Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, О внутреннем решении типа Шварцшильда в полевой теории гравитации, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 1, 155–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2030>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:31:20

© 2006 г.

С. С. Герштейн*, А. А. Логунов*,
М. А. Мествиришвили*

О ВНУТРЕННЕМ РЕШЕНИИ ТИПА ШВАРЦШИЛЬДА В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Показано, что внутреннее решение типа Шварцшильда в полевой теории гравитации не приводит к *бесконечному давлению* внутри тела, как это имеет место в общей теории относительности. Это происходит благодаря массе покоя гравитона из-за остановки процесса замедления хода времени.

Ключевые слова: гравитационная сила отталкивания, замедление хода времени, масса покоя гравитона.

Шварцшильд в статьях [1] нашел сферически-симметричные статические (внешнее и внутреннее) решения уравнений общей теории относительности (ОТО). Внешнее решение широко известно и имеет следующий вид:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{W_g}{W} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{W_g}{W} \right)^{-1} dW^2 + W^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1)$$

где $W_g = (2GM)/c^2$ – радиус Шварцшильда.

Внутреннее решение Шварцшильда для *однородного шара* радиуса a описывается интервалом

$$ds^2 = c^2 \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - qa^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - qW^2} \right)^2 dt^2 - (1 - qW^2)^{-1} dW^2 + W^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2)$$

здесь $q = (1/3)\varkappa\rho = (2GM)/(c^2 a^3)$, $\varkappa = (8\pi G)/c^2$, $\rho = (3M)/(4\pi a^3)$.

Общее свойство внешнего и внутреннего решений проявляется в том, что при определенном значении W метрические коэффициенты при дифференциале dt^2 в интервалах (1) и (2) обращаются в нуль. Обращение в нуль метрического коэффициента U при dt^2 означает, что гравитационное поле своим действием может не только замедлить ход времени, но даже и *остановить течение времени*. Для внешнего решения обращение в нуль метрического коэффициента U происходит при равенстве $W = W_g$. Чтобы исключить такую возможность, которую теория не запрещает, мы вынуждены предположить, что радиус тела удовлетворяет неравенству

$$a > W_g. \quad (3)$$

---

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: gershtein@ihep.ru; Anatoly.Logunov@ihep.ru

Для внутреннего решения это происходит при равенстве

$$W^2 = 9a^2 - 8\frac{a^3}{W_g}. \quad (4)$$

Чтобы исключить возможность обращения в нуль метрического коэффициента U внутри тела, мы вынуждены предположить, что

$$a > \frac{9}{8}W_g. \quad (5)$$

Следует подчеркнуть, что неравенства (3) и (5) не являются следствием ОТО.

Внутреннее решение Шварцшильда несколько формально, но интересно прежде всего тем, что оно является точным решением уравнений ОТО. В работах [2] на примере внешнего решения Шварцшильда показано, что в релятивистской теории гравитации (РТГ) как полевой теории неравенство (3) возникает из-за гравитационной эффективной силы отталкивания, которая проявляется благодаря массе покоя гравитона из-за остановки процесса замедления хода времени. Ниже мы в рамках РТГ рассмотрим внутреннее решение типа Шварцшильда.

Внутреннее решение Шварцшильда возникло на основании уравнений Гильберта–Эйнштейна

$$\begin{aligned} 1 - \frac{d}{dW} \left[\frac{W}{V} \right] &= \kappa W^2 \rho, \\ 1 - \frac{1}{V} - \frac{W}{UV} \frac{dU}{dW} &= -\kappa \frac{W^2}{c^2} p. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку согласно (2) метрические коэффициенты равны

$$U = \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - qa^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - qW^2} \right)^2, \quad V = (1 - qW^2)^{-1}, \quad (7)$$

находим

$$\frac{U'}{U} = \frac{qW}{\sqrt{1 - qW^2} (3\sqrt{1 - qa^2}/2 - \sqrt{1 - qW^2}/2)}, \quad U' = \frac{dU}{dW}. \quad (8)$$

Подставляя соотношения (7) и (8) в уравнение (6), получим выражение для давления:

$$\frac{p}{c^2} = \frac{\rho}{2} \frac{(\sqrt{1 - qW^2} - \sqrt{1 - qa^2})}{\sqrt{U}}. \quad (9)$$

Отсюда, в частности, видно, что если бы не было исключено равенство (4), то давление внутри тела на окружности, определяемой этим равенством, обратилось бы в бесконечность. Сингулярность, которая возникает из-за обращения метрического коэффициента U в нуль, нельзя устранить выбором системы координат, поскольку ее также имеет и скалярная кривизна R :

$$R = -8\pi G \frac{3\sqrt{1 - qa^2} - 2\sqrt{1 - qW^2}}{\sqrt{U}}. \quad (10)$$

Покажем теперь на примере внутреннего решения типа Шварцшильда, что в РТГ благодаря силе отталкивания, которая возникает из-за остановки процесса замедления хода времени, ситуация принципиально изменяется. Тот же механизм самоограничения поля, который в РТГ [2] привел к неравенству (3) во внешнем решении Шварцшильда, приведет к неравенству типа (5) для внутреннего решения Шварцшильда.

Уравнения РТГ для метрики, определяемой интервалом

$$ds^2 = c^2 U(W) dt^2 - V(W) \dot{r}^2 dW^2 - W^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (11)$$

(здесь $\dot{r} = dr/dW$), принимают вид [3]

$$1 - \frac{d}{dW} \left[\frac{W}{V \dot{r}^2} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{m_g c}{\hbar} \right)^2 \left[W^2 - r^2 + \frac{W^2}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = \kappa W^2 \rho, \quad (12)$$

$$1 - \frac{1}{V \dot{r}^2} - \frac{W}{UV \dot{r}^2} U' + \frac{1}{2} \left(\frac{m_g c}{\hbar} \right)^2 \left[W^2 - r^2 - \frac{W^2}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = -\kappa W^2 \frac{p}{c^2}, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dW} \left[\sqrt{\frac{U}{V}} W^2 \right] = 2r \sqrt{UV} \dot{r}.$$

Введем новую переменную $Z = (UW^2)/(V \dot{r}^2)$ и, складывая уравнения (12) и (13), получим

$$1 - \frac{1}{2UW} Z' + \frac{m^2}{2} (W^2 - r^2) = \frac{1}{2} \kappa W^2 \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right). \quad (14)$$

Вычитая уравнение (13) из уравнения (12), находим

$$Z' - 2Z \frac{U'}{U} - 2 \frac{Z}{W} - \frac{m^2}{2} W^3 \left(1 - \frac{U}{V} \right) = -\kappa W^3 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U, \quad (15)$$

где $m = (m_g c)/\hbar$.

В нашей задаче компоненты тензора энергии-импульса вещества равны

$$T_0^0 = \rho, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\frac{p(W)}{c^2}.$$

Уравнение вещества

$$\nabla_\nu (\sqrt{-g} T_\mu^\nu) = \partial_\nu (\sqrt{-g} T_\mu^\nu) + \frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\sigma\nu} \partial_\mu g^{\sigma\nu} = 0$$

для данной задачи сводится к следующему виду:

$$\frac{1}{c^2} \frac{dp}{dW} = - \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{1}{2U} \frac{dU}{dW}. \quad (16)$$

Поскольку давление возрастает по направлению к центру шара, это приводит к неравенству

$$\frac{dU}{dW} > 0, \quad (17)$$

которое свидетельствует, что по мере приближения к центру шара функция U убывает, а следовательно, идет замедление хода времени по сравнению с инерциальным.

Поскольку во внутренней задаче Шварцшильда плотность ρ принята *постоянной*, уравнение (16) легко решается:

$$\rho + \frac{p}{c^2} = \frac{\alpha}{\sqrt{U}}. \quad (18)$$

Сравнивая (9) и (18), находим постоянную α :

$$\alpha = \rho\sqrt{1 - qa^2}. \quad (19)$$

Уравнения (14) и (15) в предположении, что

$$m^2(W^2 - r^2) \ll 1, \quad \frac{U}{V} \ll 1$$

и после введения независимой переменной $y = W^2$ принимают вид (здесь мы обозначаем $Z' = dZ/dy$)

$$Z' = U(1 - 3qy) + \frac{\alpha\kappa}{2}y\sqrt{U}, \quad (20)$$

$$\sqrt{U} Z' - \frac{1}{y}Z\sqrt{U} - 4Z(\sqrt{U})' + \frac{\alpha\kappa}{2}yU - \frac{m^2}{4}y\sqrt{U} = 0. \quad (21)$$

В работах [2] при анализе внешнего сферически-симметричного решения Шварцшильда мы увидели, что благодаря гравитационной эффективной силе отталкивания метрический коэффициент U , определяющий замедление хода времени по сравнению с инерциальным, даже в сильном гравитационном поле не обращается в нуль.

Именно поэтому ниже мы будем исследовать поведение решения этих уравнений в области малых значений y . При массе гравитона, равной нулю, из выражения (7) для малых значений переменной y имеем

$$\sqrt{U} \sim \frac{1}{2}(3\sqrt{1 - qa^2} - 1) + \frac{qy}{4} + \frac{1}{16}q^2y^2. \quad (22)$$

Из выражения (22) также видно, что функция $\sqrt{U}$ для внутреннего решения Шварцшильда может стать равной нулю, если

$$3\sqrt{1 - qa^2} = 1, \quad (23)$$

что и приводит к бесконечному значению в центре шара как давления p , так и скалярной кривизны R . Поскольку при наличии массы покоя гравитона уравнения (20), (21) останавливают процесс замедления хода времени, то естественно ожидать, что равенство (23) не может иметь места в физической (вещественной) области для функции $\sqrt{U}$. На основании (22) будем искать решение уравнений (20), (21) для функции $\sqrt{U}$ в форме

$$\sqrt{U} = \beta + \frac{qy}{4} + \frac{1}{16}q^2y^2, \quad (24)$$

где β – неизвестная постоянная, которую необходимо определить, используя уравнения (20), (21).

Подставляя выражение (24) в уравнение (20) и интегрируя, находим

$$Z = \beta^2 y + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\beta q}{2} - 3\beta^2 q + \frac{\alpha \varkappa \beta}{2} \right) + \frac{y^3}{3} \left[\frac{q^2}{8} \left(\beta + \frac{1}{2} \right) - \frac{3\beta}{2} q^2 + \frac{\alpha \varkappa q}{8} \right]. \quad (25)$$

Учитывая выражения (24) и (25) в уравнении (21) и пренебрегая малыми членами порядка $(my)^2$, получим для определения постоянной β уравнение

$$2\beta^2 q + \beta(q - \alpha \varkappa) + \frac{m^2}{3} = 0. \quad (26)$$

Заметим в качестве пояснения, что член, содержащий y^2 , можно записать как

$$-\frac{qy^2}{48} \{ 7[2\beta^2 q + \beta(q - \alpha \varkappa)] + 3m^2 \}$$

и, принимая во внимание уравнение (26), привести к виду

$$-\frac{q}{72} m^2 y^2.$$

Учитывая, что по определению

$$\alpha \varkappa - q = \frac{\varkappa \rho}{3} (3\sqrt{1 - qa^2} - 1),$$

из уравнения (26) находим

$$\beta = \frac{3\sqrt{1 - qa^2} - 1 + [(3\sqrt{1 - qa^2} - 1)^2 - (8m^2)/(\varkappa \rho)]^{1/2}}{4}. \quad (27)$$

Таким образом, метрический коэффициент U , определяющий процесс замедления хода времени по сравнению с инерциальным, *отличен от нуля*.

Если массу покоя гравитона положить равной нулю, выражение (27), как и следовало ожидать, точно совпадает с постоянным членом выражения (22). Из формулы (27) можно определить минимальное значение величины β :

$$\beta_{\min} = \left(\frac{m^2}{2\varkappa \rho} \right)^{1/2}. \quad (28)$$

Величина β в функции $\sqrt{U}$ определяет границу процесса замедления хода времени гравитационным полем шара. Это означает, что дальнейшее *замедление* хода времени гравитационным полем *невозможно*. Именно поэтому скалярная кривизна, определяемая выражением (10), в отличие от ОТО будет всюду конечна. Таким образом, само гравитационное поле благодаря массе покоя гравитона останавливает процесс замедления хода времени.

Согласно (27), выполнение равенства (23) благодаря наличию массы покоя гравитона *невозможно*, поскольку имеет место неравенство

$$3\sqrt{1 - qa^2} - 1 \geq 2\sqrt{2} \left(\frac{m^2}{\varkappa \rho} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

Принимая во внимание верное по определению равенство

$$qa^2 = \frac{W_g}{a},$$

на основании неравенства (29) для $\kappa\rho \gg m^2$ находим

$$a \geq \frac{9}{8}W_g \left(1 + \sqrt{\frac{m^2}{2\kappa\rho}}\right). \quad (30)$$

Это ограничение на радиус тела, возникающее при изучении внутреннего решения, более сильное, чем ограничение (3), полученное в работах [2] при анализе внешнего решения. Неравенство (30), как мы видим, непосредственно следует из теории, тогда как в ОТО, чтобы избежать бесконечного давления внутри тела, неравенство (5) вынуждены вводить дополнительно. На основании (18) и (19) находим для давления выражение

$$\frac{p}{c^2} = \frac{-\rho\sqrt{U} + \rho\sqrt{1 - qa^2}}{\sqrt{U}}.$$

Учитывая равенство (28), получим максимальное давление в центре шара:

$$\frac{p}{c^2} \simeq \rho \left[\frac{2\kappa\rho}{m^2} (1 - qa^2) \right]^{1/2}.$$

Давление в центре шара конечно, тогда как в ОТО согласно (2) оно бесконечно.

Наличие в РТГ *эффективной силы отталкивания*, возникающей в сильных гравитационных полях, принципиально отличает ее от ОТО Эйнштейна и от ньютоновской теории гравитации, в которых господствуют только *силы притяжения*. В полевой теории гравитации наличие массы покоя гравитона и фундаментальное свойство гравитационного поля замедлять ход времени физического процесса по сравнению с инерциальным временем приводят к тому, что *гравитационная сила* может быть не только *силой притяжения*, но при определенных условиях (в сильных полях) и *эффективной силой отталкивания*. Эффективная сила отталкивания останавливает процесс замедления хода времени гравитационным полем. Гравитационное поле, таким образом, в принципе не может остановить ход времени физического процесса, поскольку оно обладает фундаментальным свойством *самоограничения*. Именно это свойство гравитационного поля кардинально изменяет картину эволюции материи по сравнению с ОТО, исключая возможность образования черных дыр как нефизических объектов.

Благодарности. В заключение авторы выражают благодарность В. А. Петрову и В. В. Киселеву за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] K. Schwarzschild, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, 1916, 189; 424.
- [2] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *Докл. РАН*, **402** (2005), 34; *ТМФ*, **2005:2** (2004), 272.
- [3] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, *Релятивистская теория гравитации*, Наука, М., 1989; А. А. Логунов, *Теория гравитационного поля*, Наука, М., 2001; gr-qc/0210005.

Поступила в редакцию 16.VIII.2005 г.