Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Г. Степанов, Преобразование ренормализационной группы в фермионной модели, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 2, 251–266

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2034>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:55:45

© 2006 г.

Р. Г. Степанов*

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕНОРМАЛИЗАЦИОННОЙ ГРУППЫ В $2N$ -КОМПОНЕНТНОЙ ФЕРМИОННОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Изучается $2N$ -компонентная фермионная модель на иерархической решетке. Приводятся явные формулы для преобразования ренормгруппы в пространстве коэффициентов, задающих грасмановозначную плотность свободной меры. Вычислено обратное преобразование ренормгруппы. Определение неподвижных точек ренормгруппы сведено к решению системы алгебраических уравнений. Исследованы решения данной системы для $N = 1, 2, 3$. Для случая $\alpha = 1$ доказан аналог центральной предельной теоремы для фермионных $2N$ -компонентных полей. Обнаружена интересная связь между преобразованиями ренормгруппы в бозонной и фермионной иерархических моделях. Показано, что одно преобразование получается из другого заменой N на $-N$.

Ключевые слова: ренормализационная группа, N -компонентные фермионные поля, иерархические модели.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] изучалась четырехкомпонентная фермионная модель на иерархической решетке. Оказалось, что преобразование ренормализационной группы (РГ) Вильсона–Каданова в этой модели вычисляется явно и описывается рациональным отображением в пространстве констант связи. Это обстоятельство позволило дать глобальное описание динамики преобразования РГ для всех значений параметра РГ. В частности, были описаны все неподвижные точки РГ, их устойчивые инвариантные кривые, исследованы некоторые критические явления и симметрии преобразования РГ. В работе [3] рассматривалось обобщение фермионной иерархической модели на случай, когда число компонент спина равно $2N$, где N – произвольное натуральное число. Был предложен алгоритм для вычисления преобразования РГ и исследован вопрос о существовании негауссовской ветви неподвижных точек в окрестности тривиальной (гауссовской) неподвижной точки.

Заметим также, что иерархические модели статистической физики в импульсном представлении описываются p -адическими моделями теории поля [4], и могут изучаться методами p -адической квантовой теории поля.

*Казанский государственный университет, Казань, Россия. E-mail: rstepanov@mail.ru

В настоящей работе приводятся явные формулы для преобразования РГ в пространстве коэффициентов, задающих грассмановозначную плотность свободной меры в $2N$ -компонентной фермионной иерархической модели. Исследованы некоторые свойства этого преобразования, вычислено обратное преобразование РГ, исследована система алгебраических уравнений для неподвижной точки РГ. Для случая $\alpha = 1$ доказывается аналог центральной предельной теоремы для фермионных $2N$ -компонентных полей. Обнаружена интересная связь между преобразованиями РГ в бозонной и фермионных иерархических моделях. Оказалось, что одно преобразование получается из другого заменой N на $-N$.

Напомним некоторые определения, связанные с иерархической моделью. Пусть

$$V_{k,s} = \{j \in \mathbb{Z} : (k-1)n^s < j \leq kn^s\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad s \in \mathbb{Z},$$

где n – количество узлов в элементарном блоке иерархической решетки. Пусть $s(i, j)$ – минимальное s такое, что существует блок $V_{k,s}$, которому одновременно принадлежат вершины i и j . Иерархическое расстояние $d(i, j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, определяется следующим образом:

$$d(i, j) = \begin{cases} 0 & i = j, \\ n^{s(i, j)} & i \neq j. \end{cases}$$

Будем считать, что в каждом узле $j \in \mathbb{Z}$ определено N пар спинов:

$$\psi(j) = (\psi_1^+(j), \psi_1^-(j), \dots, \psi_N^+(j), \psi_N^-(j)),$$

при этом $\psi_k^+(j), \psi_k^-(j)$, $k = 1, \dots, N$, – образующие алгебры Грассмана. В дальнейшем мы будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} \psi^+(i) &= (\psi_1^+(i), \dots, \psi_N^+(i)), & \psi^-(i) &= (\psi_1^-(i), \dots, \psi_N^-(i)), \\ \psi^+(i)\psi^-(i) &= \psi_1^+(i)\psi_1^-(i) + \dots + \psi_N^+(i)\psi_N^-(i). \end{aligned}$$

Спин-блоковое преобразование РГ определяется формулой

$$\psi'(i) = n^{-\alpha/2} \sum_{j \in V_{i,1}} \psi(j), \quad (1)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$ – параметр ренормгруппы.

Обозначим через Λ_M блок $V_{1,M}$. Пусть A_M – грассманова подалгебра, соответствующая $2Nn^M$ образующим в блоке Λ_M . Ясно, что если поле Ψ определено в блоке Λ_M , то поле Ψ' определено в блоке Λ_{M-1} .

Известно, что гауссовское фермионное поле с нулевым средним и ковариационной функцией

$$\langle \psi_k^-(i), \psi_l^+(j) \rangle = \delta_{k,l} b(i, j), \quad k, l \in \{1, \dots, N\},$$

где

$$b(i, j) = \frac{1 - n^{1-\alpha}}{1 - n^{\alpha-2}} d^{\alpha-2}(i, j), \quad i \neq j, \quad b(i, i) = \frac{1 - n^{-1}}{1 - n^{\alpha-2}},$$

инвариантно относительно действия преобразования РГ [1]. Известно также, что в объеме Λ_M данное поле задается гауссовским гамильтонианом

$$H_{0,M}(\Psi) = \sum_{i,j \in \Lambda_M} d_{0,M}(i, j) \psi(i)^+ \psi(j)^-,$$

где

$$d_{0,M}(i, j) = d_0(i, j) - \frac{(1 - n^{\alpha-1})^2}{(1 - n^{-\alpha})(1 - n^{-1})} n^{-\alpha(M+1)},$$

$$d_0(i, j) = \frac{1 - n^{\alpha-1}}{1 - n^{-\alpha}}, \quad i \neq j, \quad d_0(i, i) = \frac{1 - n^{-1}}{1 - n^{-\alpha}}.$$

Рассмотрим $O(N)$ -симметричные негауссовские фермионные поля, в которых взаимодействие задано гауссовским гамильтонианом $H_{0,M}$, а плотность свободной меры имеет вид

$$f(\psi) = c_0 + \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{k!} (\psi^+ \psi^-)^k, \quad (2)$$

где $\psi = (\psi_1^+, \psi_1^-, \dots, \psi_N^+, \psi_N^-)$, $\psi_1^+, \psi_1^-, \dots, \psi_N^+, \psi_N^-$ — образующие алгебры Грассмана, $\psi^+ \psi^- = \sum_{k=1}^N \psi_k^+ \psi_k^-$.

Гиббсовское состояние (“среднее значение”) для $Q \in A_M$ определяется следующим образом:

$$\langle Q \rangle = Z_M^{-1} \int Q(\Psi) e^{-H_{0,M}(\Psi)} \prod_{j \in \Lambda_M} f(\psi(j)) d\Psi,$$

где

$$Z_M = \int e^{-H_{0,M}(\Psi)} \prod_{j \in \Lambda_M} f(\psi(j)) d\Psi, \quad d\Psi = \prod_{j \in \Lambda_M} \prod_{k=1}^N d\psi_k^+(j) d\psi_k^-(j).$$

Заметим, что если две плотности $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ отличаются лишь постоянным множителем, то они задают одно и тоже гиббсовское состояние, и такие плотности мы отождествляем. Поэтому набор коэффициентов $(c_0, \dots, c_N)$ мы рассматриваем как точку N -мерного проективного пространства.

ТЕОРЕМА 1. Пусть поле Ψ имеет плотность свободной меры $f(\psi)$. Тогда ренормированное поле Ψ' имеет плотность свободной меры $f'(\psi)$ вида

$$f'(\psi) = \exp(n^{\alpha-1} \psi^+ \psi^-) \int \exp(-in^{\alpha/2} \xi \psi) \left[\int \exp(-\phi^+ \phi^- + i\xi \phi) f(\phi) d\phi \right]^n d\xi, \quad (3)$$

где

$$\xi = (\xi_1^+, \xi_1^-, \dots, \xi_N^+, \xi_N^-), \quad \phi = (\phi_1^+, \phi_1^-, \dots, \phi_N^+, \phi_N^-),$$

$$\xi \psi = \sum_{k=1}^N (\xi_k^+ \psi_k^+ + \xi_k^- \psi_k^-), \quad \phi^+ \phi^- = \sum_{k=1}^N \phi_k^+ \phi_k^-,$$

$\xi_k^\pm$, $\phi_k^\pm$ — грассмановы образующие, $k = 1, \dots, N$. Интегралы понимаются как грассмановы интегралы по Березину.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \in A_{M-1}$. Гиббсовское состояние определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle = \text{const} \int Q(\Psi') \prod_{i \in \Lambda_{M-1}} \delta \left(n^{-\alpha/2} \sum_{j \in V_{i,1}} \psi(j) - \psi'(i) \right) \times \\ \times e^{-H_{0,M}(\Psi)} \prod_{j \in \Lambda_M} f(\psi(j)) d\Psi d\Psi', \end{aligned}$$

где $\delta(\psi)$ – грассманова дельта-функция,

$$\delta(\psi) = \int e^{i\xi\psi} d\xi = \prod_{k=1}^N \psi_k^+ \psi_k^-. \quad (4)$$

Сделаем замену переменных в интеграле по Ψ , а именно, введем переменные $\eta(j) = \psi(j) - n^{\alpha/2-1}\psi'(i)$, где $j \in V_{i,1}$. Нетрудно убедиться, что

$$\begin{aligned} n^{-\alpha/2} \sum_{j \in V_{i,1}} \psi(j) - \psi'(i) &= n^{-\alpha/2} \sum_{j \in V_{i,1}} \eta(j), \\ H_{0,M}(\Psi) &= H_{0,M-1}(\Psi') + \sum_{i \in \Lambda_{M-1}} \sum_{j \in V_{i,1}} \eta^+(j) \eta^-(j). \end{aligned}$$

Так как эта замена линейна, то якобиан замены влияет лишь на постоянный множитель перед интегралом. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \text{const} \int Q(\Psi') \exp \left(-H_{0,M-1}(\Psi') - \sum_{i \in \Lambda_{M-1}} \sum_{j \in V_{i,1}} \eta^+(j) \eta^-(j) \right) \times \\ &\times \prod_{i \in \Lambda_{M-1}} \delta \left(\sum_{j \in V_{i,1}} \eta(j) \right) \prod_{j \in \Lambda_M} f(\eta(j) + n^{\alpha/2-1}\psi'(i)) \prod_{j \in \Lambda_M} d\eta(j) d\Psi' = \\ &= \text{const} \int Q(\Psi') \exp(-H_{0,M-1}(\Psi')) \prod_{i \in \Lambda_{M-1}} \left(\int \delta \left(\sum_{j \in V_{i,1}} \eta(j) \right) \times \right. \\ &\times \exp \left(- \sum_{j \in V_{i,1}} \eta^+(j) \eta^-(j) \right) \prod_{j \in V_{i,1}} f(\eta(j) + n^{\alpha/2-1}\psi'(i)) \prod_{j \in V_{i,1}} d\eta(j) \Big) d\Psi' = \\ &= \text{const} \int Q(\Psi') \exp(-H_{0,M-1}(\Psi')) \prod_{i \in \Lambda_{M-1}} f'(\psi'(i)) d\Psi', \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f'(\psi) &= \int \delta \left(\sum_{j \in V_{1,1}} \eta(j) \right) \exp \left(- \sum_{j \in V_{1,1}} \eta^+(j) \eta^-(j) \right) \times \\ &\times \prod_{j \in V_{1,1}} f(\eta(j) + n^{\alpha/2-1}\psi) \prod_{j \in V_{1,1}} d\eta(j). \end{aligned} \quad (5)$$

Осталось показать, что формула (5) эквивалентна формуле (3). Используя (4),

получим

$$f'(\psi) = \int \exp\left(i \sum_{j \in V_{1,1}} \xi \eta(j) - \sum_{j \in V_{1,1}} \eta(j)^+ \eta(j)^-\right) \prod_{j \in V_{1,1}} f(\eta(j) + n^{\alpha/2-1} \psi) \times \\ \times \prod_{j \in V_{1,1}} d\eta(j) d\xi = \int \left(\int e^{i\xi \eta - \eta^+ \eta^-} f(\eta + n^{\alpha/2-1} \psi) d\eta \right)^n d\xi.$$

После замены $\eta = \phi - n^{\alpha/2-1} \psi$ получаем

$$f'(\psi) = \int \left[\int \exp(-\phi^+ \phi^- + n^{\alpha/2-1}(\phi^+ \psi^- + \psi^+ \phi^-) - \right. \\ \left. - n^{\alpha-2} \psi^+ \psi^- + i\xi \phi - n^{\alpha/2-1} i\xi \psi) f(\phi) d\phi \right]^n d\xi.$$

Сделаем замену $\xi'^+ = \xi^+ + i n^{\alpha/2-1} \psi^-$, $\xi'^- = \xi^- - i n^{\alpha/2-1} \psi^+$. Тогда

$$f'(\psi) = \exp(-n^{\alpha-1} \psi^+ \psi^-) \int \exp(-n^{\alpha/2} i(\xi'^+ \psi^+ + \xi'^- \psi^- + \\ + 2i n^{\alpha/2-1} \psi^+ \psi^-)) \left[\int \exp(-\phi^+ \phi^- + i\xi'^- \phi^- - i\phi^+ \xi'^+) f(\phi) d\phi \right]^n d\xi' = \\ = \exp(n^{\alpha-1} \psi^+ \psi^-) \int \exp(-i n^{\alpha/2} (\xi^+ \psi^+ + \xi^- \psi^-)) \times \\ \times \left[\int \exp(-\phi^+ \phi^- + i(\xi^+ \phi^+ + \xi^- \phi^-)) f(\phi) d\phi \right]^n d\xi,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(\psi)$ имеет вид (2), а $f'(\psi)$ определяется по формуле (3). Тогда $f'(\psi) = c'_0 + \sum_{k=1}^N c'_k (\psi^+ \psi^-)^k / k!$, где

$$c'_k = n^{(\alpha-1)k} \sum_{j=N-k}^N \binom{k}{N-j} n^{-j} \sum_{\substack{j_1+\dots+j_n=j \\ j_1, \dots, j_n \geq 0}} \frac{j!}{j_1! \dots j_n!} \times \\ \times \prod_{i=1}^n \left(\sum_{s=0}^{N-j_i} \binom{N-j_i}{s} c_s (-1)^{N-j_i-s} \right). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через F грассманово преобразование Фурье,

$$Ff(\psi) = \int e^{i\xi\psi} f(\xi) d\xi.$$

Заметим, что преобразование (3) является композицией преобразований,

$$f'(\psi) = T_4 \circ F \circ T_3 \circ T_2 \circ F \circ T_1 f(\psi),$$

где

$$T_1 f(\psi) = \exp(-\psi^+ \psi^-) f(\psi), \quad T_2 f(\psi) = f(\psi)^n, \\ T_3 f(\psi) = f(n^{-\alpha/2} \psi), \quad T_4 f(\psi) = \exp(n^{\alpha-1} \psi^+ \psi^-) f(\psi).$$

Вышеуказанным преобразованиям соответствуют следующие преобразования в проективном пространстве коэффициентов c_k , $k = 0, \dots, N$:

$$\begin{aligned} F : c'_k &= c_{N-k}, \\ T_1 : c'_k &= \sum_{j \leq k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} c_j, & T_2 : c'_k &= \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_n = k \\ j_1, \dots, j_n \geq 0}} \frac{k!}{j_1! \dots j_n!} \prod_{i=1}^n c_{j_i}, \\ T_3 : c'_k &= c_k n^{-\alpha k}, & T_4 : c'_k &= \sum_{j \leq k} \binom{k}{j} n^{(\alpha-1)(k-j)} c_j. \end{aligned}$$

Композиция данных преобразований приводит к формуле (6). Теорема доказана.

Используя известную комбинаторную формулу (при $j \geq 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_n = j \\ j_i \geq 0}} \frac{j!}{j_1! \dots j_n!} \prod_i x_{j_i} &= \\ &= \sum_{t=1}^j n^{[t]} \sum_{\substack{l_1 + 2l_2 + \dots + jl_j = j \\ l_1 + \dots + l_j = t}} \frac{j! x_0^{n-t}}{l_1! \dots l_j! 1!^{l_1} 2!^{l_2} \dots j!^{l_j}} \prod_{i=1}^j x_i^{l_i}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$n^{[t]} = n(n-1) \dots (n-t+1),$$

можно определить преобразование (6) не только для целых, но и для дробных значений n . Нетрудно убедиться, что если $n > N$ и выполняется условие

$$\sum_{s=0}^N \binom{N}{s} c_s (-1)^{N-s} = 0 \quad (8)$$

или эквивалентное условие

$$\int f(\psi) \exp(-\psi^+ \psi^-) d\psi = 0, \quad (9)$$

то в результате преобразования (6) коэффициенты c'_k станут равны нулю. Так как точка $(0, \dots, 0)$ не принадлежит проективному пространству, то в случае выполнения соотношения (8) или (9) считаем, что преобразование РГ не определено.

2. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕНОРМГРУППЫ

Обозначим через $R(\alpha, n)$ преобразование, задаваемое формулой (3).

ТЕОРЕМА 3. Преобразование $R(\alpha, n)$ обладает следующей симметрией относительно преобразования Фурье F :

$$R(\alpha, n)F = FR(2 - \alpha, n). \quad (10)$$

Доказательство проводится прямой проверкой.

ТЕОРЕМА 4. На множестве грассмановозначных плотностей $f(\psi)$ таких, что

$$\int f(\psi) \exp(-n^{\alpha-1} \psi^+ \psi^-) d\psi \neq 0, \quad (11)$$

преобразование $R(\alpha, n)$ имеет обратное преобразование $R^{-1}(\alpha, n)$, при этом

$$R^{-1}(\alpha, n) = T^{-1}(\alpha, n) R(\alpha, n^{-1}) T(\alpha, n),$$

где $T(\alpha, n)$ – линейный оператор, действующий по формуле

$$T(\alpha, n)f(\psi) = f(n^{(1-\alpha)/2}\psi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (3), получаем, что с точностью до постоянного множителя

$$\begin{aligned} f'(\psi) \exp(-n^{\alpha-1} \psi^+ \psi^-) &= \int \exp(-i\xi\psi) \times \\ &\times \left[\int \exp\left(-n^\alpha \phi^+ \phi^- + i\xi\phi\right) f(\phi n^{\alpha/2}) \right]^n d\xi. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье к обеим частям данного равенства и возводя их в степень n^{-1} , получим

$$\left[\int \exp(i\xi\psi - n^{\alpha-1} \psi^+ \psi^-) f'(\psi) d\psi \right]^{n^{-1}} = \int \exp(-n^\alpha \phi^+ \phi^- + i\xi\phi) f(\phi n^{\alpha/2}) d\phi.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(\phi n^{\alpha/2}) &= \exp(n^\alpha \phi^+ \phi^-) \int \exp(-i\xi\phi) \times \\ &\times \left[\int \exp(i\xi\psi - n^{\alpha-1} \psi^+ \psi^-) f'(\psi) d\psi \right]^{n^{-1}} d\xi, \\ f(\phi n^{(1-\alpha)/2}) &= \exp(\phi^+ \phi^- n^{1-\alpha}) \int \exp(-in^{-\alpha/2} \xi\phi) \times \\ &\times \left[\int \exp(i\xi\psi - \psi^+ \psi^-) f'(\psi n^{(1-\alpha)/2}) d\psi \right]^{n^{-1}} d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как

$$f(\phi n^{(1-\alpha)/2}) = T(\alpha, n)f(\psi), \quad f'(\psi n^{(1-\alpha)/2}) = T(\alpha, n)R(\alpha, n)f(\psi),$$

то из (3), (12) следует, что

$$\begin{aligned} T(\alpha, n)f(\psi) &= R(\alpha, n^{-1})T(\alpha, n)R(\alpha, n)f(\psi), \\ f(\psi) &= T^{-1}(\alpha, n)R(\alpha, n^{-1})T(\alpha, n)R(\alpha, n)f(\psi), \end{aligned}$$

а значит, $T^{-1}(\alpha, n)R(\alpha, n^{-1})T(\alpha, n) = R^{-1}(\alpha, n)$.

Преобразование $R(\alpha, n^{-1})$ определено при условии, что

$$\int f(\psi) \exp(-\psi^+ \psi^-) d\psi \neq 0.$$

Поэтому преобразование $T^{-1}(\alpha, n)R(\alpha, n^{-1})T(\alpha, n)$ определено при условии, что

$$\int T(\alpha, n)f(\psi) \exp(-\psi^+ \psi^-) d\psi \neq 0.$$

Легко видеть, что это условие эквивалентно (11). Теорема доказана.

Динамика преобразования РГ легко исследуется, если $\alpha = 1$. Заметим, что при этом значении α нормировка спина в преобразовании РГ Вильсона-Каданова (1) совпадает со стандартной нормировкой $n^{-1/2}$ в центральной предельной теореме. В нашей модели справедлива теорема, которую можно рассматривать как аналог центральной предельной теоремы для антикоммутирующих полей.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f(\psi)$ – некоторая плотность вида (2) и

$$\sum_{s=0}^N \binom{N}{s} c_s (-1)^{N-s} \neq 0.$$

Тогда в случае $\sum_{s=0}^{N-1} \binom{N-1}{s} c_s (-1)^{N-1-s} \neq 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(1, n)^k f(\psi) = \exp(b\psi^+ \psi^-),$$

где

$$b = 1 + \frac{\sum_{s=0}^N \binom{N}{s} c_s (-1)^{N-s}}{\sum_{s=0}^{N-1} \binom{N-1}{s} c_s (-1)^{N-1-s}}.$$

В случае $\sum_{s=0}^{N-1} \binom{N-1}{s} c_s (-1)^{N-1-s} = 0$ справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R(1, n)^k f(\psi) = \delta(\psi).$$

Сходимость грассмановозначной плотности понимается в смысле сходимости в проективном пространстве коэффициентов c_i , задающих $f(\psi)$ в виде (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u_j = \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} c_s (-1)^{j-s}$, $j = 0, \dots, N$. Нетрудно убедиться, что преобразование (6) при $\alpha = 1$ эквивалентно следующему преобразованию в пространстве коэффициентов u_j :

$$u'_{N-j} = n^{-j} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_n = j \\ j_1, \dots, j_n \geq 0}} \frac{j!}{j_1! \dots j_n!} \prod_{i=1}^n u_{N-j_i}.$$

В результате k -кратного применения данного преобразования коэффициенты примут вид

$$u_{N-j}^{(k)} = n^{-kj} \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_{n^k} = j \\ j_1, \dots, j_{n^k} \geq 0}} \frac{j!}{j_1! \dots j_{n^k}!} \prod_{i=1}^{n^k} u_{N-j_i}.$$

Используя формулу (7), получим, что

$$u_{N-j}^{(k)} = n^{-kj} \sum_{s=0}^j (n^k)^{[s]} \sum_{\substack{l_1+2l_2+\dots+jl_j=j \\ l_1+\dots+l_j=s}} \frac{j! u_N^{n^k - \sum_i l_i}}{l_1! \dots l_j! 1!^{l_1} 2!^{l_2} \dots j!^{l_j}} \prod_i u_{N-i}^{l_i}.$$

Предположим сначала, что $u_{N-1} \neq 0$. Так как по условию теоремы $u_N \neq 0$, то при $k \rightarrow \infty$ с точностью до константы, не зависящей от j ,

$$\begin{aligned} u_{N-j}^{(k)} &\sim n^{-kj} \sum_{s=0}^j n^{ks} \sum_{\substack{l_1+2l_2+\dots+jl_j=j \\ l_1+\dots+l_j=s}} \frac{j!}{l_1! \dots l_j! 1!^{l_1} 2!^{l_2} \dots j!^{l_j}} \prod_i \left(\frac{u_{N-i}}{u_N} \right)^{l_i} \sim \\ &\sim \sum_{\substack{l_1+2l_2+\dots+jl_j=j \\ l_1+\dots+l_j=j}} \frac{j!}{l_1! \dots l_j! 1!^{l_1} 2!^{l_2} \dots j!^{l_j}} \prod_i \left(\frac{u_{N-i}}{u_N} \right)^{l_i} = \left(\frac{u_{N-1}}{u_N} \right)^j. \end{aligned}$$

Так как $c_j = \sum_{t=0}^j \binom{j}{t} u_t$,

$$c_j^{(k)} = \sum_{t=0}^j \binom{j}{t} u_t^{(k)} \rightarrow \sum_{t=0}^j \binom{j}{t} \left(\frac{u_{N-1}}{u_N} \right)^{N-t} = \text{const} \left(1 + \frac{u_N}{u_{N-1}} \right)^j.$$

Следовательно, $c_j^{(k)} \rightarrow b^j$, где

$$b = 1 + \frac{\sum_{s=0}^N \binom{N}{s} c_s (-1)^{N-s}}{\sum_{s=0}^{N-1} \binom{N-1}{s} c_s (-1)^{N-1-s}}.$$

Тогда

$$R(1, n)^k f(\psi) = c_0^{(k)} + \sum_{k=1}^N c_k^{(k)} \frac{(\psi^+ \psi^-)^k}{k!} \rightarrow \exp(b \psi^+ \psi^-).$$

Теперь рассмотрим случай $u_{N-1} = 0$. Аналогично предыдущему случаю нетрудно установить, что $u_{N-j}^{(k)} \rightarrow \delta_{0,j}$ при $k \rightarrow \infty$, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Тогда

$$c_j^{(k)} = \sum_{t=0}^j \binom{j}{t} u_t^{(k)} \rightarrow \delta_{N,j}.$$

Следовательно,

$$R(1, n)^k f(\psi) = c_0^{(k)} + \sum_{k=1}^N c_k^{(k)} \frac{(\psi^+ \psi^-)^k}{k!} \rightarrow \frac{(\psi^+ \psi^-)^N}{N!} = \delta(\psi).$$

Теорема доказана.

3. НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РГ

Прямой подстановкой в (6) легко убедиться, что преобразование РГ имеет следующие две тривиальные неподвижные точки: гауссовскую неподвижную точку $f(\psi) = 1$, задаваемую вектором коэффициентов $c = (1, 0, \dots, 0)$, и грассманову δ -функцию $\delta(\psi) = (\psi^+ \psi^-)^N / N!$ с вектором коэффициентов $c = (0, \dots, 0, 1)$. Интерес представляют нетривиальные неподвижные точки РГ.

Для дальнейших рассуждений удобно сделать следующую замену:

$$g(\eta) = \int \exp(\sqrt{n^{\alpha-1} - 1}(\xi^+ \eta^+ + \xi^- \eta^-) - \xi^+ \xi^-) f(\xi) d\xi. \quad (13)$$

Нетрудно убедиться, что если $f(\psi)$ имеет вид (2), то

$$g(\eta) = w_0 + \sum_{k=1}^N \frac{w_k}{k!} (\eta^+ \eta^-)^k,$$

где коэффициенты w_k выражаются через коэффициенты c_k по формуле

$$w_j = (1 - n^{\alpha-1})^j \sum_{s=0}^{N-j} \binom{N-j}{s} c_s (-1)^{N-j-s}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (14)$$

В пространстве коэффициентов w_j преобразование РГ имеет вид

$$w'_t = \sum_{j=t}^N (-1)^{j-t} n^{\alpha(N-j)} \binom{N-t}{N-j} \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \frac{j!}{j_1! \dots j_n!} \prod_i^n w_{j_i}, \quad t = 0, \dots, N. \quad (15)$$

Система уравнений (15) эквивалентна системе

$$\sum_{j_1+\dots+j_n=j} \frac{j!}{j_1! \dots j_n!} \prod_i^n w_{j_i} = n^{\alpha j} \sum_{t=j}^N \binom{N-j}{N-t} w'_t, \quad j = 0, \dots, N. \quad (16)$$

В частности, при $j = 0$

$$w_0^n = \sum_{t=0}^N \binom{N}{N-t} w'_t. \quad (17)$$

Как обычно, мы рассматриваем только такие векторы c , для которых

$$\sum_{s=0}^N \binom{N}{s} c_s (-1)^{N-s} \neq 0.$$

Поэтому считаем, что $w_0 \neq 0$, $w'_0 \neq 0$. Поделив обе части (16) на w_0^n и используя (17), получим, что

$$\sum_{j_1+\dots+j_n=j} \frac{j!}{j_1! \dots j_n!} \prod_i^n \frac{w_{j_i}}{w_0} = n^{\alpha j} \frac{\sum_{t=j}^N \binom{N-j}{N-t} w'_t / w'_0}{\sum_{t=0}^N \binom{N}{N-t} w'_t / w'_0}.$$

Используя формулу (7) и полагая $v_j = w_j/w_0$, получим следующую систему алгебраических уравнений для неподвижной точки РГ относительно неизвестных $(v_1, \dots, v_N)$ (j изменяется от 1 до N):

$$\sum_{t=1}^j n^{[t]} \sum_{\substack{l_1+2l_2+\dots+jl_j=j \\ l_1+\dots+l_j=t}} \frac{j!}{l_1! \dots l_j! 1!^{l_1} 2!^{l_2} \dots j!^{l_j}} \prod_i v_i^{l_i} = n^{\alpha j} \frac{\sum_{t=j}^N \binom{N-j}{N-t} v_t}{1 + \sum_{t=1}^N \binom{N}{t} v_t}. \quad (18)$$

Тривиальным решением данной системы, соответствующим грассмановой δ -функции, является решение $v_j = 0$, $j = 1, \dots, N$. Гауссовской неподвижной точке соответствует решение $v_j = (n^{\alpha-1} - 1)^j$, $j = 1, \dots, N$.

ПРИМЕР 1. При $N = 1$ система (18) состоит из одного уравнения

$$nv_1 = n^{\alpha} \frac{v_1}{1 + v_1}.$$

Как легко видеть, решениями данного уравнения являются лишь тривиальные точки $v_1 = 0$ и $v_1 = n^{\alpha-1} - 1$.

ПРИМЕР 2. При $N = 2$ система (18) имеет вид

$$\begin{aligned} nv_1 &= n^{\alpha} \frac{v_1 + v_2}{1 + 2v_1 + v_2}, \\ nv_2 + n(n-1)v_1^2 &= n^{2\alpha} \frac{v_2}{1 + 2v_1 + v_2}. \end{aligned}$$

Кроме двух тривиальных решений $v_j = 0$ и $v_j = (n^{\alpha-1} - 1)^j$, эта система имеет ровно два нетривиальных решения

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{n^{\alpha-1/2} + 1}{n^{1/2} - 1}, & v_2 &= -(n^{1/2} + 1) \frac{n^{\alpha-1/2} + 1}{n^{1/2} - 1}, \\ v_1 &= \frac{n^{\alpha-1/2} - 1}{n^{1/2} + 1}, & v_2 &= (n^{1/2} - 1) \frac{n^{\alpha-1/2} - 1}{n^{1/2} + 1}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. При $N = 3$ система (18) имеет вид

$$\begin{aligned} nv_1 &= n^{\alpha} \frac{v_1 + 2v_2 + v_3}{1 + 3v_1 + 3v_2 + v_3}, \\ nv_2 + n(n-1)v_1^2 &= n^{2\alpha} \frac{v_2 + v_3}{1 + 3v_1 + 3v_2 + v_3}, \\ nv_3 + 3n(n-1)v_1v_2 + n(n-1)(n-2)v_1^3 &= n^{3\alpha} \frac{v_3}{1 + 3v_1 + 3v_2 + v_3}. \end{aligned}$$

На рисунке представлен график зависимости вещественных решений v_1 при $N = 3$, $n = 4$ от параметра $a = n^{\alpha-1}$. Ось абсцисс соответствует тривиальному решению $v_1 = 0$. По определению параметр a принимает только положительные значения, однако для полноты картины на графике рассматриваются и отрицательные значения a .

следовательно решая уравнения системы (20), находя сначала x_1 , затем x_2 и т.д. и исключая “ложные” решения, получим множество решений системы (19). Для получения такой системы можно воспользоваться методом результат или определить базис Гребнера [5].

Покажем, что система (18) имеет нетривиальные решения, совпадающие с нулевым решением в точках $\alpha = 1/2, \dots, 1/N$.

Введем обозначение

$$T_j(v) = \sum_{t=1}^j n^{[t]} \sum_{\substack{l_1+2l_2+\dots+jl_j=j \\ l_1+\dots+l_j=t}} \frac{j!}{l_1! \dots l_j! 1!^{l_1} 2!^{l_2} \dots j!^{l_j}} \prod_i v_i^{l_i}.$$

Система (18) принимает вид

$$n^{-\alpha j} T_j(v) \left(1 + \sum_{t=1}^N \binom{N}{t} v_t \right) = \sum_{t=j}^N \binom{N-j}{N-t} v_t.$$

В силу тождества

$$\sum_{j=s}^N \binom{N-s}{N-j} (-1)^{j-s} \sum_{t=j}^N \binom{N-j}{N-t} v_t \equiv v_s$$

получаем

$$v_s = \left(1 + \sum_{t=1}^N \binom{N}{t} v_t \right) \sum_{j=s}^N \binom{N-s}{N-j} (-1)^{j-s} n^{-\alpha j} T_j(v) = A_s(v) \quad (21)$$

(мы ввели обозначение A для оператора, соответствующего правой части первого равенства в (21)). Ясно, что множество неподвижных точек оператора A совпадает с множеством решений системы (21).

Нетрудно убедиться, что в неподвижной точке $(0, \dots, 0)$ дифференциал оператора A задается следующей матрицей:

$$\left. \frac{\partial A_s}{\partial v_k} \right|_{v=0} = \binom{N-s}{N-k} (-1)^{k-s} n^{1-\alpha k}.$$

Так как при $k < s$ выполняется равенство $\binom{N-s}{N-k} = 0$, то данная матрица имеет треугольный вид, и собственными числами дифференциала являются значения на главной диагонали $n^{1-\alpha}, n^{1-2\alpha}, \dots, n^{1-N\alpha}$.

Отсюда заключаем, что значения $\alpha = 1, 1/2, \dots, 1/N$ являются точками бифуркации. При $\alpha = 1$ происходит пересечение тривиальной ветви $(0, \dots, 0)$, соответствующей грассмановой δ -функции, и тривиальной гауссовской ветви $(n^{\alpha-1} - 1, \dots, (n^{\alpha-1} - 1)^N)$. В точках $\alpha = 1/2, \dots, 1/N$ происходит бифуркация негауссовских ветвей неподвижных точек.

Рассмотрим поведение нетривиальных неподвижных точек РГ при $\alpha \rightarrow 1$. Из (14) получим, что

$$c_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} w_{N-j} (1 - n^{\alpha-1})^{j-N} = w_0 (1 - n^{\alpha-1})^{-N} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} v_{N-j} (1 - n^{\alpha-1})^j.$$

Рассмотрим такое нетривиальное решение $v(\alpha)$, непрерывное в точке $\alpha = 1$, что $v_N(1) \neq 0$. Для любых $k_1, k_2 \in \{0, \dots, N\}$ при $\alpha \rightarrow 1$

$$\frac{c_{k_1}(\alpha)}{c_{k_2}(\alpha)} = \frac{\sum_{j=0}^{k_1} \binom{k_1}{j} v_{N-j}(\alpha) (1 - n^{\alpha-1})^j}{\sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{j} v_{N-j}(\alpha) (1 - n^{\alpha-1})^j} \rightarrow \frac{v_N(1)}{v_N(1)} = 1.$$

Таким образом, $\lim_{\alpha \rightarrow 1} c(\alpha) = (1, 1, \dots, 1)$ в проективном пространстве коэффициентов c_k . Нетрудно убедиться, что в случае $N = 2, 3$ для любого нетривиального решения $v(\alpha)$ условие непрерывности $v(\alpha)$ при $\alpha = 1$, также как и условие $v_N(1) \neq 0$, выполнено. Следовательно, при $N = 2, 3$ все нетривиальные решения $c(\alpha)$ стремятся при $\alpha \rightarrow 1$ к точке $(1, 1, \dots, 1)$. Заметим, что в данной точке преобразование РГ не определено, так как выполнено (8).

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ФЕРМИОННОЙ И БОЗОННОЙ МОДЕЛЯМИ

Известно, что действие преобразования РГ на плотность свободной меры $f(y)$ в бозонной иерархической $2N$ -компонентной модели имеет вид

$$f'(y) = \exp(n^{\alpha-1} y^2 / 2) \int \exp(-in^{\alpha/2} y k) \left[\int \exp(ikz - z^2 / 2) f(z) dz \right]^n dk, \quad (22)$$

где $y, z, k \in \mathbb{R}^{2N}$ (см., например, [6]). С целью получения более компактных формул сделаем в бозонной модели замену, аналогичную замене (13), положив

$$g(y) = \int \exp\left(yx\sqrt{n^{\alpha-1}-1} - \frac{x^2}{2}\right) f(x) dx.$$

Нетрудно убедиться, что после такой замены преобразование РГ примет вид

$$g'(x) = \int \exp\left(-\frac{(x - zn^{\alpha/2})^2}{2}\right) g^n(z) dz. \quad (23)$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть $g(x)$, $x \in \mathbb{R}^{2N}$, имеет разложение вида

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k (x^2/2)^k}{k!}.$$

Тогда

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w'_k (x^2/2)^k}{k!},$$

где

$$w'_t = \sum_{j=t}^{\infty} \frac{n^{\alpha(-N-j)}}{(j-t)!} \prod_{l=0}^{j-t-1} (N+t+l) \sum_{j_1+\dots+j_n=j} \frac{j!}{j_1! \dots j_n!} \prod_i^n w_{j_i}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через T линейный оператор, действующий на $h(x)$ по формуле

$$Th(x) = (2\pi)^{-N} \int \exp\left(-\frac{(x - zn^{\alpha/2})^2}{2}\right) h(z) dz.$$

Тогда преобразование (23) с точностью до постоянного множителя может быть записано как

$$g'(x) = Tg^n(x).$$

Пусть $h_y(x) = e^{yx^2/2}$. Легко видеть, что

$$Th_y(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2} \frac{y}{n^\alpha - y}\right) (n^\alpha - y)^{-N} = \sum_{t \geq 0} \frac{(x^2/2)^t}{t!} \frac{y^t}{(n^\alpha - y)^{t+N}}.$$

Отсюда

$$T\left(\frac{x^2}{2}\right)^j = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^j Th_y(x) \Big|_{y=0} = \sum_{t \leq j} \frac{(x^2/2)^t}{t!} \frac{j! n^{\alpha(-N-j)}}{(j-t)!} \prod_{l=0}^{j-t-1} (N+l+t).$$

Так как $g^n(x) = \sum_{j \geq 0} u_j (x^2/2)^j / j!$, где

$$u_j = \sum_{j_1 + \dots + j_n = j} \frac{j!}{j_1! \dots j_n!} \prod_i^n w_{j_i},$$

то

$$\begin{aligned} g'(x) &= Tg^n(x) = \sum_{j \geq 0} \frac{u_j}{j!} T\left(\frac{x^2}{2}\right)^j = \sum_{j \geq 0} u_j \sum_{t \leq j} \frac{(x^2/2)^t}{t!} \frac{n^{\alpha(-N-j)}}{(j-t)!} \times \\ &\times \prod_{l=0}^{j-t-1} (N+l+t) = \sum_{t \geq 0} \frac{(x^2/2)^t}{t!} \sum_{j \geq t} \frac{n^{\alpha(-N-j)}}{(j-t)!} \prod_{l=0}^{j-t-1} (N+l+t) \times \\ &\times \sum_{j_1 + \dots + j_n = j} \frac{j!}{j_1! \dots j_n!} \prod_i^n w_{j_i}. \end{aligned}$$

Обозначив в данном выражении коэффициент, стоящий при $(x^2/2)^t/t!$, через w'_t , получаем формулу (24). Теорема доказана.

Заметим, что так как

$$(-1)^{j-t} \binom{N-t}{N-j} = \frac{1}{(j-t)!} \prod_{l=0}^{j-t-1} (-N+t+l)$$

и при $j > N$ выполняется равенство

$$\binom{N-t}{N-j} = 0,$$

то формула (24) переходит в формулу (15) при замене N на $-N$.

Таким образом, преобразование РГ в фермионной $2N$ -компонентной модели формально совпадает с преобразованием РГ в бозонной $(-2N)$ -компонентной модели. Если мы будем строить ε -разложение неподвижной точки РГ в фермионной и бозонной $2N$ -компонентных моделях, то коэффициенты ε -разложений в этих моделях совпадут с точностью до замены N на $-N$.

Благодарности. В заключение хочу поблагодарить профессора М. Миссарова за полезное обсуждение рассмотренных проблем. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-01-00610).

Список литературы

- [1] *E. Yu. Lerner, M. D. Missarov.* J. Stat. Phys. 1994. V. 76. № 3/4. P. 805–817.
- [2] *М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1996. Т. 109. № 1. С. 3–16; 1998. Т. 117. № 3. С. 471–488; 1999. Т. 118. № 1. С. 40–50; *Р. З. Даутов, М. Д. Миссаров.* ТМФ. 2001. Т. 126. № 2. С. 238–246.
- [3] *Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1994. Т. 101. № 2. С. 282–293.
- [4] *Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1989. Т. 78. № 2. С. 248–257; *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов.* p -Адитивский анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [5] *В. В. Прасолов.* Многочлены. М.: МЦНМО, 1999.
- [6] *М. Д. Миссаров, Р. Г. Степанов.* ТМФ. 2004. Т. 139. № 2. С. 268–275.

Поступила в редакцию 8.II.2005 г.