Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Орлов, Гипергеометрические функции как бесконечносолитонные тау-функции, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 2, 222–250

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2033>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:57:14

© 2006 г.

А. Ю. Орлов*

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КАК БЕСКОНЕЧНОСОЛИТОННЫЕ ТАУ-ФУНКЦИИ

Как известно, резонансные многосолитонные решения зависят от высших времен и набора параметров (интегралов движения). Показано, что солитонные тау-функции уравнений одно- и многокомпонентной цепочки Toda являются тау-функциями дуальной иерархии уравнений, где высшие времена и параметры (интегралы движения) меняются ролями. Многосолитонные решения оказываются рациональными решениями для дуальной иерархии, а бесконечносолитонные тау-функции – тау-функциями гипергеометрического типа дуальной иерархии. Переменные в дуальных иерархиях меняются ролями. Импульсы солитонов связаны с координатами Фробениуса разбиений в разложении рациональных решений по функциям Шура. В качестве примера рассмотрены статсуммы матричных моделей: их ряд теории возмущений, с одной стороны, является гипергеометрической тау-функцией, с другой стороны, может быть интерпретирован как бесконечносолитонное решение.

Ключевые слова: солитоны, рациональные решения, тау-функция, гипергеометрическая функция, дуальность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипергеометрическая тау-функция (ГТФ) [1], [2] является обобщением гипергеометрической функции матричного аргумента [3] и определена следующим рядом:

$$\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*) = c_n(T) \sum_{\lambda \in P} \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_{n-i} - T_{n+\lambda_i-i} \right) s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*), \quad (1.1)$$

где $T = \{T_m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – произвольные параметры, s_{λ} – функция Шура, а P – множество всех разбиений. Множитель $c_n(T) = \tau(n, \mathbf{0}, T, \mathbf{0})$ в данной работе существенной роли не играет и приведен в приложении А, см. формулы (А.19), (А.20).

Как функция параметров $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ и $\mathbf{t}^* = (t_1^*, t_2^*, \dots)$ ряд (1.1) является тау-функцией пары иерархий Кадомцева–Петвиашвили (КП), причем $\mathbf{t}$ играет роль

*Институт океанологии им. П. П. Ширшова, Москва, Россия.

E-mail: orlovs@wave.sio.rssi.ru

высших времен первой иерархии КП, а $\mathbf{t}^*$ – времен второй иерархии КП. Как функция параметров $n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*$ ряд (1.1) есть тау-функция двумеризованной цепочки Тода (ЦТ). Если переменные T удовлетворяют условиям периодичности $T_i = T_{i+N}$, то (1.1) есть тау-функция N -периодической ЦТ. Если определенным образом зафиксировать переменные $\mathbf{t}$, T , и $\mathbf{t}^*$, можно получить известные гипергеометрические функции многих переменных, введенные в [3]. Также отметим, что ГТФ как формальный ряд совпадает с рядом теории возмущений для некоторых матричных моделей [1], [4]–[6] и используется при построении новых точно решаемых матричных интегралов [7].

Интересно, что для ГТФ можно найти множество приложений. Тау-функции, возникающие в суперсимметричных калибровочных теориях [8], [9], в задачах подсчета чисел Гурвица [10], инвариантов Громова–Виттена на P^1 [11] и в задачах вычисления индексов пересечения на схемах Гильберта [12], являются примерами ГТФ (см. приложение В к данной работе). Тау-функции, рассмотренные в контексте изучения струн с $c = 1$ [13], также принадлежат гипергеометрическому типу.

Данная работа является продолжением и развитием статьи [14] в электронном архиве. Мы изучаем функцию (1.1) как функцию переменных T , полагая, что переменные $\mathbf{t}^*$ определенным образом зафиксированы (принадлежат к одному из четырех семейств, указанных ниже). Показано, что ГТФ (1.1) является многосолитонной тау-функцией некоторой иерархии интегрируемых систем, которую можно назвать дуальной иерархией, и выбор дуальной иерархии определяется выбором $\mathbf{t}^*$. Переменные T оказываются высшими временами дуальной иерархии, в роли которой выступает p -компонентная двумеризованная ЦТ (более точно, линейными комбинациями этих высших времен, обозначаемых $\tilde{n}^{(m)}$, $\tilde{\mathbf{t}}^{(m)}$, $\tilde{\mathbf{t}}^{(m)*}$, $m = 1, \dots, p$, см. теоремы 1, 2).

Для краткости мы будем опускать несущественные аргументы в обозначении ГТФ и писать $\tau(\mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*)$ и даже $\tau(\mathbf{t}, T)$ вместо $\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*)$.

Напомним некоторые факты и введем обозначения.

Теория солитонов. Иерархия КП [15], [16] является наиболее популярным примером интегрируемых уравнений. Она состоит из полубесконечного набора нелинейных интегриродифференциальных эволюционных уравнений

$$\partial_{t_m} u = K_m[u], \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

которые являются коммутирующими потоками: $[\partial_{t_k}, \partial_{t_m}]u = 0$. Первое нетривиальное уравнение является известным уравнением КП

$$\partial_{t_3} u = \frac{1}{4} \partial_{t_1}^3 u + \frac{3}{4} \partial_{t_1}^{-1} \partial_{t_2}^2 u + \frac{3}{4} \partial_{t_1} u^2, \quad (1.3)$$

использующимся в физике плазмы и в теории волн на мелкой воде. В настоящее время иерархия КП играет важную роль как в физике, так и в математике. Другим

важным уравнением является двумеризованная ЦТ

$$\partial_{t_1} \partial_{t_1^*} \phi_n = e^{\phi_{n-1} - \phi_n} - e^{\phi_n - \phi_{n+1}}, \quad (1.4)$$

впервые проинтегрированная А. Михайловым [17] и подробно изученная в классической работе [18] в рамках подхода киотской школы [16]. Это уравнение порождает иерархию высших уравнений ЦТ, описывающую потоки по высшим временам, обозначаемым $t_1, t_2, \dots$ и $t_1^*, t_2^*, \dots$.

В настоящее время тау-функцию, введенную Сато, следует признать центральным понятием теории солитонов (о тау-функции иерархии КП см. работу [16]). Тау-функция является некоторым универсальным потенциалом, одновременно порождающим иерархии КП и ЦТ. Она зависит от двух полубесконечных наборов времен $t_1, t_2, \dots$ и $t_1^*, t_2^*, \dots$ и от дискретной переменной n : $\tau = \tau(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$. Явные формулы таковы [16], [18]:

$$u = 2\partial_{t_1}^2 \ln \tau(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*), \quad \phi_n(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = -\ln \frac{\tau(n+1, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)}{\tau(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)}. \quad (1.5)$$

Рассмотрим три примера тау-функций.

1. *Вакуумная тау-функция ЦТ*

$$\tau(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} m t_m t_m^*\right) \quad (1.6)$$

есть простейший пример ГТФ: надо в (1.1) положить $T = 0$. Она также является вакуумной тау-функцией иерархии КП, ибо по формуле (1.5) порождает решение $u = 0$.

2. *N-солитонная тау-функция* иерархий КП и ЦТ требует задания набора параметров $\{p_i, q_i, a_i\}$, $i = 1, \dots, N$, $p_i \neq q_i$; каждая пара (p_i, q_i) определяет скорость солитона с номером i ; параметр a_i задает начальное положение солитона i . Тау-функция N -солитонного решения иерархий КП и ЦТ есть

$$\begin{aligned} \tau^{\text{sol}}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) &= c(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) \left(\sum_{p=0}^N \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p} \prod_{k < m} \Delta_{i_k i_m} e^{\eta_{i_1} + \dots + \eta_{i_p}} \right) = \\ &= c(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) \left(1 + \sum_{i=1}^N e^{\eta_i} + \sum_{1 \leq i < j}^N c_{ij} e^{\eta_i + \eta_j} + \dots \right), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$\eta_i = \xi(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*, p_i) - \xi(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*, q_i) + \ln \frac{a_i}{p_i - q_i}, \quad (1.8)$$

$$\xi(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*, p) = n \ln p + \sum_{m=1}^{\infty} t_m p^m - \sum_{m=1}^{\infty} t_m^* p^{-m}, \quad (1.9)$$

а множитель

$$\Delta_{ij} = \frac{(p_i - p_j)(q_i - q_j)}{(p_i - q_j)(q_i - p_j)} \quad (1.10)$$

описывает сдвиг фаз взаимодействующих солитонов с номерами i и j , равный $\ln \Delta_{ij}$, и где

$$c(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} m t_m t_m^* \right) \quad (1.11)$$

есть вакуумная тау-функция ЦТ. Для нас представляет интерес бесконечносолитонная тау-функция, отвечающая случаю $N \rightarrow \infty$.

С точки зрения уравнения КП (1.3) высшие времена $\mathbf{t}^*$ есть просто фиксированные параметры, определяющие начальное положение солитона.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что произвольные дробно-линейные преобразования

$$p_i \rightarrow \frac{ap_i + b}{cp_i + d}, \quad q_i \rightarrow \frac{aq_i + b}{cq_i + d}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

не меняют значения множителей

$$\Delta_{ij} = \frac{(p_i - p_j)(q_i - q_j)}{(p_i - q_j)(q_i - p_j)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

входящих в формулу для многосолитонной тау-функции.

В дальнейшем нам будет удобно воспользоваться фермионным представлением для солитонной тау-функции, найденным в работе [16] (обозначения приводятся в приложении А):

$$\tau^{\text{sol}}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \langle n | e^{H(\mathbf{t})} e^{\sum_{i=1}^N a_i \psi(p_i) \psi^*(q_i)} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | n \rangle. \quad (1.14)$$

Наибольшую важность для нас представляет вырожденный случай, описывающий резонансное солитонное решение КП и ЦТ и получающийся из формулы (1.14) при отождествлении некоторых p_i (и, аналогично, при отождествлении некоторых q_i), как это будет описано ниже формулой (2.20). При этом величина (1.10) становится равной нулю, т.е. сдвиг фазы солитонов в результате взаимодействия стремится к бесконечности, и это называется резонансным взаимодействием. Оно было впервые обнаружено в системе трех волн [19].

3. *Полиномиальная тау-функция*, которая описывает рациональные решения ЦТ, найдена Такасаки. Он предъявил общее решение ЦТ в виде двойного ряда от функций Шура по разбиениям (определения см. ниже) [20]:

$$\tau(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \sum_{\lambda, \mu} K_{\lambda\mu}(n) s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\mu}(\mathbf{t}^*), \quad (1.15)$$

где коэффициенты $K_{\lambda\mu}$ являются детерминантами некоторых матриц и решениями специальных билинейных уравнений (соотношений Плуккера) [16]. Ряд (1.15) порождает общие решения иерархий КП и ЦТ [20]; рациональные решения содержатся

в (1.15). Например, любая редукция (1.15) к полиному дает некоторое рациональное решение иерархий КП и ЦТ (в этом случае u и ϕ_n в формулах (1.5) становятся рациональными функциями от t_1).

Можно показать, что ряд (1.1) также является частным случаем общего решения Такасаки (1.15).

Предположим, что ряд (1.1) обрывается и, следовательно, дает рациональное решение иерархии КП. Покажем, что если временами считать $T_1, T_2, \dots$, а не $t_1, t_2, \dots$, то ряд (1.1) совпадет с рядом (1.7), в котором количество солитонов N определяется максимальным весом входящих в (1.1) диаграмм Юнга. Этот результат удастся получить, если параметры $\mathbf{t}^*$ в формуле (1.1) зафиксированы так, как будет описано ниже (с помощью одной из формул (2.4)–(2.6) или с помощью одной из формул (3.7)–(3.10)). Отметим, что эти же специализации времен появляются и в других задачах, связанных с ГТФ, например, в связи с гипергеометрическими функциями матричного аргумента [2] или в задачах о случайных матрицах [7].

Вплоть до настоящего времени нам не удалось распространить результаты данной работы на случай произвольных $\mathbf{t}^*$ и на случай общего вида ряда (1.15).

Рассматриваемый круг вопросов может оказаться важным для интерпретации производящей функции инстантонов, найденной в работе [8], что и явилось предпосылкой написания данной работы.

Разбиения. Полиномы многих переменных параметризуются разбиениями. *Разбиением* называется любая последовательность целых неотрицательных чисел, расположенных в невозрастающем порядке:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots \geq 0. \quad (1.16)$$

Числа λ_i называются *частями* λ . Число ненулевых частей называется *длиной* λ и обозначается $\ell(\lambda)$. Сумма частей называется *весом* λ и обозначается $|\lambda|$. Если $n = |\lambda|$, мы говорим, что λ есть разбиение n . Нулевое разбиение (для которого $\lambda_1 = 0$) обозначается 0.

Диаграмма разбиения (диаграмма Юнга) может быть определена как набор точек (ячеек) $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ таких, что $1 \leq j \leq \lambda_i$. Таким образом, диаграмму Юнга можно считать подмножеством элементов матрицы с $\ell(\lambda)$ строками и с λ_1 столбцами. Диаграмму разбиения λ обозначают тем же символом λ .

Например,

есть диаграмма $(4, 3, 1)$. Вес этого разбиения равен 8, его длина равна 3.

Разбиение, диаграмма которого получена транспонированием диаграммы λ по отношению к главной диагонали, называется сопряженным разбиением и обозначается λ^t .

Есть другое обозначение разбиений, введенное Фробениусом. Предположим, что главная диагональ диаграммы λ состоит из r ячеек (i, i) , $\alpha_i = \lambda_i - i$ есть число ячеек в i -й строке диаграммы λ справа от (i, i) и $\beta_i = \lambda_i^t - i$ есть число ячеек в i -м столбце диаграммы λ ниже (i, i) , $1 \leq i \leq r$. Имеем $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r \geq 0$ и $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geq 0$. Тогда в обозначениях Фробениуса разбиение λ записывается как

$$\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_r | \beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha | \beta). \quad (1.17)$$

Можно сказать, что обозначениям Фробениуса соответствует разложение диаграммы λ на главные крюки, углы которых находятся на главной диагонали: самый большой крюк – это $(\alpha_1 | \beta_1)$, следующий $(\alpha_2 | \beta_2)$, и так далее до наименьшего крюка $(\alpha_r | \beta_r)$.

Например, разбиение $(4, 3, 1)$ состоит из двух крюков $(3, 2)$ и $(1, 0)$,

что в обозначениях Фробениуса дает $(3, 1 | 2, 0)$. Если $\lambda = (\alpha | \beta)$, то $\lambda^t = (\beta | \alpha)$.

ГТФ была введена следующим образом. Рассмотрим функцию r , зависящую от n , где n – целое число. Для заданного разбиения λ положим

$$r_\lambda(x) = \prod_{i,j \in \lambda} r(x + j - i). \quad (1.18)$$

Иными словами, если приписать каждой ячейке (i, j) значение $r(x + j - i)$ и перемножить эти значения по всем ячейкам диаграммы Юнга, то получим $r_\lambda(x)$.

Например, если диаграмма разбиения $(4, 3, 1)$ есть

то $r_\lambda(x) = r(x+3)r(x+2)(r(x+1))^2(r(x))^2r(x-1)r(x-2)$. Для нулевого разбиения полагаем $r_0 \equiv 1$.

В работе [21] было показано, что

$$\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \sum_{\lambda} r_\lambda(n) s_\lambda(\mathbf{t}) s_\lambda(\mathbf{t}^*) \quad (1.19)$$

(сумма берется по всем разбиениям, включая нулевое) есть тау-функция уравнений ЦТ и КП. Она была названа ГТФ. К виду (1.1) она приводится заменой

$$r(m) = e^{T_{m-1} - T_m}, \quad (1.20)$$

т.е. в этом случае $\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = c_n(T) \tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*)$.

Функция Шура $s_\lambda(\mathbf{t})$ определяется формулами

$$s_\lambda(\mathbf{t}) = \det h_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{t}), \quad 1 \leq i, j \leq l(\lambda), \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k h_k(\mathbf{t}) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} z^m t_m\right), \quad (1.21)$$

где для $k < 0$ полагаем $h_k = 0$. Полиномы $h_k(\mathbf{t})$ называются элементарными функциями Шура, или полностью симметрическими функциями [22].

Взяв в качестве r рациональную функцию, положив $\mathbf{t}^* = (1, 0, 0, \dots)$ и выбрав $t_m = \text{tr } X^m$, $m = 1, 2, \dots$, где X – нормальная матрица, получим [1], что ряд (1.20) совпадает с известной гипергеометрической функцией матричного аргумента, см. приложение В.

Уравнение

$$\partial_{t_1} \partial_{t_1^*} \phi_n = r(n) e^{\phi_{n-1} - \phi_n} - r(n+1) e^{\phi_n - \phi_{n+1}}, \quad (1.22)$$

(почти совпадающее с ЦТ) имеет решение, выраженное через ГТФ (1.19), вида

$$\phi_n(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = -\ln \frac{\tau_r(n+1, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)}{\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)}. \quad (1.23)$$

Тау-функции $\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ и $\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*)$ являются решениями уравнения (А.24), приведенного в приложении А, и уравнения (1.4), соответственно. Эти тау-функции отличаются на множитель c_n , который не зависит от времен $\mathbf{t}, \mathbf{t}^*$, поэтому нам достаточно рассмотреть одну из них, например, $\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*)$.

2. ГТФ КАК СОЛИТОННАЯ ТАУ-ФУНКЦИЯ ДУАЛЬНОЙ ИЕРАРХИИ

Перепишем ГТФ (1.1) в обозначениях Фробениуса. Пусть $\lambda = (\alpha | \beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k | \beta_1, \dots, \beta_k)$, где k есть число главных крюков диаграммы λ . Следуя английским традициям [22], будем называть числа α_i руками, а числа β_i – ногами диаграммы. Перепишем (1.1) как сумму по всем возможным рукам и ногам:

$$\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*) = c_n(T) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha_1 > \dots > \alpha_k \geq 0 \\ \beta_1 > \dots > \beta_k \geq 0}} e^{\sum_{i=1}^k (T_{n-\beta_i-1} - T_{n+\alpha_i})} s_{(\alpha | \beta)}(\mathbf{t}) s_{(\alpha | \beta)}(\mathbf{t}^*) \right). \quad (2.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Важно отметить, что с помощью предельного перехода $e^{-T_{n+j}} \rightarrow 0$ ($e^{T_{n-j}} \rightarrow 0$) можно удалить из суммы (2.1) все члены, содержащие диаграммы, в которых присутствует j -я рука (j -я нога). Таким образом, всегда можно заменить суммирование по всем рукам и ногам суммированием по любым наперед заданным наборам рук $S_\alpha \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и ног $S_\beta \subseteq \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Это также означает, что можно рассматривать суммы не по всем разбиениям P , а по описанному выше множеству разбиений

(диаграмм), которое мы будем обозначать S . Итак,

$$\begin{aligned}\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*) &= c_n(T) \sum_{\lambda \in S} e^{\sum_{i=1}^{\infty} T_{n-i} - T_{n+\lambda_i-i}} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*) = \\ &= c_n(T) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha_1 > \dots > \alpha_k \geq 0 \\ \alpha_i \in S_{\alpha}}} \sum_{\substack{\beta_1 > \dots > \beta_k \geq 0 \\ \beta_i \in S_{\beta}}} e^{\sum_{i=1}^k (T_{n-\beta_i-1} - T_{n+\alpha_i})} s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}) s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}^*) \right).\end{aligned}\quad (2.2)$$

В случае $S \neq P$ для простоты мы будем считать, что $n = 0$; общий случай рассмотрим в другой статье.

Если S_{α} и S_{β} – конечные множества, тау-функция становится полиномиальной,

$$\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*) = c_n(T) \left(1 + \sum_{(\alpha|\beta) \subseteq (\alpha^{\max}|\beta^{\max})} e^{\sum_{i=1}^k (T_{n-\beta_i-1} - T_{n+\alpha_i})} s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}) s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}^*) \right), \quad (2.3)$$

где суммирование ведется по разбиениям, в которых руки и ноги принадлежат заданным множествам, содержащимся в максимальном разбиении $\lambda^{\max} = (\alpha^{\max}|\beta^{\max}) = (\alpha_1^{\max}, \dots, \alpha_{k_{\max}}^{\max}|\beta_1^{\max}, \dots, \beta_{k_{\max}}^{\max})$.

Введем обозначения

$$\mathbf{t}_{\infty} = (1, 0, 0, 0, \dots), \quad \mathbf{t}(a) = \left(\frac{a}{1}, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \dots \right), \quad (2.4)$$

$$\mathbf{t}(\infty, q) = (t_1(\infty, q), t_2(\infty, q), \dots), \quad t_m(\infty, q) = \frac{1}{m(1-q^m)}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{t}(a, q) = (t_1(a, q), t_2(a, q), \dots), \quad t_m(a, q) = \frac{1 - (q^a)^m}{m(1-q^m)}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Далее будем считать, что набор $\mathbf{t}^*$ принимает вид, указанный в одной из формул (2.4)–(2.6), и тем самым фиксирован.

ЛЕММА 1. Пусть $(\alpha|\beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k|\beta_1, \dots, \beta_k)$ есть некоторое разбиение, записанное в обозначениях Фробениуса. Тогда

$$s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}_{\infty}) = \frac{\prod_{i < j}^k (\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j)}{\prod_{i,j=1}^k (\alpha_i + \beta_j + 1)} \frac{1}{\prod_{i=1}^k \alpha_i! \prod_{i=1}^k \beta_i!}, \quad (2.7)$$

$$s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}(a)) = \frac{\prod_{i < j}^k (\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j)}{\prod_{i,j=1}^k (\alpha_i + \beta_j + 1)} \prod_{i=1}^k \frac{(a)_{\alpha_i+1}}{\alpha_i!} \prod_{i=1}^k \frac{(-1)^{\beta_i} (-a)_{\beta_i}}{\beta_i!}, \quad (2.8)$$

$$s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}(\infty, q)) = \frac{\prod_{i < j}^k (q^{\alpha_i+1} - q^{\alpha_j+1})(q^{-\beta_j} - q^{-\beta_i})}{\prod_{i,j=1}^k (q^{-\beta_i} - q^{\alpha_j+1})} \frac{1}{\prod_{i=1}^k (q; q)_{\alpha_i} \prod_{i=1}^k (q; q)_{\beta_i}}, \quad (2.9)$$

$$s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}(a, q)) = \frac{\prod_{i < j}^k (q^{\alpha_i+1} - q^{\alpha_j+1})(q^{-\beta_j} - q^{-\beta_i})}{\prod_{i,j=1}^k (q^{-\beta_i} - q^{\alpha_j+1})} \prod_{i=1}^k \frac{(q^a; q)_{\alpha_i+1}}{(q; q)_{\alpha_i}} \times \\ \times \prod_{i=1}^k \frac{(-1)^{\beta_i} q^{(a-1)\beta_i} (q^{1-a}; q)_{\beta_i}}{(q; q)_{\beta_i}}. \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулы (2.7), (2.8) следуют из формул

$$s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}) = \det s_{(\alpha_i|\beta_j)}(\mathbf{t}), \quad i, j = 1, \dots, k, \quad (2.11)$$

$$s_{(\alpha_i|\beta_j)}(\mathbf{t}_\infty) = \frac{1}{(\alpha_i)!(\beta_j)!(\alpha_i + \beta_j + 1)}, \quad (2.12)$$

$$(a)_{(\alpha|\beta)} = \frac{s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}(a))}{s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}_\infty)}, \quad (2.13)$$

$$(a)_{(\alpha|\beta)} = \prod_{i=1}^k (-1)^{\beta_i} (a)_{\alpha_i+1} (1-a)_{\beta_i}, \quad (2.14)$$

где

$$(a)_k := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1) \dots (a+k-1). \quad (2.15)$$

Формулы (2.9), (2.10) основаны на соотношениях

$$s_{(\alpha_i|\beta_j)}(\mathbf{t}(\infty, q)) = \frac{q^{(\beta_i^2+\beta_i)/2}}{(q; q)_{\alpha_i} (q; q)_{\beta_i} (1 - q^{\alpha_i+\beta_j+1})}, \quad (2.16)$$

$$(q^a; q)_{(\alpha|\beta)} = \prod_{(i,j) \in (\alpha|\beta)} (1 - q^{a+j-i}) = \frac{s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}(a, q))}{s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}(\infty, q))}, \quad (2.17)$$

$$(q^a; q)_{(\alpha|\beta)} = \prod_{i=1}^k (-1)^{\beta_i} q^{a\beta_i - (\beta_i^2+\beta_i)/2} (q^a; q)_{\alpha_i+1} (q^{1-a}; q)_{\beta_i}, \quad (2.18)$$

где

$$(q^a; q)_k := (1 - q^a)(1 - q^{a+1}) \dots (1 - q^{a+k-1}), \quad (q^a; q)_0 := 1. \quad (2.19)$$

Рассмотрим другой экземпляр иерархии ЦТ с временами $\tilde{n}$, $\tilde{\mathbf{t}}$, $\tilde{\mathbf{t}}^*$. Рассмотрим вырожденную (резонансную) бесконечносолитонную тау-функцию этой иерархии в форме

$$\tau^{\text{sol}}(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*) = \left\langle \tilde{n} \left| e^{H(\tilde{\mathbf{t}})} \exp \left(\sum_{i \in S_\alpha, j \in S_\beta} a_{ij} \psi(p_i) \psi^*(q_j) \right) e^{H^*(\tilde{\mathbf{t}}^*)} \right| \tilde{n} \right\rangle, \quad (2.20)$$

где все числа $\{p_i, i = 1, 2, \dots\}$, $\{q_i, i = 1, 2, \dots\}$ различны и

$$\tilde{\mathbf{t}} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3, \dots), \quad \tilde{\mathbf{t}}^* = (\tilde{t}_1^*, \tilde{t}_2^*, \tilde{t}_3^*, \dots). \quad (2.21)$$

Если матрица a_{ij} диагональна, число ненулевых матричных элементов равно N , то формула (2.20) сведется к формуле (1.14). И наоборот, формулу (2.20) можно

получить из формулы (1.14) (при $N \rightarrow \infty$), если в последней допустить совпадение некоторых чисел p_i , и, аналогично, некоторых чисел q_j . Из-за этого вырождения вместо параметров a_i формулы (1.14) появляются матричные элементы a_{ij} .

Здесь мы не собираемся анализировать поведение функции (2.20), т.е. описывать многосолитонное решение уравнения КП (1.3). Заметим только, что если число ненулевых матричных элементов a_{ij} конечно, то мы получим решение с конечным числом солитонов.

Разложим формулу (2.20) в ряд Тейлора по матричным элементам a_{ij} и используем формулы (A.13) и (A.14) из приложения А:

$$\begin{aligned} \tau^{\text{sol}}(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*) e^{-\sum_{m=1}^{\infty} m \tilde{t}_m \tilde{t}_m^*} = \\ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha_1 > \dots > \alpha_k \geq 0 \\ \beta_1 > \dots > \beta_k \geq 0}} (\det a_{\alpha_i \beta_j} |_{i,j=1}^k) \times \\ \times \left\langle 0 \left| \prod_{i,j=1}^k e^{\xi(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*, p_{\alpha_i}) - \xi(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*, q_{\beta_j})} \psi(p_{\alpha_i}) \psi^*(q_{\beta_j}) \right| 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Наконец, с помощью формулы (A.12) получим, что солитонная тау-функция есть

$$\begin{aligned} \tau^{\text{sol}}(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*) = \\ = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha_1 > \dots > \alpha_k \geq 0 \\ \beta_1 > \dots > \beta_k \geq 0}} e^{\xi(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*, p_{\alpha_i}) - \xi(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*, q_{\beta_j})} \Delta_{(\alpha|\beta)} (\det a_{\alpha_i \beta_j} |_{i,j=1}^k), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $(\alpha|\beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k | \beta_1, \dots, \beta_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, и функции $\xi(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*, z)$ определены в (1.9). Множитель $\Delta_{(\alpha|\beta)}$ отвечает за взаимодействие солитонов:

$$\Delta_{(\alpha|\beta)} = \frac{\prod_{i < j}^k (p_{\alpha_i} - p_{\alpha_j})(q_{\beta_i} - q_{\beta_j})}{\prod_{i,j}^k (p_{\alpha_i} - q_{\beta_j})(q_{\beta_i} - p_{\alpha_j})}. \quad (2.24)$$

Солитонная тау-функция (2.23) зависит от

- (а) всех времен $\tilde{n}$, $\tilde{\mathbf{t}}$, $\tilde{\mathbf{t}}^*$;
- (б) матрицы a_{ij} , описывающей начальную конфигурацию (взаимное расположение) солитонов, если число ненулевых матричных элементов конечно, то число солитонов конечно;
- (в) набора параметров p_i и q_i , определяющих размеры и импульсы солитонов.

Заметим, что правые части формул леммы 1 имеют вид, схожий с правой частью формулы (2.24).

Проверим предположение о том, что (2.23) можно отождествить с (2.2), если в качестве $\mathbf{t}^*$ в (2.2) выбран один из наборов $\mathbf{t}_{\infty}$, $\mathbf{t}(a)$, $\mathbf{t}(\infty, q)$ или $\mathbf{t}(a, q)$. Для этого мы попытаемся отождествить функцию ξ , взятую при специальных значениях своего аргумента с набором величин $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Множитель $\det a_{ij}$, учитывающий

начальную конфигурацию солитонов, отождествим с функцией Шура $s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t})$. Солитонные импульсы p_m и q_m соотнесем с координатами Фробениуса α_m и β_m . В результате получим теорему, которая отображает любую ГТФ (2.3) в некоторую солитонную тау-функцию дуальной иерархии.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*)$ задана формулой (1.1), а $\tau^{\text{sol}}(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*)$ задана формулой (2.20), причем

$$a_{ij} = a_{ij}(\mathbf{t}) = s_{(i|j)}(\mathbf{t}); \quad (2.25)$$

при данном n и заданных наборах p_m , $m \in S_\alpha$, и q_m , $m+1 \in S_\beta$, переменные $\tilde{n}$, $\tilde{\mathbf{t}}$, $\tilde{\mathbf{t}}^*$ связаны с переменными T с помощью соотношений

$$-T_{n+m} = \sum_{k=1}^{\infty} (p_m^k \tilde{t}_k - p_m^{-k} \tilde{t}_k^*) + \tilde{n} \ln p_m + C_{m+n}, \quad m \in S_\alpha, \quad (2.26)$$

$$-T_{n+m} = \sum_{k=1}^{\infty} (q_m^k \tilde{t}_k - q_m^{-k} \tilde{t}_k^*) + \tilde{n} \ln q_m + C_{m+n}, \quad m+1 \in S_\beta \quad (2.27)$$

(в этих формулах величины C_{m+n} не зависят от $\tilde{n}$, $\tilde{\mathbf{t}}$, $\tilde{\mathbf{t}}^*$); пусть также

$$c_n = e^{T_{n-1} + \dots + T_1 + T_0} = e^{\sum_{m=1}^n (\sum_{k=1}^{\infty} (z_{-m}^k \tilde{t}_k - z_{-m}^{-k} \tilde{t}_k^*) + \tilde{n} \ln z_{-m} + C_{n-m})}, \quad n > 0, \quad (2.28)$$

$$c_n = e^{-T_n - \dots - T_{-2} - T_{-1}} = e^{-\sum_{m=0}^{-1-n} (\sum_{k=1}^{\infty} (z_m^k \tilde{t}_k - z_m^{-k} \tilde{t}_k^*) + \tilde{n} \ln z_m + C_{m+n})}, \quad n < 0; \quad (2.29)$$

$c_0 = 1$. Тогда

(А) если

$$p_m = \frac{a(m+1) + b}{c(m+1) + d}, \quad m \in S_\alpha; \quad q_m = \frac{am + b}{cm + d}, \quad m+1 \in S_\beta, \quad (2.30)$$

$$C_{m+n} = -\ln m!, \quad m \in S_\alpha; \quad C_{m+n} = \ln(-m)!, \quad m+1 \in S_\beta, \quad (2.31)$$

то

$$\tau^{\text{sol}}(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*) e^{-\sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{t}_k \tilde{t}_k^*} c_n = \tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}_\infty); \quad (2.32)$$

(Б) если

$$p_m = \frac{a(m+1) + b}{c(m+1) + d}, \quad m \in S_\alpha; \quad q_m = \frac{am + b}{cm + d}, \quad m+1 \in S_\beta, \quad (2.33)$$

$$C_{m+n} = \ln \frac{(a)_{m+1}}{m!}, \quad m \in S_\alpha; \quad C_{m+n} = -\ln \frac{(-1)^m (a)_{-m}}{(-m)!}, \quad m+1 \in S_\beta, \quad (2.34)$$

то

$$\tau^{\text{sol}}(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*) e^{-\sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{t}_k \tilde{t}_k^*} c_n = \tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}(a)); \quad (2.35)$$

(В) если

$$p_m = \frac{aq^{m+1} + b}{cq^{m+1} + d}, \quad m \in S_\alpha; \quad q_m = \frac{aq^m + b}{cq^m + d}, \quad m+1 \in S_\beta, \quad (2.36)$$

$$C_{m+n} = -\ln(q; q)_m, \quad m \in S_\alpha; \quad C_{m+n} = \ln(q; q)_{-m}, \quad m+1 \in S_\beta. \quad (2.37)$$

то

$$\tau^{\text{sol}}(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*) e^{-\sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{t}_k \tilde{t}_k^*} c_n = \tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}(\infty, q)); \quad (2.38)$$

(Г) если

$$p_m = \frac{aq^{m+1} + b}{cq^{m+1} + d}, \quad m \in S_\alpha; \quad q_m = \frac{aq^m + b}{cq^m + d}, \quad m+1 \in S_\beta, \quad (2.39)$$

$$C_{m+n} = \ln \frac{(q^a; q)_{m+1}}{(q; q)_m}, \quad m \in S_\alpha; \quad (2.40)$$

$$C_{m+n} = -\ln \frac{(-1)^m q^{-(a+1)m} (q^{1-a}; q)_{-m}}{(q; q)_{-m}}, \quad m+1 \in S_\beta,$$

то

$$\tau^{\text{sol}}(\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*) e^{-\sum_{k=1}^{\infty} k \tilde{t}_k \tilde{t}_k^*} c_n = \tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}(a, q)). \quad (2.41)$$

В этих соотношениях a, b, c и d — комплексные числа, удовлетворяющие условию $ad - bc \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Высшие времена $n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*$ исходной иерархии КП являются интегралами движения для второй иерархии ЦТ. И наоборот, высшие времена $\tilde{n}, \tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}^*$ второй иерархии ЦТ, входящие в солитонное решение (2.22), являются интегралами движения исходной иерархии КП. Поэтому естественно назвать эти иерархии дуальными.

Отметим, что иное соотношение дуальности между рациональными и (нерезонансными) солитонными решениями было найдено в работе [23] в контексте изучения систем Калоджеро и Рудженарса: тау-функция рационального решения КП в форме детерминанта Вильсона в этой работе отождествлялась с солитонной тау-функцией уравнения КдФ. Отметим также работы [24], где для одномерной модели Изинга и матричных интегралов рассматривались бесконечносолитонные решения КП с импульсами, лежащими на решетке. Во всех этих работах солитонные решения не были вырожденными (резонансными). Для нашей задачи вырождение играет определяющую роль, позволяя интерпретировать $\det a_{\alpha_i \beta_j}$ в (2.22) как функцию Шура $s_\lambda(\mathbf{t})$.

3. ГТФ КАК СОЛИТОННАЯ ТАУ-ФУНКЦИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЦТ

Мы отошлем читателя к работе [16] и не будем подробно описывать иерархию интегрируемых многокомпонентных уравнений ЦТ, уже нашедшую многочисленные применения. Иерархию p -компонентных уравнений ЦТ будем обозначать p -ЦТ.

Приведем вакуумное среднее, являющееся в соответствии с [16] тау-функцией многокомпонентной ЦТ. По аналогии с однокомпонентным случаем мы интерпретируем эту функцию как тау-функцию, описывающую вырожденное (резонансное) солитонное решение многокомпонентной ЦТ:

$$\begin{aligned} \tau^{\text{sol}}(\tilde{n}^{(1)}, \dots, \tilde{n}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{*(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{*(p)}) = \\ = \langle \tilde{n} \mid \exp\left(\sum_{m=1}^p \sum_{k=1}^{\infty} H_k^{(m)} \tilde{t}_k^{(m)}\right) \exp\left(\sum_{i \geq 0, j > 0} a_{ij}^{mn} \psi^{(m)}(z_i^{(m)}) \psi^{*(n)}(z_{-j}^{(n)})\right) \times \\ \times \exp\left(\sum_{m=1}^p \sum_{k=1}^{\infty} H_{-k}^{(m)} \tilde{t}_{-k}^{(m)}\right) \mid \tilde{n} \rangle. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В этом выражении $(\tilde{t}_1^{(m)}, \tilde{t}_2^{(m)}, \dots)$, $(\tilde{t}_{-1}^{(m)}, \tilde{t}_{-2}^{(m)}, \dots)$, $m = 1, \dots, p$, являются высшими временами иерархий многокомпонентных уравнений ЦТ, а числа

$$\tilde{n} = (\tilde{n}^{(1)}, \dots, \tilde{n}^{(p)}) \quad (3.2)$$

суть дискретные переменные p -ЦТ, при этом для простоты мы предполагаем, что $\tilde{n}^{(1)} + \dots + \tilde{n}^{(p)} = 0$. В формуле (3.1) “гамильтонианы”

$$H_k^{(m)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n^{(m)} \psi_{n+k}^{*(m)}, \quad k \neq 0, \quad (3.3)$$

выражаются через многокомпонентные фермионы

$$\psi_n^{(m)} := \psi_{np+m-1}, \quad \psi_n^{*(m)} := \psi_{np+m-1}^*, \quad (3.4)$$

$$\psi^{(m)}(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \psi_k^{(m)}, \quad \psi^{*(m)}(z) dz := \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k-1} \psi_k^{*(m)}, \quad (3.5)$$

где ψ_n, ψ_n^* определены в приложении А. Верхний индекс m , $m = 1, \dots, p$, фермиона $\psi_k^{(m)}$, $k \in \mathbb{Z}$, мы будем называть *цветом* этого фермиона.

Это многосолитонное решение p -ЦТ задается

(а) набором всех времен $\tilde{n}^{(m)}, \tilde{\mathbf{t}}^{(m)}, \tilde{\mathbf{t}}^{(m)}$, $m = 1, \dots, p$;

(б) матрицей a_{ij}^{mn} ($i \geq 0, j > 0, n, m = 1, \dots, p$), которая определяет начальную конфигурацию многосолитонного решения;

(в) набором $z_{j,m}$, $j \in \mathbb{Z}$, $m = 1, \dots, p$, определяющим размеры и импульсы солитонов и сдвиг фаз солитонов при взаимодействии.

Оказывается, эта тау-функция также может быть отождествлена с ГТФ (2.1), если зафиксировать в ней времена $\mathbf{t}^*$ несколько более сложным способом, чем в формулах (2.4)–(2.6).

Рассмотрим такой анзац для высших времен:

$$\mathbf{t}^{[p]} = (\underbrace{0, \dots, 0}_p, \underbrace{t_1, 0, \dots, 0}_p, t_2, 0, \dots), \quad \mathbf{t}^{*[p]} = (\underbrace{0, \dots, 0}_p, \underbrace{t_1^*, 0, \dots, 0}_p, t_2^*, 0, \dots). \quad (3.6)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{t}_{\infty}^{[p]} = (\underbrace{0, \dots, 0}_p, 1, 0, 0, \dots), \quad (3.7)$$

$$\mathbf{t}^{[p]}(a) = (\underbrace{0, \dots, 0}_p, \underbrace{\frac{a}{1}, 0, \dots, 0}_p, \frac{a}{2}, 0, \dots), \quad (3.8)$$

$$\mathbf{t}^{[p]}(\infty, q) = (\underbrace{0, \dots, 0}_p, \underbrace{t_1(\infty, q), 0, \dots, 0}_p, t_2(\infty, q), 0, \dots), \quad (3.9)$$

$$\mathbf{t}^{[p]}(a, q) = (\underbrace{0, \dots, 0}_p, \underbrace{t_1(a, q), 0, \dots, 0}_p, t_2(a, q), 0, \dots), \quad (3.10)$$

где $t_m(\infty, q)$ и $t_m(a, q)$ такие же, как в (2.5) и (2.6).

Тогда на основании результатов приложения Б можно утверждать, что каждая из тау-функций

$$\tau_r(n, \mathbf{t}^{[p]}, \mathbf{t}_{\infty}^{[p]}), \quad \tau_r(n, \mathbf{t}^{[p]}, \mathbf{t}^{[p]}(a)), \quad \tau_r(n, \mathbf{t}^{[p]}, \mathbf{t}^{[p]}(\infty, q)), \quad \tau_r(n, \mathbf{t}^{[p]}, \mathbf{t}^{[p]}(a, q)) \quad (3.11)$$

есть произведение тау-функций, полученных выше в разделе 2.

Чтобы сравнить тау-функцию (3.1) с тау-функциями (3.11), нам понадобятся соотношения, аналогичные тем, что приведены в лемме 1. Сначала введем обозначения. Ниже для записи разбиений используются обозначения Фробениуса. Некоторая их усложненность связана с тем, что нулевое разбиение не имеет записи в обозначениях Фробениуса.

Рассмотрим набор q разбиений, где $0 \leq q \leq p$, каждое из которых помечено цветом m_a , $a = 1, \dots, q$, причем все цвета различны и $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_q \leq p$. Отметим, что если $q = p$, то $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $\dots$, $m_p = p$.

По этому набору разбиений

$$(\alpha^{(m_a)} | \beta^{(m_a)}) = (\alpha_1^{(m_a)}, \alpha_2^{(m_a)}, \dots, \alpha_{k^{(m_a)}}^{(m_a)} | \beta_1^{(m_a)}, \beta_2^{(m_a)}, \dots, \beta_{k^{(m_a)}}^{(m_a)}), \quad a = 1, \dots, q, \quad (3.12)$$

строится *составное* разбиение

$$(\alpha | \beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k | \beta_1, \dots, \beta_k), \quad k^{(1)} + \dots + k^{(q)} = k, \quad (3.13)$$

при помощи следующей процедуры. Рассмотрим набор чисел $\{\alpha_{k_i}^{(m_a)} p + m_a - 1 \mid i = 1, \dots, k^{(m_a)}, a = 1, \dots, q\}$, расположим их в порядке убывания: $\alpha_1 > \dots > \alpha_k > 0$

(по построению чисел α_k это строго убывающий порядок). Аналогично рассмотрим набор $\{\beta_{k_i}^{(m_a)} p + m_a - p \mid i = 1, \dots, k^{(m_a)}, a = 1, \dots, q\}$ чисел, расположенных в порядке убывания: $\beta_1 > \dots > \beta_k > 0$. Это и есть составное разбиение $(\alpha \mid \beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k \mid \beta_1, \dots, \beta_k)$. Можно сказать, что разбиение $(\alpha \mid \beta)$ может быть разложено в разбиения разной окраски из набора цветов $m = 1, \dots, p$. Отметим, что не всякое разбиение может быть разложено таким образом, например, если $p \neq 2$, нельзя разложить разбиение $(\alpha \mid \beta) = (1 \mid 2)$.

Можно доказать следующую лемму (обозначения введены выше).

ЛЕММА 2. Для разбиений $(\alpha^{(m_b)} \mid \beta^{(m_b)}) = (\alpha_1^{(m_b)}, \dots, \alpha_{k^{(m_b)}}^{(m_b)} \mid \beta_1^{(m_b)}, \dots, \beta_{k^{(m_b)}}^{(m_b)})$, где $b = 1, \dots, q$, и составного разбиения $(\alpha \mid \beta) = (\alpha_1, \dots, \alpha_k \mid \beta_1, \dots, \beta_k)$

$$s_{(\alpha \mid \beta)}(\mathbf{t}_\infty^{[p]}) = (-1)^{\sigma(\alpha, \beta)} \prod_{b=1}^q \frac{\prod_{i < j}^{k^{(m_b)}} (\alpha_i^{(m_b)} - \alpha_j^{(m_b)}) (\beta_i^{(m_b)} - \beta_j^{(m_b)})}{\prod_{i,j=1}^{k^{(m_b)}} (\alpha_i^{(m_b)} + \beta_j^{(m_b)} + 1)} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{i=1}^{k^{(m_b)}} \alpha_i^{(m_b)}! \beta_i^{(m_b)}!}, \quad (3.14)$$

$$s_{(\alpha \mid \beta)}(\mathbf{t}^{[p]}(a)) = (-1)^{\sigma(\alpha, \beta)} \prod_{b=1}^q \frac{\prod_{i < j}^{k^{(m_b)}} (\alpha_i^{(m_b)} - \alpha_j^{(m_b)}) (\beta_i^{(m_b)} - \beta_j^{(m_b)})}{\prod_{i,j=1}^{k^{(m_b)}} (\alpha_i^{(m_b)} + \beta_j^{(m_b)} + 1)} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k^{(m_b)}} \frac{(a)_{\alpha_i^{(m_b)}+1}}{\alpha_i^{(m_b)}!} \frac{(-1)^{\beta_i^{(m_b)}} (-a)_{\beta_i^{(m_b)}}}{\beta_i^{(m_b)}!}, \quad (3.15)$$

$$s_{(\alpha \mid \beta)}(\mathbf{t}^{[p]}(\infty, q)) = (-1)^{\sigma(\alpha, \beta)} \prod_{b=1}^q \frac{\prod_{i < j}^{k^{(m_b)}} (q^{\alpha_i^{(m_b)}+1} - q^{\alpha_j^{(m_b)}+1}) (q^{-\beta_j^{(m_b)}} - q^{-\beta_i^{(m_b)}})}{\prod_{i,j=1}^{k^{(m_b)}} (q^{-\beta_i^{(m_b)}} - q^{\alpha_j^{(m_b)}+1})} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{i=1}^{k^{(m_b)}} (q; q)_{\alpha_i^{(m_b)}} (q; q)_{\beta_i^{(m_b)}}}, \quad (3.16)$$

$$s_{(\alpha \mid \beta)}(\mathbf{t}^{[p]}(a, q)) = (-1)^{\sigma(\alpha, \beta)} \prod_{b=1}^q \frac{\prod_{i < j}^{k^{(m_b)}} (q^{\alpha_i^{(m_b)}+1} - q^{\alpha_j^{(m_b)}+1}) (q^{-\beta_j^{(m_b)}} - q^{-\beta_i^{(m_b)}})}{\prod_{i,j=1}^{k^{(m_b)}} (q^{-\beta_i^{(m_b)}} - q^{\alpha_j^{(m_b)}+1})} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k^{(m_b)}} \frac{(q^a; q)_{\alpha_i^{(m_b)}+1}}{(q; q)_{\alpha_i^{(m_b)}}} \frac{(-1)^{\beta_i^{(m_b)}} q^{(a-1)\beta_i^{(m_b)}} (q^{1-a}; q)_{\beta_i^{(m_b)}}}{(q; q)_{\beta_i^{(m_b)}}}. \quad (3.17)$$

Отсюда можно получить обобщение теоремы 1 на случай p -ЦТ. Для большей простоты формул положим $n = 0$ в ГТФ $\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть тау-функция

$$\tau^{\text{sol}}(\tilde{n}^{(1)}, \dots, \tilde{n}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{*(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{*(p)})$$

определена с помощью формулы (3.1) и параметры выбраны следующим образом:

$$a_{ij}^{mn} = a_{ij}^{mn}(\mathbf{t}) = s_{(ip+m-1 | jp+n-1)}(\mathbf{t}), \quad (3.18)$$

$$T_k^{(m)} = T_{pk+m-1}, \quad m = 1, \dots, p, \quad (3.19)$$

$$T_k^{(m)} = \sum_{n \neq 0}^{\infty} (z_{k,m})^n \tilde{t}_n^{(m)} - \tilde{n}^{(m)} \ln z_{k,m} - C_k^{(m)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.20)$$

где $C_k^{(m)}$ – некоторые константы, которые мы определим ниже.

Тогда

(A)

$$\begin{aligned} & \tau^{\text{sol}}(\tilde{n}^{(1)}, \dots, \tilde{n}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{*(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{*(p)}) \times \\ & \times e^{-\sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} n \tilde{t}_n^{(m)} \tilde{t}_n^{*(m)}} = \tau(0, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}_{\infty}^{[p]}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где левая часть описывает бесконечносолитонное решение с параметрами

$$z_{k,m} = k + \alpha^{(m)} + 1, \quad k \geq 0, \quad z_{-k,m} = -k + \alpha^{(m)}, \quad k > 0, \quad m = 1, \dots, p, \quad (3.22)$$

$$C_k^{(m)} = -\ln k!, \quad k \geq 0, \quad C_k^{(m)} = -\ln(-k)!, \quad k < 0; \quad (3.23)$$

(B)

$$\begin{aligned} & \tau^{\text{sol}}(\tilde{n}^{(1)}, \dots, \tilde{n}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{*(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{*(p)}) \times \\ & \times e^{-\sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} n \tilde{t}_n^{(m)} \tilde{t}_n^{*(m)}} = \tau(0, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^{[p]}(a)), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где левая часть описывает бесконечносолитонное решение с параметрами

$$z_{k,m} = k + \alpha^{(m)} + 1, \quad k \geq 0, \quad z_{-k,m} = -k + \alpha^{(m)}, \quad k > 0, \quad (3.25)$$

$$C_k^{(m)} = \ln \frac{(a)_{k+1}}{k!}, \quad k \geq 0, \quad C_k^{(m)} = \ln \frac{(-1)^k (a)_{-k}}{(-k)!}, \quad k < 0; \quad (3.26)$$

(B)

$$\begin{aligned} & \tau^{\text{sol}}(\tilde{n}^{(1)}, \dots, \tilde{n}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{*(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{*(p)}) \times \\ & \times e^{-\sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} n \tilde{t}_n^{(m)} \tilde{t}_n^{*(m)}} = \tau(0, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^{[p]}(\infty, q)), \end{aligned} \quad (3.27)$$

где левая часть описывает бесконечносолитонное решение с параметрами

$$z_{k,m} = q^{k+1} + b^{(m)}, \quad k \geq 0, \quad z_{-k,m} = q^{-k} + b^{(m)}, \quad k > 0, \quad (3.28)$$

$$C_k^{(m)} = -\ln(q; q)_k, \quad k \geq 0, \quad C_k^{(m)} = -\ln(q; q)_{-k}, \quad k < 0; \quad (3.29)$$

(Г)

$$\begin{aligned} & \tau^{\text{sol}}(\tilde{n}^{(1)}, \dots, \tilde{n}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{(p)}; \tilde{\mathbf{t}}^{*(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{t}}^{*(p)}) \times \\ & \times e^{-\sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^{\infty} n \tilde{t}_n^{(m)} \tilde{t}_n^{*(m)}} = \tau(0, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^{[p]}(a, q)), \end{aligned} \quad (3.30)$$

где левая часть описывает бесконечносолитонное решение с параметрами

$$z_{k,m} = q^{k+1} + b^{(m)}, \quad k \geq 0, \quad z_{-k,m} = q^{-k} + b^{(m)}, \quad k > 0, \quad (3.31)$$

$$T_{k,0}^{(m)} = \ln \frac{(q^a; q)_{m+1}}{(q; q)_m}, \quad m \geq 0, \quad T_{k,0}^{(m)} = \ln \frac{(-1)^k q^{-(a+1)k} (q^{1-a}; q)_{-k}}{(q; q)_{-k}}, \quad k < 0. \quad (3.32)$$

В вышеприведенных формулах $\alpha^{(m)}$ и $b^{(m)}$ – произвольные комплексные числа, а обозначения $\mathbf{t}_{\infty}^{[p]}$, $\mathbf{t}^{[p]}(a)$, $\mathbf{t}^{[p]}(\infty, q)$ и $\mathbf{t}^{[p]}(a, q)$ были введены выше в формулах (3.7)–(3.10).

4. МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ КАК БЕСКОНЕЧНОСОЛИТОННЫЕ ТАУ-ФУНКЦИИ

Как показано в работах [5], [6], ряды теории возмущений для многих матричных моделей описывается тау-функциями гипергеометрического типа. По теоремам 1, 2 эти ряды можно интерпретировать как бесконечносолитонную тау-функцию.

4.1. Модель нормальных матриц. Хорошим примером является модель нормальных матриц [25] с аксиально-симметричным взаимодействием. В этом случае согласно [4], [5] ряд теории возмущений является гипергеометрической функцией достаточно общего вида.

Матрица называется нормальной, если она приводится к диагональному виду, или, что то же самое, если она коммутирует со своей эрмитово сопряженной M^+ :

$$[M, M^+] = 0. \quad (4.1)$$

Пусть M диагонализуется унитарной матрицей U : $M = UZU^+$, $Z = \text{diag}(z_1, \dots, z_n)$, z_i – собственные значения M . Ясно, что эрмитово сопряженная матрица диагонализуется тем же преобразованием, $M^+ = U\bar{Z}U^+$, причем диагональная матрица $\bar{Z}$ комплексно сопряжена к Z .

Статистическая сумма модели нормальных матриц такова:

$$Z(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*; V) = \int d\Omega(M) e^{\text{tr } V_1(M) + \text{tr } V_2(M^+) + \text{tr } V(M, M^+)}, \quad (4.2)$$

причем мера интегрирования определена формулой

$$d\Omega(M) = d_* U |\Delta(z)|^2 \prod_{i=1}^n d^2 z_i. \quad (4.3)$$

В этом выражении $d_* U$ обозначает меру Хаара унитарной группы $U(n)$, а $\Delta(z)$ – определитель Вандермонда,

$$\Delta(z) = \det z_i^{n-k} = \prod_{i < k}^n (z_i - z_k). \quad (4.4)$$

В случае $n = 1$ мы полагаем $\Delta(z) = 1$.

Потенциалы $V_1(M)$, $V_2(M^+)$ и $V(M, M^+)$ определены с помощью рядов Тейлора:

$$\begin{aligned} V_1(M) &= \sum_{m=1}^{\infty} t_m M^m, & V_2(M) &= \sum_{m=1}^{\infty} t_m^* (M^+)^m, \\ V(M, M^+) &= \sum_{k,m=1}^{\infty} v_{km} M^k (M^+)^m, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где t_m , t_m^* , v_{km} являются комплексными константами связи.

Если перейти от переменных M к переменным (U, Z) и проинтегрировать по $U(n)$, получим

$$Z(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*; V) = C \int_{\mathbb{C}} \dots \int_{\mathbb{C}} |\Delta(z)|^2 \prod_{i=1}^n e^{V_1(z_i) + V_2(\bar{z}_i) + V(z_i, \bar{z}_i)} d^2 z_i, \quad (4.6)$$

где интеграл берется по комплексным собственным значениям z_i , константа C связана с объемом унитарной группы.

Модель нормальных матриц используется при описании капель в квантовом эффекте Холла [26]. В работе [27] было показано, что в частном случае $v_{km} = \delta_{k,1} \delta_{m,1}$ квазиклассический предел $1/n \rightarrow \infty$ модели нормальных матриц описывает движение границы пятна воды, окруженного пленкой нефти, при наличии источника воды постоянной силы. Эта задача имеет также отношение к некоторым давно поставленным задачам из комплексного анализа [28].

Теперь опишем ряд теории возмущений для статистической суммы (4.6) по константам связи $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}^*$. Положим

$$e^{T_0 - T_m} = A \int_0^{+\infty} z^m e^{\sum_{k=1}^{\infty} v_k z^k} dz. \quad (4.7)$$

Тогда согласно результатам работ [5], [6] имеем следующий асимптотический ряд:

$$\begin{aligned} I^{NM}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*; V) &= \tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = I^{NM}(n, 0, 0; V) \times \\ &\times \sum_{(\alpha | \beta)} s_{(\alpha | \beta)}(\mathbf{t}) s_{(\alpha | \beta)}(\mathbf{t}^*) e^{\sum_{i=1}^{k(\alpha | \beta)} (T_{n-\beta_i-1} - T_{n+\alpha_i})}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если выбрать константы связи $\mathbf{t}^*$ в соответствии с одной из формул (3.7)–(3.10), то по теоремам 1, 2 этот ряд теории возмущений является бесконечносолитонной тау-функцией.

В частности, матричный интеграл

$$I^{NM}(n, \mathbf{t}^{(p)}(a), \mathbf{t}^{*(p)}(a); V) = \int d\Omega(M) e^{\text{tr } U(MM^+)} \det(1 - M^p)^{-a} \det(1 - (M^+)^p)^{-a}, \quad (4.9)$$

соответствующий выбору констант связи в виде (3.8), факторизуется в произведение p бесконечносолитонных тау-функций.

4.2. Двухматричная модель. Рассмотрим двухматричную модель

$$I^{2MM}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \int e^{\text{tr } V_1(M_1) + \text{tr } V_2(M_2)} e^{-\text{tr } M_1 M_2} dM_1 dM_2, \quad (4.10)$$

где M_1 и M_2 – эрмитова и антиэрмитова $(n \times n)$ -матрицы, соответственно. Мера интегрирования в (4.10) такова:

$$dM_1 dM_2 = \prod_{i=1}^n d(M_1)_{ii} d(M_2)_{ii} \prod_{i < j}^n d\text{Re}(M_1)_{ij} d\text{Re}(M_2)_{ij} d\text{Im}(M_1)_{ij} d\text{Im}(M_2)_{ij}. \quad (4.11)$$

Потенциалы определяются константами связи $\mathbf{t}, \mathbf{t}^*$:

$$V_1(M_1) = \sum_{m=1}^{\infty} t_m M_1^m, \quad V_2(M_2) = \sum_{m=1}^{\infty} t_m^* M_2^m. \quad (4.12)$$

Как хорошо известно [29], интеграл (4.10) сводится к интегралу по собственным значениям x_i и y_i матриц M_1 и M_2 , соответственно.

Имеем

$$I^{2MM}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) \frac{(2\pi)^n}{C_n} = \sum_{\lambda} (n)_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*), \quad (4.13)$$

где

$$(n)_{\lambda} = \prod_{i,j \in \lambda} (n + j - i) = \frac{\Gamma(n+1+\lambda_1)\Gamma(n+\lambda_2)\dots\Gamma(\lambda_n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n)\dots\Gamma(1)}, \quad (4.14)$$

а объем унитарной группы включен в постоянную C_n [6].

Таким образом, если в этом выражении выбрать константы связи в соответствии с одной из формул (3.7)–(3.10), статсумму (4.10) можно интерпретировать как бесконечносолитонное решение из теорем 1, 2.

Отметим, что на уровне ряда теории возмущений матричный интеграл

$$I^{2MM}(n, \mathbf{t}_{\infty}^{(p)}, \mathbf{t}_{\infty}^{(p)}) = \int e^{\text{tr } M_1^p + \text{tr } M_2^p} e^{-\text{tr } M_1 M_2} dM_1 dM_2 \quad (4.15)$$

факторизуется в произведение p бесконечносолитонных тау-функций.

4.3. Одноматричная модель. Статсумма одноматричной модели есть

$$Z(N, g, g_4) = \int dM \exp\left(-N \frac{g}{2} \text{tr } M^2 - N \sum_{m>2} \frac{g_{2m}}{2m} \text{tr } M^{2m}\right), \quad (4.16)$$

где M – эрмитова $(N \times N)$ -матрица, а мера определена как

$$dM = \prod_{i=1}^n dM_{ii} \prod_{i < j}^n d\text{Re } M_{ij} d\text{Im } M_{ij}.$$

Для простоты в модели (4.16) мы взяли четный потенциал.

Как следует из работы [6], а также из приложения Б, ряд теории возмущений факторизуется:

$$Z(2N, g, g_4) = \tau_{r(1)}(N, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) \tau_{r(2)}(N, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*), \quad (4.17)$$

$$Z(2N + 1, g, g_4) = \tau_{r(1)}(N + 1, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) \tau_{r(2)}(N, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*), \quad (4.18)$$

где

$$\mathbf{t} = \left(0, -\frac{Ng_4}{4}, -\frac{Ng_6}{6}, -\frac{Ng_8}{8}, \dots\right), \quad \mathbf{t}^* = \left(\frac{1}{2Ng}, 0, 0, 0, \dots\right) = \frac{1}{2Ng} \mathbf{t}_\infty. \quad (4.19)$$

Каждый множитель в (4.17) удовлетворяет уравнению (2.35) и имеет вид бесконечносолитонного решения. С помощью (4.17), (4.18) найдем

$$r^{(1)}(k) = 2k(2k - 1), \quad r^{(2)}(k) = (2k + 1)(2k), \quad (4.20)$$

что с учетом формулы (A.21) позволяет определить T_m в (2.1) для тау-функций $\tau_{r(1)}(N + 1, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ и $\tau_{r(2)}(N, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае $t_k^* = \delta_{k,4}$ ряд $\tau_{r(1,2)}(N, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ может быть получен как ряд теории возмущений для матричного интеграла

$$\tau_{r(1,2)}(N, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = C_N \int \exp\left(-\frac{\text{tr } M^2}{2Ng_4}\right) \det\left(1 - \frac{\sqrt{-2}M}{gN}\right)^{-N \pm \frac{1}{2}} dM, \quad (4.21)$$

в котором интегрирование ведется по эрмитовым $(N \times N)$ -матрицам M , C_N – нормировочный множитель. Ряд теории возмущений для интеграла (4.21) также есть ряд для бесконечносолитонной тау-функции.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Фермионное представление. Гипергеометрическая тау-функция ЦТ

Мы будем использовать фермионное представление работ [16], [30] (см. также [18]).

ГТФ иерархии КП в форме (1.19) имеет следующее фермионное представление [1] (некоторые детали вывода выписаны в [6]):

$$\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \langle n | e^{H(\mathbf{t})} e^{-A(\mathbf{t}^*)} | n \rangle, \quad (A.1)$$

где

$$H(\mathbf{t}) = \sum_{m=1}^{\infty} H_m t_m, \quad A(\mathbf{t}^*) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m t_m^*, \quad (A.2)$$

$$H_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_k \psi_{k+m}^*, \quad m \neq 0, \quad (A.3)$$

$$A_m = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(n) \dots r(n - m + 1) \psi_n \psi_{n-m}^*, \quad m = 1, 2, \dots \quad (A.4)$$

Здесь $\{\psi_m\}, \{\psi_m^*\}$ ($m \in \mathbb{Z}$) – это фермионные операторы, удовлетворяющие каноническим антикоммутационным соотношениям

$$[\psi_j, \psi_k^*]_+ = \delta_{jk}, \quad [\psi_j, \psi_k]_+ = 0, \quad [\psi_j^*, \psi_k^*]_+ = 0, \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{A.5})$$

Вакуумные состояния заряда n в формуле (A.1) определены как

$$|n\rangle := \psi_{n-1} \dots \psi_1 \psi_0 |0\rangle, \quad n > 0, \quad |n\rangle := \psi_n^* \dots \psi_{-1}^* |0\rangle, \quad n < 0, \quad (\text{A.6})$$

где вакуумный вектор $|0\rangle$ характеризуется свойством

$$\psi_m |0\rangle = 0, \quad m < 0; \quad \psi_m^* |0\rangle = 0, \quad m \geq 0. \quad (\text{A.7})$$

Из (A.3) и (A.4) можно получить, что при любых $n, m = 1, 2, \dots$ имеют место соотношения $[H_n, H_m] = [A_n, A_m] = 0$, $[H_n, A_m] \neq 0$.

Определим также

$$H^*(\mathbf{t}^*) = \sum_{m=1}^{\infty} H_{-m} t_m^*, \quad (\text{A.8})$$

где H_{-m} , $m = 1, 2, \dots$, заданы формулой (A.3). Тогда, как легко заметить, для $r \equiv 1$ имеем $A(\mathbf{t}^*) = H^*(\mathbf{t}^*)$.

Непосредственно из определений можно вывести, что для любых $\mathbf{t}^*$ и $\mathbf{t}$

$$\langle n | H^*(\mathbf{t}^*) = 0, \quad H(\mathbf{t}) | n\rangle = 0. \quad (\text{A.9})$$

Приведем также теорему Вика, которая используется при выводе формул для резонансных солитонных решений (именно, при выводе формулы (2.23) из предыдущей формулы (2.22)) и при выводе аналогичной формулы для многокомпонентного случая.

Нам потребуется следующая форма теоремы Вика:

$$\langle n | w_1 \dots w_k w_1^* \dots w_k^* | n\rangle = \det A, \quad A_{ij} = \langle n | w_i w_j^* | n\rangle, \quad i, j = 1, \dots, k, \quad (\text{A.10})$$

где w_i , $i = 1, 2, \dots, k$, – любые линейные комбинации фермионных операторов ψ_m , $m \in \mathbb{Z}$, а w_i^* , $i = 1, 2, \dots, k$ – любые линейные комбинации фермионных операторов ψ_m^* , $m \in \mathbb{Z}$.

Для построения солитонных решений введем

$$\psi(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m z^m, \quad \psi(z)^* = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \psi_m^* z^{-m-1}. \quad (\text{A.11})$$

Используя формулу (A.10), получим

$$\begin{aligned} \langle n | \psi(z_1) \dots \psi(z_k) \psi^*(z_{-1}) \dots \psi^*(z_{-k}) | n\rangle = \\ = \left(\frac{z_1}{z_{-1}} \right)^n \dots \left(\frac{z_k}{z_{-k}} \right)^n \frac{\prod_{i < j}^k (z_i - z_j)(z_{-i} - z_{-j})}{\prod_{i,j=1}^k (z_i - z_{-j})}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Для того чтобы получить множители e^ξ в (2.22), воспользуемся формулами из работ [16], [18]:

$$\begin{aligned} e^{H(\mathbf{t})}\psi(z)e^{-H(\mathbf{t})} &= \psi(z)e^{\xi(\mathbf{t},z)}, \\ e^{H(\mathbf{t})}\psi^*(z)e^{-H(\mathbf{t})} &= \psi^*(z)e^{-\xi(\mathbf{t},z)}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} e^{-H^*(\mathbf{t}^*)}\psi(z)e^{H^*(\mathbf{t}^*)} &= \psi(z)e^{-\xi(\mathbf{t}^*,z^{-1})}, \\ e^{-H^*(\mathbf{t}^*)}\psi^*(z)e^{H^*(\mathbf{t}^*)} &= \psi^*(z)e^{\xi(\mathbf{t}^*,z^{-1})}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

где

$$\xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m t_m, \quad (\text{A.15})$$

а также соотношениями

$$\langle n | e^{H^*(\mathbf{t}^*)} = \langle n |, \quad e^{H(\mathbf{t})} | n \rangle = | n \rangle, \quad (\text{A.16})$$

которые следуют из (A.9).

Приведем важную формулу [16], [30]. Для $-\beta_1 < \dots < -\beta_k \leq 0 \leq \alpha_k < \dots < \alpha_1$

$$\langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} \psi_{-\beta_1-1}^* \dots \psi_{-\beta_k-1}^* \psi_{\alpha_k} \dots \psi_{\alpha_1} | 0 \rangle = (-1)^{\beta_1 + \dots + \beta_k + k} s_{(\alpha|\beta)}(\mathbf{t}). \quad (\text{A.17})$$

Рассмотрим ЦТ [18], [30]. Наши обозначения $n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*$ соответствуют обозначениям $s, x, -y$ работы [18].

В фермионном представлении рассмотрим тау-функцию (1.1), зависящую от трех наборов переменных $\mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*$ и дискретной переменной n :

$$\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*) = \left\langle n \left| e^{H(\mathbf{t})} \exp \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} T_m : \psi_m^* \psi_m : \right) e^{H^*(\mathbf{t}^*)} \right| n \right\rangle, \quad (\text{A.18})$$

где $: \psi_m^* \psi_m : = \psi_m^* \psi_m - \langle 0 | \psi_m^* \psi_m | 0 \rangle$. В уравнениях ЦТ и КП величины T_n имеют смысл интегралов движения. Множитель $c_n(T)$ служит для нормировки тау-функции: $\tau(n, 0, T, 0) = 1$. Это дает

$$c_n(T) = \tau(n, \mathbf{0}, T, \mathbf{0}) = e^{T_{n-1} + \dots + T_1 + T_0}, \quad n > 0, \quad (\text{A.19})$$

$$c_n(T) = \tau(n, \mathbf{0}, T, \mathbf{0}) = e^{-T_n - \dots - T_{-2} - T_{-1}}, \quad n < 0. \quad (\text{A.20})$$

Если выполнено равенство

$$r(m) = e^{T_{m-1} - T_m}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.21})$$

то

$$c_n(T) \tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*). \quad (\text{A.22})$$

Гипергеометрические функции (B.13), (B.21), (B.17), (B.10), перечисленные в приложении В, есть тау-функции (A.18), взятые при определенных значениях перемен $n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*$, см. [1].

Следует заметить, что при некоторых специальных значениях переменных T тау-функции (А.18) рассматривались в работах [13] в контексте изучения струн с $c = 1$.

Тау-функция иерархии КП $\tau(n) = \tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$, рассматриваемая как функция n , подчиняется уравнению Хироты

$$\tau(n) \partial_{t_1^*} \partial_{t_1} \tau(n) - \partial_{t_1} \tau(n) \partial_{t_1^*} \tau(n) = r(n) \tau(n-1) \tau(n+1), \quad (\text{А.23})$$

которое эквивалентно уравнению ЦТ, записанному в следующей форме:

$$\partial_{t_1} \partial_{t_1^*} \phi_n = r(n) e^{\phi_{n-1} - \phi_n} - r(n+1) e^{\phi_n - \phi_{n+1}}, \quad (\text{А.24})$$

где

$$\phi_n(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = -\ln \frac{\tau_r(n+1, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)}{\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)}. \quad (\text{А.25})$$

Уравнения (А.23) и (А.24) остаются верными и в том случае, когда функция r имеет нули, и соотношения (А.21) выполняется лишь в смысле предельного перехода. В случае, когда $r(n)$ не обращается в нуль, можно сделать замену переменных

$$\varphi_n = -\phi_n - T_n, \quad (\text{А.26})$$

которая превращает уравнение (А.24) в стандартное уравнение ЦТ (1.4) [18]. Разница между этим уравнением и уравнением (А.24) возникает из-за нормировочного множителя $c_n(T)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Многокомпонентный случай

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть p – положительное целое число. Для каждого $i = 1, 2, \dots, p$ имеет место равенство

$$\tau_r(np + i, \mathbf{t}^{[p]}, \mathbf{t}^{*[p]}) = \tau_{r(1)}(n+1, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) \dots \tau_{r(i)}(n+1, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) \tau_{r(i+1)}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) \dots \tau_{r(p)}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*), \quad (\text{Б.1})$$

где каждая тау-функция $\tau_{r(m)}(j, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ (при $j = n, n+1$) задана формулой (А.1), в которой r определяется с помощью соотношений

$$r^{(m)}(k) = R(kp + m - 1), \quad m = 1, \dots, p, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{Б.2})$$

$$R(k) = r(k)r(k-1) \dots r(k-p+1). \quad (\text{Б.3})$$

Времена $\mathbf{t}^{[p]}, \mathbf{t}^{*[p]}$ в левой части равенства (Б.1) связаны с временами $\mathbf{t}, \mathbf{t}^*$ в правой части этого равенства с помощью формул (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем, следуя работе [16], цветные фермионы, которые получаются в результате следующей перенумерации исходных фермионов: $\psi_k^{(m)} := \psi_{kp+m-1}$, $\psi_k^{*(m)} := \psi_{kp+m-1}^*$, $m = 1, \dots, p$ и $k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что для всех j, k

$$[\psi_j^{(m)}, \psi_k^{*(n)}]_+ = [\psi_j^{(m)}, \psi_k^{(n)}]_+ = [\psi_j^{*(m)}, \psi_k^{*(n)}]_+ = 0, \quad m \neq n. \quad (\text{Б.4})$$

Тогда вакуумное среднее (A.1) распадается в произведение, состоящее из p вакуумных средних от фермионов цвета $1, \dots, p$.

Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \dots | \beta_1, \beta_2, \dots)$ – обозначение Фробениуса для разбиения λ . Положим

$$r_{\tilde{\lambda}}^{(m)}(k) = r_{\tilde{\lambda}}(k + m - p + 1), \quad m = 1, \dots, p, \quad (\text{B.5})$$

где $\tilde{\lambda}$ есть разбиение $(p\alpha_1, p\alpha_2, \dots | p\beta_1, p\beta_2, \dots)$.

Рассмотрим набор, состоящий из разбиений $\lambda^{(m)} = (\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, \dots, \alpha_{k^{(m)}}^{(m)} | \beta_1^{(m)}, \beta_2^{(m)}, \dots, \beta_{k^{(m)}}^{(m)})$, $m = 1, \dots, p$. Припишем числам $\{\alpha_{k_i}^{(m)} p + m - 1 | i = 1, \dots, k^{(m)}, m = 1, \dots, p\}$ нижние индексы так, чтобы $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_K > 0$, где $K = k^{(1)} + \dots + k^{(p)}$. В силу самой конструкции убывание имеет строгий характер. Аналогично, рассмотрим числа $\{\beta_{k_i}^{(m)} p + m - p | i = 1, \dots, k^{(m)}, m = 1, \dots, p\}$ и также перенумеруем их в порядке убывания: $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_K > 0$. Рассмотрим разбиение $\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_K | \beta_1, \dots, \beta_K)$. Используя фермионное представление (A.17), получим

$$\prod_{m=1}^p s_{\lambda^{(m)}}(\mathbf{t}) = (-1)^{c_{\lambda}} s_{\lambda}(\mathbf{t}^{[p]}), \quad s_{\lambda}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots) = (-1)^{c_{\lambda}} \prod_{m=1}^p H_{\lambda^{(m)}}^{-1}, \quad (\text{B.6})$$

где знаковый множитель $(-1)^{c_{\lambda}}$ возникает из-за переупорядочивания фермионов внутри вакуумного среднего. Именно такой множитель возникает при доказательстве теоремы 2 в результате переупорядочивания фермионов в выражении (3.1), когда мы получаем ряд по числам a_{ij}^{mn} .

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Задачи, в которых встречается ГТФ

В данном разделе мы укажем соответствие между ГТФ и рядами, рассматриваемыми в некоторых работах.

1. *Двумерная теория Янга–Миллса* [31] и частные случаи так называемой нелокальной двумерной теорией Янга–Миллса [32], рассматриваемые на диске, приводят к следующему выражению для коррелятора двух петель Вильсона:

$$Z(U_1, U_2) = \sum_R \xi_R(U_1^{-1}) \xi_R(U_2^{-1}) e^{A \sum_{m=1}^{\infty} a_m C_m(R)}. \quad (\text{B.1})$$

Здесь a_m – некоторые константы (в 2D-теории Янга–Миллса все a_m равны нулю, кроме константы a_2 , которая просто выражается через константу связи теории [31]). Суммирование ведется по всем неприводимым представлениям калибровочной группы. Матрицы U_1 и U_2 – это упорядоченные экспоненты (петли Вильсона) от интегралов по калибровочному полю по границам диска. Число A – это площадь диска, а C_m , $m = 1, 2, \dots$, – значения операторов Казимира для калибровочной группы $SU(N)$:

$$C_m(R) = \sum_{i=1}^N [(\lambda_i + N - i)^m - (N - i)^m]. \quad (\text{B.2})$$

Положив

$$mt_m = \text{tr } U_1^m, \quad mt_m^* = \text{tr } U_2^m, \quad (\text{B.3})$$

мы получим, что ряд (B.1) совпадает с (1.1).

2. *Производящая функция для двойных чисел Гурвица* введена в работе [10] при исследовании потенциала Громова–Виттена. Она также имеет форму (1.1),

$$\tau(P, P', \beta, q) = \sum_{\lambda} q^{|\lambda|} e^{\beta f_2(\lambda)} s_{\lambda}(P) s_{\lambda}(P'), \quad (\text{B.4})$$

где P и P' можно отождествить соответственно с $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}^*$, использованными в данной работе, и где

$$f_2(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_i \left[\left(\lambda_i - i + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(-i + \frac{1}{2} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.5})$$

Выбирая $\mathbf{t} = \mathbf{t}^* = e^{u/2} \mathbf{t}_{\infty} := (e^{u/2}, 0, 0, \dots)$ (как это проделано в [10], [11]), можно получить следующую запись одномерной ЦТ (1.22):

$$e^{-u} \frac{d^2 \phi_n}{du^2} = r(n) e^{\phi_{n-1} - \phi_n} - r(n+1) e^{\phi_n - \phi_{n+1}}. \quad (\text{B.6})$$

После редукции $n = \ln t_1 t_1^* + \text{const}$, сходной с редукцией КП к уравнению Бенеджамино–Оно [33], получим так называемое эквивариантное уравнение ЦТ [10]. В этом случае в уравнении (2.32) $\tilde{t}_2 = \beta$, а все остальные $\tilde{t}_k = 0$.

3. *Суперсимметричные калибровочные теории* [8], [9]. В работе [8] рассматривалась слабо нарушенная суперсимметричная ($\mathcal{N} = 4$)-теория, которая сводится к суперсимметричной калибровочной ($\mathcal{N} = 2$)-теории с калибровочной группой $U(N)$. Подсчет функционального интеграла в случае $U(1)$ в четырехмерном евклидовом пространстве на так называемом Ω -фоне приводит к выражению

$$Z(\Lambda) = e^{-1/12} \sum_{\mathbf{k}} \Lambda^{2|\mathbf{k}|} \mu(\mathbf{k})^2, \quad \mu(\mathbf{k}) = \prod_{i < j} \left(\frac{k_i - k_j + j - i}{j - i} \right). \quad (\text{B.7})$$

Переобозначим $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots)$ как $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $\Lambda^2 = r$. Можно видеть, что тогда ряд в (B.7) является тау-функцией гипергеометрического типа, где $\mathbf{t} = \mathbf{t}^* = \mathbf{t}_{\infty}$. Ряд для случая $N > 1$ после некоторого преобразования также приводится к виду (1.1). В [8] рассматривалась компактифицированная на окружность суперсимметричная 5D-теория с восемью суперзарядами. Для случая $U(1)$ подсчет функционального интеграла дает

$$Z(\beta, \Lambda) = \Lambda^{(1-N^2)/12} e^{\gamma_{\hbar}(0|\beta, \Lambda)} \sum_{\mathbf{k}} (\beta \Lambda)^{2|\mathbf{k}|} \mu(\mathbf{k})^2, \quad (\text{B.8})$$

$$\mu(\mathbf{k}) = \prod_{i < j} \left(\frac{\text{sh}(\beta \hbar (k_i - k_j + j - i)/2)}{\text{sh}(\beta \hbar (j - i)/2)} \right)$$

где β – параметр теории, связанный с компактификацией. Это есть тау-функция (1.6), в которой $\mathbf{t} = \mathbf{t}^* = \mathbf{t}(\infty, q)$.

4. *Производящая функция для индексов пересечения на схемах Гильберта* была выписана в [12]. Этот ряд также является ГТФ. Обозначения m, t, s и x из работы [12] соответствуют нашим обозначениям $n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*$ и T , соответственно. Функция $\tau(t, s, x, m)$ работы [12] соответствует нашей функции $\tau(n, \mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*)$ и является производящей функцией эквивариантных индексов пересечения на схемах Гильберта точек аффинной плоскости.

5. Один из примеров *точно решаемых матричных моделей* приведен в работе [7]. Пусть

$$\begin{aligned} \int_{U(n)} \det U^{\mp m} \det(1 - XU)^{-a} \det(1 - U^{-1}Y)^{-b} d_* U = \\ = \frac{1}{(n)_\sigma} \left\{ \frac{(a)_\sigma \det X^m}{(\tilde{a})_\sigma \det Y^m} \right\} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \tilde{a}, \tilde{b} \\ n+m \end{matrix} \middle| XY \right), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

где σ обозначает разбиение $(m, \dots, m)$, $\ell(\sigma) = n$, $m \geq 0$, $\tilde{a} = a + m$, $\tilde{b} = b$ для верхнего знака, $\tilde{a} = a$, $\tilde{b} = b + m$ для нижнего знака в левой части (B.9). Обозначение $(n)_\sigma$, $(a)_\sigma$ см. ниже в (B.12). Гауссова гипергеометрическая функция матричного аргумента ${}_2F_1$ приводится в (B.10), все гипергеометрические функции матричного аргумента являются примерами ГТФ. При $m = 0$, $-a = -b = p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ интеграл (B.9) был недавно подсчитан методом реплик в форме детерминанта матрицы размера $(p \times p)$ [34].

Отметим, что ${}_2F_1(a, b; c | X)$ с целыми a, b, c является решением уравнения Пенлеве V [35].

6. *Гипергеометрические функции матричного аргумента X* (X – нормальная матрица с собственными значениями $\mathbf{x}^N = x_1, \dots, x_N$) определяются формулой [3]

$${}_pF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| X \right) = \sum_{\substack{\lambda \\ l(\lambda) \leq N}} \frac{(a_1)_\lambda \dots (a_p)_\lambda}{(b_1)_\lambda \dots (b_s)_\lambda} \frac{s_\lambda(\mathbf{x}^N)}{H_\lambda}, \quad (\text{B.10})$$

где суммирование ведется по всем разбиениям. В этой формуле использованы следующие обозначения: H_λ – произведение длин крюков,

$$H_\lambda = \prod_{(i,j) \in \lambda} h_{ij}, \quad h_{ij} = (\lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1), \quad (\text{B.11})$$

$$(a)_\lambda = (a)_{\lambda_1} (a-1)_{\lambda_2} \dots (a-k+1)_{\lambda_k}, \quad (a)_0 = 1. \quad (\text{B.12})$$

При $N = 1$ мы получаем

$${}_pF_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_s)_n} \frac{x^n}{n!}. \quad (\text{B.13})$$

В работах [1] показано, что (B.10) является тау-функцией (1.19):

$${}_pF_s \left(\begin{matrix} a_1 + n, \dots, a_p + n \\ b_1 + n, \dots, b_s + n \end{matrix} \middle| X \right) = \tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}_\infty), \quad (\text{B.14})$$

где

$$r(k) = \prod_{i=1}^p (k + a_i) \prod_{i=1}^s (k + b_i)^{-1}, \quad (\text{B.15})$$

$$t_m = \text{tr } \mathbf{X}^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.16})$$

Так как в качестве аргумента тау-функции в правой части (B.14) стоит $\mathbf{t}_\infty$, то в силу (2.32) гипергеометрические функции матричного аргумента всегда имеют солитонную трактовку.

Пусть $|q| < 1$. Ряд

$${}_p\Phi_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; q, \mathbf{x}^N) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_N} \frac{(q^{a_1}; q)_\lambda \dots (q^{a_p}; q)_\lambda}{(q^{b_1}; q)_\lambda \dots (q^{b_s}; q)_\lambda} \frac{q^{n(\lambda)}}{H_\lambda(q)} s_\lambda(\mathbf{x}^N), \quad (\text{B.17})$$

где суммирование ведется по всем разбиениям, называется q -деформированной гипергеометрической функцией матричного аргумента [36]. Далее,

$$H_\lambda(q) = \prod_{(i,j) \in \lambda} (1 - q^{h_{ij}}), \quad h_{ij} = (\lambda_i + \lambda_j^{\text{tr}} - i - j + 1), \quad (\text{B.18})$$

где λ^{tr} обозначает сопряженное разбиение [22],

$$(q^c; q)_\lambda = (q^c; q)_{\lambda_1} (q^{c-1}; q)_{\lambda_2} \dots (q^{c-k+1}; q)_{\lambda_k}, \quad (\text{B.19})$$

$$q^{n(\lambda)} = q^{\sum_{i=1}^k (i-1)\lambda_i}. \quad (\text{B.20})$$

Для $N = 1$ получим обычную q -деформированную гипергеометрическую функцию

$${}_p\Phi_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; q, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}; q)_n \dots (q^{a_p}; q)_n}{(q^{b_1}; q)_n \dots (q^{b_s}; q)_n} \frac{x^n}{(q; q)_n}. \quad (\text{B.21})$$

В работах [1] найдено, что (B.17) является тау-функцией (1.19):

$${}_p\Phi_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; q, X) = \tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}(\infty, q)), \quad (\text{B.22})$$

где

$$t_m = \text{tr } X^m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{B.23})$$

$$r(n) = \frac{\prod_{i=1}^p (1 - q^{a_i+n})}{\prod_{i=1}^s (1 - q^{b_i+n})}, \quad (\text{B.24})$$

$\mathbf{t}(\infty, q)$ задается в формуле (2.5). Таким образом, в силу (2.38) гипергеометрическая функция (B.17) является солитонной тау-функцией.

Благодарности. Автор благодарен А. Забродину, А. Лосеву, С. Натанзону, И. Лупенко и особенно Н. Некрасову за полезные обсуждения. Автор также благодарен М. Бойти, Т. Дегасперису, П. Сантини, Г. Хельминку и Й. ван де Леру за обсуждения и организацию лекции в Галиполли, семинаров в университетах Рима, Утрехта и Твенте, где начата данная работа. Работа поддержана РФФИ (грант № 02-02-17382) и программой РАН “Математические методы нелинейной динамики”.

Список литературы

- [1] A. Yu. Orlov, D. M. Scherbin. Fermionic representation for basic hypergeometric functions related to Schur polynomials. nlin.SI/0001001; Physica. D. 2001. V. 152–153. P. 51.
- [2] A. Yu. Orlov, D. M. Scherbin. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 2295.
- [3] K. I. Gross, D. S. Richards. Trans. Amer. Math. Soc. 1987. V. 301. P. 781; *Н. Я. Буленкин, А. У. Климук.* Представления групп Ли и специальные функции. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 59. Ред. А. А. Кириллов. М.: ВИНТИ, 1990.
- [4] A. Yu. Orlov. Acta Appl. Math. 2005. V. 86. № 1–2. P. 131; nlin.SI/0207030.
- [5] A. Yu. Orlov. Tau functions and matrix integrals. math-ph/0210012.
- [6] Дж. Харнад, А. Ю. Орлов. ТМФ. 2003. Т. 137. № 3. С. 375; nlin.SI/0211051.
- [7] A. Yu. Orlov. Int. J. Mod. Phys. A. 2004. V. 19. P. 276; nlin.SI/0209063.
- [8] N. A. Nekrasov. Adv. Theor. Math. Phys. 2004. V. 7. P. 831; hep-th/0206161.
- [9] A. S. Losev, A. Marshakov, N. A. Nekrasov. Small instantons, little strings and free fermions. Preprint ITEP-TH-1-03. Moscow: ITEP, 2003; hep-th/0302191.
- [10] A. Okounkov. Math. Res. lett. 2000. V. 7. P. 447; math.AG/0004128.
- [11] A. Okounkov, R. Pandharipande. The equivariant Gromov–Witten theory of P^1 . math.AG/0207233.
- [12] W.-P. Li, Z. Qin, W. Wang. Int. Math. Res. Notices. 2004. V. 40. P. 2085; math.AG/0302211.
- [13] T. Nakatsu, K. Takasaki, S. Tsujimaru. Nucl. Phys. B. 1995. V. 443. P. 155; hep-th/9501038; T. Takasaki. Commun. Math. Phys. 1996. V. 181. P. 131; hep-th/9506089.
- [14] A. Yu. Orlov. Hypergeometric tau functions $\tau(t, T, t^*)$ as ∞ -soliton tau function in T variables. nlin.SI/0305001.
- [15] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 45.
- [16] M. Jimbo, T. Miwa. Publ. RIMS Kyoto Univ. 1983. V. 19. P. 943.
- [17] А. В. Михайлов. Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. С. 443.
- [18] K. Ueno, K. Takasaki. Adv. Stud. Pure Math. 1984. V. 4. P. 1.
- [19] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [20] K. Takasaki. Adv. Stud. Pure Math. 1984. V. 4. P. 139.
- [21] А. Ю. Орлов, Д. М. Щербин. ТМФ. 2001. Т. 128. № 1. С. 84.
- [22] I. G. Macdonald. Symmetric Functions and Hall Polynomials. Oxford: Clarendon Press, 1995.
- [23] A. Mironov. Seiberg–Witten theory and duality in integrable systems. Preprint FIAN-TD-29-00. Moscow: FIAN, 2003; ITEP-TH-63-00. Moscow: ITEP, 2000; hep-th/0011093.

- [24] Yu. Yu. Berest, I. M. Loutsenko. Commun. Math. Phys. 1997. V. 190. P. 113–132; solv-int/9704012; I. M. Loutsenko, V. Spiridonov. J. Statist. Phys. 2000. V. 99. P. 751; cond-mat/9909308.
- [25] L.-L. Chau, O. Zaboronsky. Commun. Math. Phys. 1998. V. 196. P. 203; hep-th/9711091.
- [26] L.-L. Chau, Y. Yu. Phys. Lett. A. 1992. V. 167. P. 452.
- [27] M. Mineev-Weinstein, P. Wiegmann, A. Zabrodin. Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5106.
- [28] А. В. Забродин. ТМФ. 2001. Т. 129. № 2. С. 239.
- [29] C. Itzykson, J. B. Zuber. J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 411.
- [30] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa. Transformation groups for soliton equations. In: Non-linear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory. Proc. RIMS. Symp. (Kyoto, Japan, May 13–16, 1981). Eds. M. Jimbo, T. Miwa. Singapore: World Scientific, 1983. P. 39.
- [31] А. Б. Муздал. ЖЭТФ. 1975. Т. 69. С. 810.
- [32] K. Saaidi, M. Khorrami. Eur. Phys. J. C. 2002. V. 23. P. 757; hep-th/0304204.
- [33] D. Lebedev, A. Orlov, S. Pakulyak, A. Zabrodin. Phys. Lett. A. 1991. V. 160. P. 166.
- [34] Y. V. Fyodorov, H.-J. Sommers. J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 3303; nlin.CD/0207051.
- [35] M. Adler, P. van Moerbeke. Adv. Math. 2004. V. 181. P. 190; math.CO/0110281.
- [36] N. Ya. Vilenkin, A. U. Klimyk. Representation of Lie Groups and Special Functions, Recent Advances. Kluwer Academic Publishers, 1995; S. C. Milne. Summation theorems for basic hypergeometric series of Schur function argument. In: Progress in Approximation Theory. Proc. Int. Conf. on Approximation Theory (Tampa, South Florida, USA, March 19–22, 1990). Comput. Math. V. 19. Eds. A. A. Gonchar, E. B. Saff. N. Y.: Springer, 1992. P. 51.

Поступила в редакцию 10.I.2004 г.,
после доработки 10.VI.2005 г.