbf{u}_2$$

в тождество Фэя (27), получаем

$$1 - \frac{s_{n-1}}{s_n} = \frac{[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_0 + 2 \int_{x_0}^{x_n}]}{[\mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_1 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_n}]}. \quad (29)$$

Легко видеть, что произведение этого выражения на s_n дает c_n . Очевидно, что $\sum_{n=0}^N (s_n - s_{n-1}) = s_N$, и это доказывает формулу (26).

В случае эллиптических кривых (т.е. для $g = 1$) при выборе $\omega = dx$, $x_j = \sigma j$ формула (26) представляет собой частный случай суммы Тураева–Френкеля (16), получающийся специальным выбором одного из параметров (см. также формулу (4.1) в [21]).

Отношения c_{n+1}/c_n для ряда в левой части равенства (26) имеют вид

$$h(n) = \frac{[\mathbf{u}_0 + 2 \int_{x_0}^{x_{n+1}}, \mathbf{u}_0 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_1 + \int_{x_0}^{x_n}, \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_n}]}{[\mathbf{u}_0 + 2 \int_{x_0}^{x_n}, \int_{x_0}^{x_{n+1}}, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_{n+1}}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 + \int_{x_0}^{x_{n+1}}, \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_2 + \int_{x_0}^{x_{n+1}}]}. \quad (29)$$

Если рассматривать n как точку на комплексной плоскости и отождествить ее с переменной, униформизирующей риманову поверхность S , $x_n = x(n)$, то полученная функция $h(n)$ является мероморфной функцией n , как это было в эллиптическом случае. Такое отождествление инспирирует следующее определение гамма-функции для компактных римановых поверхностей рода g :

$$\Gamma^{(g)}(w+1) = \left[\mathbf{u} + \int_a^{x(w)} \omega \right] \Gamma^{(g)}(w), \quad (30)$$

где $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^g$ и $a \in S$ произвольны. При $g = 1$ это определение ведет к эллиптической гамма-функции, рассмотренной еще Джексоном (см. краткое обсуждение в приложении [21] и соответствующие ссылки). В принципе можно записать $\Gamma^{(g)}(w)$ в виде некоторого бесконечного произведения по орбите фуксовой группы, автоморфные функции которой униформируют S , но не ясно, можно ли эффективно работать с таким формальным представлением. Позднее автор надеется рассмотреть более подробно эти и другие проблемы, затрагиваемые в данной статье.

Благодарности. Автор благодарен Г. Е. Андриюсу, А. Берковичу, Я. Ф. ван Диехену за полезные обсуждения возможных следствий эллиптической цепочки Бэйли, а также Х. Розенгрена за подтверждение (до публикации [18]), что он доказал суммы (20), (21). Обсуждения с Д. Загиром и Ю. И. Маниным в апреле 2002 г. возможностей построения тета-гипергеометрических рядов произвольного рода также сыграли стимулирующую роль. Автор благодарен Институту математики им. Макса Планка в Бонне за поддержку и гостеприимство. Работа была частично поддержана грантом РФФИ (№ 00-01-00299).

Список литературы

- [1] V. P. Spiridonov. Theta hypergeometric series. In: Asymptotic Combinatorics with Application to Mathematical Physics (St. Petersburg, July 9–22, 2001). Eds. V. A. Malyshev, A. M. Vershik. Dordrecht: Kluwer, 2002. P. 307–327.
- [2] E. T. Whittaker, G. N. Watson. A Course of Modern Analysis. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.
- [3] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa, M. Okado. Adv. Stud. Pure Math. 1988. V. 16. P. 17–122.
- [4] G. Gasper, M. Rahman. Basic Hypergeometric Series. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. V. 35. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
- [5] I. B. Frenkel, V. G. Turaev. Elliptic solutions of the Yang–Baxter equation and modular hypergeometric functions. In: The Arnold–Gelfand Mathematical Seminars: Geometry and Singularity Theory. Eds. V. I. Arnold et al. Boston, MA: Birkhäuser, 1997. P. 171–204.
- [6] V. P. Spiridonov. The factorization method, self-similar potentials and quantum algebras. In: Special Functions-2000: Current Perspective and Future Directions. Proc. of the NATO Adv.

- Study Institute (Tempe, USA, May 29–June 9, 2000). NATO Sci. Ser. II. Math. Phys. Chem. V. 30. Eds. J. Bustoz, M. E. H. Ismail, S. K. Suslov. Dordrecht: Kluwer, 2001. P. 335–364.
- [7] *V. P. Spiridonov, A. S. Zhedanov.* Commun. Math. Phys. 2000. V. 210. P. 49–83.
 - [8] *W. J. Holman, L. C. Biedenharn, J. D. Louck.* SIAM J. Math. Anal. 1976. V. 7. P. 529–541.
 - [9] *S. C. Milne.* The multidimensional ${}_1\Psi_1$ sum and Macdonald identities for $A_l^{(1)}$. In: Theta Functions. Proc. 35th Summer Res. Inst. Bowdoin Coll. on Theta Functions (Brunswick, ME, July 6–24, 1987). Proc. Symp. Pure Math. V. 49. Part. 2. Eds. L. Ehrenpreis, R. C. Gunning. Providence, RI: AMS, 1989. P. 323–359.
 - [10] *S. C. Milne, G. M. Lilly.* Discrete Math. 1995. V. 139. P. 319–346.
 - [11] *R. Y. Denis, R. A. Gustafson.* SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 552–561.
 - [12] *R. A. Gustafson.* The Macdonald identities for affine root systems of classical type and hypergeometric series very-well-poised on semisimple Lie algebras. In: Proc. of the Ramanujan Birth Century Year International Symposium on Analysis (Pune, December 26–28, 1987). Eds. N. K. Thakare, K. C. Sharma, T. T. Raghunathan. New Dehli: Macmillan Co. of India, 1989. P. 185–224.
 - [13] *S. O. Warnaar.* Constr. Approx. 2002. V. 18. P. 479–502.
 - [14] *J. F. van Diejen, V. P. Spiridonov.* Math. Res. Lett. 2000. V. 7. P. 729–746.
 - [15] *J. F. van Diejen.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1997. V. 33. P. 483–508.
 - [16] *H. Rosengren.* Contemp. Math. 2001. V. 291. P. 193–202.
 - [17] *J. F. van Diejen, V. P. Spiridonov.* Lett. Math. Phys. 2001. V. 58. P. 223–238.
 - [18] *H. Rosengren.* Elliptic hypergeometric series on root systems. math.CA/0207046.
 - [19] *M. Schlosser.* Discrete Math. 2000. V. 210. P. 151–169.
 - [20] *M. Eichler, D. Zagier.* The Theory of Jacobi Forms. Progr. in Math. V. 55. Boston: Birkhäuser, 1985.
 - [21] *V. P. Spiridonov.* Int. Math. Res. Notices. 2002. V. 37. P. 1945–1977.
 - [22] *G. Bhatnagar, M. Schlosser.* Constr. Approx. 1998. V. 14. P. 531–567.
 - [23] *M. Schlosser.* Ramanujan J. 1997. V. 1. P. 243–274.
 - [24] *G. Bhatnagar.* Ramanujan J. 1999. V. 3. P. 175–203.
 - [25] *Д. Мамфорд.* Лекции о тета-функциях. М.: Мир, 1988.