Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. З. Голубчик, В. В. Соколов, Согласованные скобки Ли и уравнение Янга–Бакстера, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 2, 195–207

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2031>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 09:22:03

© 2006 г.

И. З. Голубчик*, В. В. Соколов†

СОГЛАСОВАННЫЕ СКОБКИ ЛИ И УРАВНЕНИЕ ЯНГА–БАКСТЕРА

Показано, что всякая пара согласованных скобок Ли, имеющая общую инвариантную форму, порождает непостоянное решение классического уравнения Янга–Бакстера. Описаны соответствующие скобки Пуассона, тройки Манина и биалгебры Ли. Оказалось, что все биалгебры, связанные с решениями, найденными Белавиным и Дринфельдом, изоморфны биалгебрам, порожденным некоторыми нашими решениями. Для произвольной пары согласованных скобок построен дубль, обладающий общей инвариантной формой. Для этого дубля найдено соответствующее решение квантового уравнения Янга–Бакстера.

Ключевые слова: уравнение Янга–Бакстера, биалгебра Ли, тройка Манина.

1. ВВЕДЕНИЕ

Две скобки Ли $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$, заданные на конечномерном векторном пространстве U , называются согласованными, если любая их линейная комбинация является скобкой Ли. По нашему мнению, пара согласованных скобок Ли (или, что то же самое, пара согласованных линейных скобок Пуассона) является одним из базисных математических понятий в теории классических интегрируемых систем. В работах [1], [2] было показано, что всякое разложение алгебры петель над простой алгеброй Ли в прямую сумму рядов Тейлора и дополнительной подалгебры определяет пару согласованных скобок Ли. В настоящей работе мы показываем, что всякая пара согласованных скобок Ли, обладающих общей невырожденной инвариантной билинейной формой, порождает решение $r(x, y)$ классического уравнения Янга–Бакстера, рациональное по x, y . Для тривиальной скобки $[\cdot, \cdot]_1$ наше решение совпадает с решением Янга–Белавина (см. [3]) для присоединенного представления скобки $[\cdot, \cdot]_2$. В общем случае, в отличие от известных примеров, наше решение не сводится к решению вида $r(x - y)$ заменой параметров x, y .

*Башкирский государственный педагогический университет, Уфа, Россия

†Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Москва, Россия. E-mail: sokolov@itp.ac.ru

В разделе 5 для случая, когда пара согласованных скобок на пространстве $\mathbf{U}$ не обладает общей невырожденной инвариантной формой, строится пара согласованных скобок на дубле $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^*$, обладающая такой формой. В разделе 6 для пары скобок на дубле мы находим квантовый аналог решения классического уравнения Янга–Бакстера, построенного в разделе 2. В разделах 4, 7 и 8 описываются соответствующие скобки Пуассона, тройки Манина и биалгебры Ли. Оказывается, что все биалгебры, соответствующие решениям классического уравнения Янга–Бакстера, найденным Белавиным и Дринфельдом [4], изоморфны биалгебрам, порожденным некоторыми из наших решений.

2. РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЯНГА–БАКСТЕРА

Рассмотрим классическое уравнение Янга–Бакстера

$$[r^{1,2}(\lambda, \mu), r^{1,3}(\lambda, \nu)] + [r^{1,2}(\lambda, \mu), r^{2,3}(\mu, \nu)] + [r^{1,3}(\lambda, \nu), r^{2,3}(\mu, \nu)] = 0, \quad (1)$$

где

$$r(x, y) = \sum_i a_i(x, y) \otimes b_i(x, y)$$

– функция двух комплексных аргументов со значениями в $gl(N) \otimes gl(N)$. Обозначим через $r^{i,j}$, где $1 \leq i, j \leq 3$, $i \neq j$, следующие функции:

$$\begin{aligned} r^{1,2}(\lambda, \mu) &= \sum_i a_i(\lambda, \mu) \otimes b_i(\lambda, \mu) \otimes 1, \\ r^{1,3}(\lambda, \nu) &= \sum_i a_i(\lambda, \nu) \otimes 1 \otimes b_i(\lambda, \nu), \\ r^{2,3}(\mu, \nu) &= \sum_i 1 \otimes a_i(\mu, \nu) \otimes b_i(\mu, \nu) \end{aligned}$$

со значениями в $gl(N) \otimes gl(N) \otimes gl(N)$.

Мы предполагаем, как обычно, что выполнено условие унитарности

$$r^{1,2}(\lambda, \mu) = -r^{2,1}(\mu, \lambda), \quad (2)$$

где

$$r^{2,1}(\mu, \lambda) = \sum_i b_i(\mu, \lambda) \otimes a_i(\mu, \lambda) \otimes 1.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$ – две согласованные скобки Ли на N -мерном векторном пространстве $\mathbf{U}$. Предположим, что существует невырожденная симметрическая форма $\omega(X, Y)$ на $\mathbf{U}$, которая инвариантна относительно обеих скобок Ли $[\cdot, \cdot]_{1,2}$. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N$ – базис, ортонормированный относительно ω . Тогда функция

$$r(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{(x \operatorname{ad}_1 \mathbf{e}_i + \operatorname{ad}_2 \mathbf{e}_i) \otimes (y \operatorname{ad}_1 \mathbf{e}_i + \operatorname{ad}_2 \mathbf{e}_i)}{x - y} \quad (3)$$

удовлетворяет (1), (2). Здесь ad_i – это линейные операторы, определенные формулой

$$\text{ad}_i q(p) = [q, p]_i, \quad i = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что условие (2) выполнено. Из согласованности скобок $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$ следует, что

$$[\lambda \text{ad}_1 p + \text{ad}_2 p, \lambda \text{ad}_1 q + \text{ad}_2 q] = \lambda \text{ad}_1(\lambda[p, q]_1 + [p, q]_2) + \text{ad}_2(\lambda[p, q]_1 + [p, q]_2). \quad (4)$$

Отсюда имеем

$$[x \text{ad}_1 \mathbf{e}_i + \text{ad}_2 \mathbf{e}_i, x \text{ad}_1 \mathbf{e}_j + \text{ad}_2 \mathbf{e}_j] = \sum_{k=1}^N (\alpha_{ij}^k + \beta_{ij}^k)(x \text{ad}_1 \mathbf{e}_k + \text{ad}_2 \mathbf{e}_k),$$

где α_{ij}^k и β_{ij}^k – структурные константы, соответствующие скобкам $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$, соответственно. Так как базис $\mathbf{e}_i$ ортонормирован, выполнены соотношения

$$\alpha_{ij}^k = -\alpha_{kj}^i, \quad \beta_{ij}^k = -\beta_{kj}^i. \quad (5)$$

Кроме того, структурные константы удовлетворяют соотношениям

$$\alpha_{ij}^k = -\alpha_{ji}^k, \quad \beta_{ij}^k = -\beta_{ji}^k. \quad (6)$$

Левая часть уравнения (1) равна

$$\sum_{i,j,k=1}^N \frac{Z_{ijk}}{(\lambda - \mu)(\mu - \nu)(\lambda - \nu)} (\lambda \text{ad}_1 \mathbf{e}_i + \text{ad}_2 \mathbf{e}_i) \otimes (\mu \text{ad}_1 \mathbf{e}_j + \text{ad}_2 \mathbf{e}_j) \otimes (\nu \text{ad}_1 \mathbf{e}_k + \text{ad}_2 \mathbf{e}_k),$$

где

$$Z_{ijk} = (\mu - \nu)(\lambda \alpha_{jk}^i + \beta_{jk}^i) + (\lambda - \nu)(\mu \alpha_{ik}^j + \beta_{ik}^j) + (\lambda - \mu)(\nu \alpha_{ij}^k + \beta_{ij}^k).$$

Используя соотношения (5) и (6), мы получаем $Z_{ijk} = 0$.

Заметим, что если $[\cdot, \cdot]_1 = 0$, то функция (3) – это в точности решение Янга–Белавина (см. [3]) для присоединенного представления скобки $[\cdot, \cdot]_2 = 0$. Как оказалось, почти все утверждения и доказательства из книги [5], связанные с решением Янга–Белавина, могут быть обобщены на случай решения (3).

3. ПРИМЕРЫ

Для любой полупростой алгебры Ли $\mathcal{U}$ со скобками $[\cdot, \cdot]_1$ всякая согласованная с $[\cdot, \cdot]_1$ скобка $[\cdot, \cdot]_2$ задается следующей формулой:

$$[a, b]_2 = [R(a), b] + [a, R(b)] - R([a, b]), \quad (7)$$

где R – некоторый линейный оператор $R: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$. Кроме того, известно, что если (7) удовлетворяет тождеству Якоби, то скобка $[\cdot, \cdot]_2$ согласована с $[\cdot, \cdot]_1$.

Ясно, что операторы R и $R + \text{ad } c$ задают одну и ту же скобку (7) для любого $c \in \mathcal{U}$. Преобразования

$$[a, b]_1 \rightarrow c_1[a, b]_1 + c_2[a, b]_2, \quad [a, b]_2 \rightarrow c_3[a, b]_1 + c_4[a, b]_2, \quad c_i \in \mathbb{C},$$

определяют действие группы Мёбиуса на множестве допустимых операторов R . В частности, сдвиг $R \rightarrow R + c_3 E$ соответствует замене $[a, b]_2 \rightarrow c_3[a, b]_1 + [a, b]_2$. Еще один класс очевидных преобразований определяется автоморфизмами $\mathcal{U}$. Два оператора R , связанные описанными выше преобразованиями, называются *эквивалентными*.

Если оператор R кососимметричен относительно инвариантной формы $(\cdot, \cdot)$ на $\mathcal{U}$, то скобка (7) инвариантна относительно этой формы. Для простых алгебр Ли обратное утверждение также верно с точностью до сдвига $R \rightarrow R + \alpha E$.

Хотя описание всех допустимых операторов R для произвольной полупростой алгебры Ли $\mathcal{U}$ представляется весьма непростой задачей, для алгебр Ли малой размерности эта задача может быть решена с помощью исследования переопределенной алгебраической системы, эквивалентной тождеству Якоби для скобки (7).

Легко проверить, что для $\mathcal{U} = so(3)$ (или $\mathcal{U} = sl(2)$) оператор R произволен. Если мы дополнительно предположим, что форма Киллинга для $so(3)$ инвариантна относительно скобки (7), то все допустимые операторы R оказываются эквивалентными оператору $R = 0$.

Простейшим нетривиальным случаем является $\mathcal{U} = so(4) \cong so(3) \oplus so(3)$. Пусть $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ – ортонормированный базис в $so(3)$. Выберем

$$\mathbf{g}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}_{i+3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{f}_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

в качестве базиса $so(4)$. Всякая невырожденная инвариантная форма на $so(4)$ задается формулой

$$\left(\sum_i x_i \mathbf{g}_i + \sum_i x_{i+3} \mathbf{g}_{i+3}, \sum_i y_i \mathbf{g}_i + \sum_i y_{i+3} \mathbf{g}_{i+3} \right) \equiv \tau \sum_i x_i y_i + \sum_i x_{i+3} y_{i+3}, \quad (8)$$

где $\tau \neq 0$ – некоторый параметр. Нетрудно проверить, что если форма (8) инвариантна относительно скобки (7), то оператор R эквивалентен оператору вида

$$R = \begin{pmatrix} \alpha E & -\tau A \\ A^t & -\alpha E \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где α – параметр, A – некоторая (3×3) -матрица.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Скобка (7), (9) удовлетворяет тождеству Якоби тогда и только тогда, когда оператор R принадлежит к одному из следующих классов:

Класс 1: $A = 0$, а α, τ произвольны;

Класс 2: $\alpha = 0$, $\tau = -1$ и матрица A произвольна;

Класс 3: $\alpha = 0$, τ произвольно и $\text{rank } A = 1$;

Класс 4: $2\alpha + (\tau + 1) \text{Det } A = 0$ и A – произвольная ортогональная матрица.

Из-за автоморфизмов $so(4)$ матрица A определена с точностью до преобразований $A \rightarrow T_1 A T_2$, где T_i – ортогональные матрицы. Это означает, что без потери общности мы можем предположить, что $A = \text{diag}(a, b, c)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Схема Ленарда–Магри [6] для пары согласованных скобок из класса 2 приводит к $so(4)$ -волчку Шоттки–Манакова, в то время как $so(4)$ -волчок Стеклова (см., например, [7]) соответствует паре согласованных скобок Ли на $so(4)$, которые не имеют общей инвариантной формы. В этом случае

$$R = \begin{pmatrix} \text{diag}(f_1, g_1, h_1) & \text{diag}(a_1, b_1, c_1) \\ \text{diag}(a_2, b_2, c_2) & \text{diag}(f_2, g_2, h_2) \end{pmatrix},$$

где

$$a_1 a_2 = b_1 b_2 = c_1 c_2, \quad f_i = \frac{a_i(b_i^2 + c_i^2)}{2b_i c_i}, \quad g_i = \frac{b_i(a_i^2 + c_i^2)}{2a_i c_i}, \quad h_i = \frac{c_i(a_i^2 + b_i^2)}{2a_i b_i}.$$

Некоторые примеры согласованных скобок Ли содержатся в работах [8], [9]. Еще несколько примеров могут быть извлечены из следующей общей конструкции.

Предположим, что конечномерное векторное пространство A наделено парой коммутативных ассоциативных умножений $\times$ и $\circ$ таких, что любая линейная комбинация этих умножений ассоциативна. Пусть $\mathcal{U}$ – алгебра Ли. Тогда мы имеем пару согласованных скобок Ли на векторном пространстве $\mathbf{U} = A \otimes \mathcal{U}$, определенных формулами

$$[a \otimes u, b \otimes v]_1 = (a \times b) \otimes [u, v], \quad [a \otimes u, b \otimes v]_2 = (a \circ b) \otimes [u, v].$$

Задача об описании пар согласованных ассоциативных умножений представляет самостоятельный интерес. Например, пусть $A = P_{n-1}(x)$ – векторное пространство многочленов от одной переменной степени, не превышающей $n-1$, и $f(x)$ – заданный многочлен степени n . Тогда

$$A \cdot A \subset A \oplus fA, \quad A \cdot A \cdot A \subset A \oplus fA \oplus f^2A. \quad (10)$$

Определим произведение $\times$ и $\circ$ на пространстве A формулой

$$a \times b + f a \circ b = a \cdot b.$$

Из (10) следует (ср. с [2]), что операции $\times$ и $\circ$ ассоциативны и согласованны. Простейший интересный случай – это алгебра $\mathcal{U} = sl(2)$ или, что в комплексном случае то же самое, $\mathcal{U} = so(3)$.

4. СКОБКИ ПУАССОНА

Как обычно, решение $r(\lambda, \mu)$ классического уравнения Янга–Бакстера определяет скобки Пуассона вида

$$\{L(\lambda) \otimes, L(\mu)\} = [r(\lambda, \mu), L(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes L(\mu)] \quad (11)$$

и

$$\{M(\lambda) \otimes, M(\mu)\} = [r(\lambda, \mu), M(\lambda) \otimes M(\mu)], \quad (12)$$

где L принадлежит некоторой бесконечномерной алгебре Ли $\mathcal{G}$, а M принадлежит группе G , “ассоциированной” с $\mathcal{G}$. Опишем $\mathcal{G}$ и G , соответствующие нашему решению (3).

Пусть $[\cdot, \cdot]_{1,2}$ – совместные скобки Ли на векторном пространстве $\mathbf{U}$. Обозначим через $\mathcal{G}_\alpha$ конечномерную алгебру Ли, состоящую из $(N \times N)$ -матриц вида $\alpha \operatorname{ad}_1 q + \operatorname{ad}_2 q$, где $q \in \mathbf{U}$, α – фиксированное комплексное число. Пусть G_α – группа Ли алгебры $\mathcal{G}_\alpha$. Определим $\mathcal{G}$ как множество всех $(N \times N)$ -матриц $a(\lambda)$ с рациональными по λ элементами таких, что $a(\alpha) \in \mathcal{G}_\alpha$ для всех α , которые не являются полюсами a . Аналогично выберем в качестве G множество всех $(N \times N)$ -матриц $b(\lambda)$ с рациональными по λ элементами таких, что $b(\alpha) \in G_\alpha$.

Таким образом, оператор L в нашем случае является рациональной функцией. Формула (11) определяет скобку Пуассона между коэффициентами разложения L в ряд Лорана в точке $\lambda = 0$:

$$L = \sum_{i=-m}^{\infty} L^i \lambda^i, \quad m \geq 0.$$

Обозначим элементы матрицы L^i через $L_{j,k}^i$. По определению скобка Пуассона (11) между $L_{i,j}^k$ и $L_{p,q}^r$ задается формулой

$$\sum_{k,r} \{L_{i,j}^k, L_{p,q}^r\} \lambda^k \mu^r = [r(\lambda, \mu), L(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes L(\mu)]_{ipjq}, \quad (13)$$

где

$$(A \otimes B)_{ipjq} = A_{ij} B_{pq}.$$

Следующее утверждение показывает, что правая часть (13) не имеет полюса при $\mu = \lambda$, т.е.

$$[r(\lambda, \mu), L(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes L(\mu)] = \sum_{k,r} z_{kr} \lambda^k \mu^r.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^N (\lambda \operatorname{ad}_1 \mathbf{e}_i + \operatorname{ad}_2 \mathbf{e}_i) \otimes (\lambda \operatorname{ad}_1 \mathbf{e}_i + \operatorname{ad}_2 \mathbf{e}_i). \quad (14)$$

Тогда

$$[P(\lambda), L(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes L(\lambda)] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что

$$[P(\lambda), (\lambda \operatorname{ad}_1 \mathbf{e}_j + \operatorname{ad}_2 \mathbf{e}_j) \otimes 1 + 1 \otimes (\lambda \operatorname{ad}_1 \mathbf{e}_j + \operatorname{ad}_2 \mathbf{e}_j)] = 0.$$

Последнее следует из (5), (6).

Для квадратичной скобки (12) аналог предложения 2 имеет следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть элемент $P(\lambda)$ задан формулой (14). Тогда

$$[P(\lambda), M(\lambda) \otimes M(\lambda)] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$[P(\alpha), M(\alpha) \otimes M(\alpha)] = M(\alpha) \otimes M(\alpha)(M(\alpha)^{-1} \otimes M(\alpha)^{-1}P(\alpha)M(\alpha) \otimes M(\alpha) - P(\alpha)).$$

Но $P(\alpha)$ не зависит от выбора ортонормированного базиса в конечномерной алгебре Ли $\mathcal{G}_\alpha$. Поскольку $M(\alpha)^{-1}(\alpha \operatorname{ad}_1 \mathbf{e}_i + \operatorname{ad}_2 \mathbf{e}_i)M(\alpha)$ также является ортонормированным базисом в $\mathcal{G}_\alpha$, получаем

$$M(\alpha)^{-1} \otimes M(\alpha)^{-1}P(\alpha)M(\alpha) \otimes M(\alpha) = P(\alpha).$$

5. ДУБЛЬ СОВМЕСТНЫХ СКОБОК ЛИ

Предположим, что у нас имеется пара совместных скобок Ли $[\cdot, \cdot]_{1,2}$ на векторном пространстве $\mathbf{U}$ и скобка $[\cdot, \cdot]_1$ обладает невырожденной инвариантной формой. Однако в общем случае эта форма не является инвариантной относительно $[\cdot, \cdot]_2$. В этом разделе мы продолжаем пару скобок на подходящий дубль так, что скобки на дубле имеют общую невырожденную инвариантную форму.

Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^*$. Мы продолжаем скобки $[\cdot, \cdot]_{1,2}$ на $\mathbf{V}$ с помощью формул

$$[c, d]_i = 0, \quad c, d \in \mathbf{U}^*, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

и

$$[a, c]_i(b) = -c([a, b]_i), \quad a, b \in \mathbf{U}, \quad c \in \mathbf{U}^*, \quad i = 1, 2. \quad (16)$$

Определим форму ω на $\mathbf{V}$ формулой

$$\omega((a, c), (b, d)) = c(b) + d(a). \quad (17)$$

Если скобка $[\cdot, \cdot]_1$ задает полупростую алгебру $\mathcal{G}$, мы можем отождествить $\mathbf{U}^*$ с $\mathbf{U}$ с помощью невырожденной инвариантной формы K на $\mathcal{G}$. В этом случае продолжение скобки $[\cdot, \cdot]_1$ задается формулой

$$[(a, c), (b, d)]_1 = ([a, b], [a, d] + [c, b]), \quad a, b, c, d \in \mathcal{G}.$$

Как уже отмечалось, в случае полупростой алгебры скобка $[\cdot, \cdot]_2$ имеет вид (7). Нетрудно проверить, что продолжение этой скобки на дубль определяется как

$$\begin{aligned} [(a, c), (b, d)]_2 = & ([R(a), b] + [a, R(b)] - R([a, b]), -[R(a), d] + [a, R^t(d)] - R^t([a, d]) + \\ & + [R(b), c] - [b, R^t(c)] + R^t([b, c])). \end{aligned}$$

Общая инвариантная форма (17) задается формулой

$$\omega((a, c), (b, d)) = K(c, b) + K(d, a).$$

Следующее утверждение может быть проверено непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Формулы (15), (16) задают пару согласованных скобок на $\mathbf{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^*$. Невырожденная форма (17) инвариантна относительно обеих этих скобок.

6. КВАНТОВАНИЕ РЕШЕНИЯ (3) ДЛЯ ДУБЛЯ

Найдем решение (3), связанное с дублем, явно. Пусть $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N$ и $\mathbf{f}^1, \dots, \mathbf{f}^N$ – двойственные базисы в $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$, соответственно. Тогда

$$\mathbf{e}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{f}_j, \mathbf{f}^j), \quad \mathbf{e}_{j+N} = \frac{1}{\sqrt{-2}}(\mathbf{f}_j, -\mathbf{f}^j), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

– базис в $\mathbf{V}$, ортонормированный относительно формы ω . Нетрудно проверить, что в этом базисе решение (3) имеет вид

$$\begin{aligned} r(x, y) &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{(x \operatorname{ad}_1(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}^i) + \operatorname{ad}_2(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}^i) \otimes (y \operatorname{ad}_1(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}^i) + \operatorname{ad}_2(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}^i)))}{x - y} - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \frac{(x \operatorname{ad}_1(\mathbf{f}_i, -\mathbf{f}^i) + \operatorname{ad}_2(\mathbf{f}_i, -\mathbf{f}^i)) \otimes (y \operatorname{ad}_1(\mathbf{f}_i, -\mathbf{f}^i) + \operatorname{ad}_2(\mathbf{f}_i, -\mathbf{f}^i))}{x - y} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{(x \operatorname{ad}_1(\mathbf{f}_i, 0) + \operatorname{ad}_2(\mathbf{f}_i, 0)) \otimes (y \operatorname{ad}_1(0, \mathbf{f}^i) + \operatorname{ad}_2(0, \mathbf{f}^i))}{x - y} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{(x \operatorname{ad}_1(0, \mathbf{f}^i) + \operatorname{ad}_2(0, \mathbf{f}^i)) \otimes (y \operatorname{ad}_1(\mathbf{f}_i, 0) + \operatorname{ad}_2(\mathbf{f}_i, 0))}{x - y}. \end{aligned} \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Операторы $\operatorname{ad}_j(f, 0)$ переводят $\mathbf{U}$ в $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^*$ в $\mathbf{U}^*$. Операторы $\operatorname{ad}_j(0, f)$ переводят $\mathbf{U}$ в $\mathbf{U}^*$ и $\mathbf{U}^*$ в $\{0\}$.

Из замечания 2 и формулы (18) следует, что $r^3 = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Оператор $R = e^r = 1 + r + r^2/2$ удовлетворяет квантовому уравнению Янга–Бакстера

$$\begin{aligned} R^{1,2}(\lambda, \mu) R^{1,3}(\lambda, \nu) R^{2,3}(\mu, \nu) &= R^{2,3}(\mu, \nu) R^{1,3}(\lambda, \nu) R^{1,2}(\lambda, \mu), \\ R^{1,2}(\lambda, \mu) R^{2,1}(\mu, \lambda) &= 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (18) и замечания 2 следует, что операторы $r^{i,j}$ лежат в ассоциативной подалгебре $\mathcal{A}$, для которой $\mathcal{A}^4 = \{0\}$. Если $a, b \in \mathcal{A}$, то по формуле Кэмпбелла–Хаусдорфа имеем

$$e^a e^b = \exp \left(a + b + \frac{1}{2}[a, b] + \frac{1}{12}[a, [a, b]] + \frac{1}{12}[b, [b, a]] \right). \quad (19)$$

Положим

$$\begin{aligned} P &= e^{r^{1,2}} e^{r^{1,3}} e^{r^{2,3}}, \quad Q = e^{r^{2,3}} e^{r^{1,3}} e^{r^{1,2}}, \\ s_i &= r^{1,2} + r^{1,3} + (-1)^i \frac{1}{2}[r^{1,2}, r^{1,3}] + \frac{1}{12}[r^{1,2}, [r^{1,2}, r^{1,3}]] + \frac{1}{12}[r^{1,3}, [r^{1,3}, r^{1,2}]], \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда

$$P = e^{s_2} e^{r^{2,3}}, \quad Q = e^{r^{2,3}} e^{s_1}.$$

Пользуясь формулой (19), сравним $\ln P$ и $\ln Q$. Линейные по r члены в обоих выражениях равны $r^{1,2} + r^{1,3} + r^{2,3}$. Сравнивая кубические члены, получаем верное тождество

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}[[r^{1,2}, r^{1,3}], r^{2,3}] + \frac{1}{12}[r^{2,3}, [r^{2,3}, r^{1,2} + r^{1,3}]] + \frac{1}{12}[r^{1,2} + r^{1,3}, [r^{1,2} + r^{1,3}, r^{2,3}]] = \\ & = -\frac{1}{4}[r^{2,3}, [r^{1,2}, r^{1,3}]] + \frac{1}{12}[r^{2,3}, [r^{2,3}, r^{1,2} + r^{1,3}]] + \frac{1}{12}[r^{1,2} + r^{1,3}, [r^{1,2} + r^{1,3}, r^{2,3}]]. \end{aligned}$$

Согласно основному свойству алгебры $\mathcal{A}$ члены степени выше третьей отсутствуют. Равенство квадратичных членов эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{2}([r^{1,2}, r^{2,3}] + [r^{1,3}, r^{2,3}] + [r^{1,2}, r^{1,3}]) = \frac{1}{2}([r^{2,3}, r^{1,2}] + [r^{2,3}, r^{1,3}] - [r^{1,2}, r^{1,3}]).$$

Это не что иное, как классическое уравнение Янга-Бакстера для r , которое выполнено согласно теореме 1.

7. ТРОЙКА МАНИНА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ СОГЛАСОВАННЫМ СКОБКАМ ЛИ

В этом разделе мы рассматриваем биалгебру Ли, соответствующую решению (3). Известно [10], что понятия биалгебры и тройки Манина практически совпадают.

Пусть у нас есть две согласованные скобки Ли $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$ на N -мерном векторном пространстве $\mathbf{U}$. Предположим, что скобка $[\cdot, \cdot]_1$ имеет тривиальный центр. Рассмотрим векторное подпространство

$$\mathcal{L} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^m \lambda^i (\lambda \operatorname{ad}_1 q_i + \operatorname{ad}_2 q_i) \mid m \in \mathbb{Z}, q_i \in \mathbf{U} \right\} \quad (20)$$

в алгебре петель над алгеброй Ли линейных операторов на $\mathbf{U}$. Из формулы (4) следует, что $\mathcal{L}$ – подалгебра Ли.

Нетрудно проверить, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ \oplus \mathcal{L}_-,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+ &= \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda^i (\lambda \operatorname{ad}_1 q_i + \operatorname{ad}_2 q_i) \mid m \geq 0, q_i \in \mathbf{U} \right\}, \\ \mathcal{L}_- &= \left\{ \sum_{i=-\infty}^{-1} \lambda^i (\lambda \operatorname{ad}_1 q_i + \operatorname{ad}_2 q_i) \mid q_i \in \mathbf{U} \right\}. \end{aligned}$$

Из (4) следует, что $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ – подалгебры в $\mathcal{L}$. Тривиальность центра $[\cdot, \cdot]_1$ влечет за собой условие $\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_- = \{0\}$.

Предположим, что существует невырожденная симметричная форма $\omega(X, Y)$ на $\mathbf{U}$, инвариантная относительно обеих скобок $[\cdot, \cdot]_{1,2}$. Определим форму Ω на $\mathcal{L}$ формулой

$$\Omega(\lambda^m (\lambda \operatorname{ad}_1 a + \operatorname{ad}_2 a), \lambda^n (\lambda \operatorname{ad}_1 b + \operatorname{ad}_2 b)) = \delta_{m+n+1}^0 \omega(a, b), \quad (21)$$

где δ обозначает символ Кронекера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Форма Ω является невырожденной инвариантной формой на $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ являются изотропными подалгебрами относительно Ω . Подалгебра $\mathcal{L}_-$ изоморфна $\mathcal{L}_+^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Невырожденность Ω следует из формулы (21) и невырожденности ω . Формула (4) и инвариантность ω дают инвариантность Ω . Изотропность $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ следует из того, что $\delta_{m+n+1}^0 = 0$ при $n \geq 0$, $m \geq 0$ и при $n \leq -1$, $m \leq -1$. Формула

$$\Psi(\lambda^n (\lambda \operatorname{ad}_1 q + \operatorname{ad}_2 q)) = \lambda^n q$$

определяет изоморфизм векторных пространств $\mathcal{L}$ и $\mathbf{U}((\lambda^{-1}))$ такой, что $\Psi(\mathcal{L}_+) = \mathbf{U}[\lambda]$ и $\Psi(\mathcal{L}_-) = \mathbf{U}[[\lambda^{-1}]]$. Поскольку форма $(\lambda^n q, \lambda^m p) = \delta_{m+n+1}^0$ устанавливает изоморфизм между $\mathbf{U}[[\lambda^{-1}]]$ и $\mathbf{U}[\lambda]^*$, подалгебра $\mathcal{L}_-$ изоморфна $\mathcal{L}_+^*$ относительно формы Ω .

Таким образом, $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ – тройка Манина, и согласно [11] пара $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ задает бигебру Ли.

Мы утверждаем, что коскобка φ [11] для бигебры $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ определяется решением (3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Следующая стандартная формула*

$$\varphi(c(\lambda)) = [c(\lambda) \otimes 1 + 1 \otimes c(\lambda), r(\lambda, \mu)], \quad c(\lambda) \in \mathcal{L}_+,$$

где $r(\lambda, \mu)$ задается формулой (3), определяет коскобку φ на $\mathcal{L}_+$, соответствующую бигебре $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что

$$\Omega(a(\lambda) \otimes b(\mu), \varphi(c(\lambda))) = \Omega([a(\lambda), b(\lambda)], c(\lambda)), \quad a(\lambda), b(\lambda) \in \mathcal{L}_-, \quad c(\lambda) \in \mathcal{L}_+,$$

где, как обычно,

$$\Omega(a(\lambda) \otimes b(\mu), c(\lambda) \otimes d(\mu)) = \Omega(a(\lambda), c(\lambda)) \cdot \Omega(b(\lambda), d(\lambda)).$$

Это можно проверить непосредственно, используя формулу (3).

8. СОГЛАСОВАННЫЕ СКОБКИ ЛИ, СВЯЗАННЫЕ С ФАКТОРИЗУЮЩИМИ ПОДАЛГЕБРАМИ

Пусть $\mathcal{U}$ – конечномерная алгебра Ли. Обозначим через $\mathcal{U}((\lambda^{-1}))$ алгебру петель над $\mathcal{U}$, т.е. алгебру Ли всех рядов Лорана относительно параметра λ^{-1} с коэффициентами из $\mathcal{U}$. Предположим, что алгебра петель разложена в прямую сумму векторных пространств:

$$\mathcal{U}((\lambda^{-1})) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{U}[[\lambda^{-1}]], \quad (22)$$

где $\mathcal{U}[[\lambda^{-1}]]$ – подалгебра всех рядов Тейлора относительно λ^{-1} , $\mathcal{A}$ – некоторая дополнительная подалгебра. Используя терминологию Чередника [12], мы будем называть $\mathcal{A}$ *факторизующей* подалгеброй. Для простых алгебр Ли $\mathcal{U}$ существует взаимно однозначное соответствие между решениями классического уравнения Янга–Бакстера, рассмотренными в [4], и факторизующими подалгебрами, изотропными относительно инвариантной билинейной формы

$$\langle X(\lambda), Y(\lambda) \rangle = \operatorname{res} \lambda^{-2}(X(\lambda), Y(\lambda)), \quad X(\lambda), Y(\lambda) \in \mathcal{U}((\lambda^{-1})),$$

где $(\cdot, \cdot)$ – форма Киллинга на $\mathcal{U}$. Неизотропные факторизующие подалгебры изучались в [13], [14].

Одним из основных объектов, связанных с факторизующей подалгеброй $\mathcal{A}$, является (ассоциативная) алгебра мультипликаторов. Ряд Лорана

$$\mathbf{m} = \sum_{i=-\infty}^n c_i \lambda^i, \quad c_i \in C,$$

называется *мультипликатором*, если $\mathbf{m}\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. Число n называется *порядком* мультипликатора $\mathbf{m}$.

ТЕОРЕМА 3 [15]. Пусть $\mathcal{U}$ – простая алгебра Ли. Тогда для любой факторизующей подалгебры дополнение множества порядков всех мультипликаторов до множества натуральных чисел конечно.

Мы не знаем, верна ли теорема 3 для полупростых алгебр Ли.

Поскольку алгебра $\mathcal{A}$ определена с точностью до замен вида

$$\bar{\lambda}^{-1} = k_1 \lambda^{-1} + k_2 \lambda^{-2} + k_3 \lambda^{-3} + \dots, \quad k_1 \neq 0,$$

то без ограничения общности мы можем предположить, что $\mathbf{m} = \lambda^n$. Напомним конструкцию пары конечномерных согласованных скобок Ли из работы [2]. Пусть $\mathcal{A}$ – факторизующая подалгебра, обладающая мультипликатором $\mathbf{m} = \lambda^n$. Обозначим через $\mathbf{U}$ векторное пространство

$$\mathbf{U} = \lambda^n \mathcal{U}[[\lambda^{-1}]] \cap \mathcal{A}. \quad (23)$$

Из (22) следует, что $\dim \mathbf{U} = n \dim \mathcal{U}$. Легко видеть, что

$$[\mathbf{U}, \mathbf{U}] \subset \lambda^n \mathbf{U} \oplus \mathbf{U} \quad (24)$$

и

$$[\mathbf{U}, [\mathbf{U}, \mathbf{U}]] \subset \lambda^{2n} \mathbf{U} \oplus \lambda^n \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}.$$

Используя (24), мы определим пару скобок $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$ на $\mathbf{U}$ формулой

$$[a, b] = \lambda^n [a, b]_1 + [a, b]_2. \quad (25)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [2]. *Билинейные операции $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$ являются согласованными скобками Ли. Если факторизующая подалгебра изотропна, то эти скобки Ли обладают общей инвариантной невырожденной формой.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Это утверждение легко обобщается на случай факторизующих подалгебр для алгебр Каца–Мули. Пусть $\mathcal{U}_\phi((\lambda^{-1}))$ – алгебра Каца–Мули, где ϕ – автоморфизм порядка k конечномерной алгебры Ли $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ – факторизующая подалгебра, дополнительная до подалгебры $\mathcal{U}_\phi[[\lambda^{-1}]]$ всех рядов Тейлора из $\mathcal{U}_\phi((\lambda^{-1}))$. Предположим, что $\mathcal{A}$ обладает мультипликатором $\mathbf{m} = \lambda^{kn}$. Тогда, следуя предложению 7, мы можем определить две согласованные скобки Ли на векторном пространстве $\mathbf{U} = \lambda^{kn} \mathcal{U}_\phi[[\lambda^{-1}]] \cap \mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{L}$ – алгебра Ли, определенная формулой (20) для векторного пространства (23). Определим отображение $\Phi: \mathcal{U}((\lambda^{-1})) \rightarrow \mathcal{L}$ следующей формулой:

$$\Phi\left(\sum_{i=-\infty}^m \lambda^{ni} q_i\right) = \sum_{i=-\infty}^m \lambda^i (\lambda \operatorname{ad}_1 q_i + \operatorname{ad}_2 q_i).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Отображение Φ является изоморфизмом алгебр Ли таким, что*

$$\Phi(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_+, \quad \Phi(\mathcal{U}[[\lambda^{-1}]]) = \mathcal{L}_-. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства того, что Φ является гомоморфизмом, достаточно сравнить формулы (25) и (4). Так как

$$\Phi(q) = \lambda \operatorname{ad}_1 q + \operatorname{ad}_2 q,$$

из тривиальности центра $[\cdot, \cdot]_1$ следует биективность Φ . Формулы (26) следуют из того, что

$$\mathcal{U}((\lambda^{-1})) = \left\{ \sum_{i=-\infty}^m \lambda^{ni} q_i \mid q_i \in \mathbf{U} \right\},$$

и из определения соответствующих подалгебр.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $\mathcal{A}$ изотропна, то из предложений 7, 8 следует, что Φ – изоморфизм троек Манина

$$(\mathcal{U}((\lambda^{-1})), \mathcal{A}, \mathcal{U}[[\lambda^{-1}]]) \quad (27)$$

и

$$(\mathcal{L}, \mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-). \quad (28)$$

Известно [7], что любое решение из работы Белавина, Дринфельда [4] определяет тройку Манина (27) для подходящей изотропной факторизующей подалгебры $\mathcal{A}$. С другой стороны, согласно предложению 5 решение (3) из теоремы 1 определяет тройку Манина (28). Таким образом, соответствующие биалгебры изоморфны.

Благодарности. Авторы благодарны А. В. Одесскому и М. А. Семенову-Тян-Шанскому за полезные дискуссии. В. В. Соколов благодарен Институту Макса Планка (Бонн) за гостеприимство и финансовую поддержку. Работа также была частично поддержана РФФИ (грант № 05-01-00189) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № 1716.2003.1).

Список литературы

- [1] *A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky.* Phys. Lett. A. 1988. V. 130. № 8–9. P. 456–460.
- [2] *I. Z. Golubchik, V. V. Sokolov.* J. Nonlinear Math. Phys. 2005. V. 12. № 1. P. 343–350.
- [3] *А. А. Белавин.* Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 4. С. 18–26.
- [4] *А. А. Белавин, В. Г. Дринфельд.* Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 3. С. 1–29.
- [5] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [6] *F. Magri.* J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 1156–1162.
- [7] *А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский.* Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход. Ижевск: РХД, 2003.
- [8] *И. З. Голубчик, В. В. Соколов.* Функц. анализ и его прилож. 2002. Т. 36. № 3. С. 9–19.
- [9] *А. В. Болсинов, А. В. Борисов.* Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 1. С. 11–34.
- [10] *В. Г. Дринфельд.* ДАН СССР. 1983. Т. 268. № 2. С. 285–287.
- [11] *В. Г. Дринфельд.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 18–49.
- [12] *И. В. Чередник.* Функц. анализ и его прилож. 1985. Т. 19. № 3. С. 36–52.
- [13] *В. В. Соколов.* Докл. РАН. 2004. Т. 397. № 3. С. 321–324.
- [14] *И. З. Голубчик, В. В. Соколов.* ТМФ. 2004. Т. 141. № 1. С. 3–23; nlin.SI/0403023.
- [15] *V. Ostapenko.* C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. 1992. V. 315. P. 669–673.

Поступила в редакцию 18.III.2005 г.