Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Зиновьев, С. В. Молодцов, Инстантон в поле точечного источника евклидова неабелева поля, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 2, 267–298

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 15:32:54

© 2006 г.

Г. М. Зиновьев*, С. В. Молодцов†

ИНСТАНТОН В ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ЕВКЛИДОВА НЕАБЕЛЕВА ПОЛЯ

Рассматривается поведение (анти)инстантона в поле точечного источника евклидова неабелева поля. Исследуются деформации (анти)инстантона, описываемые с помощью вариации характеризующих его параметров. Формулируется вариационная задача поиска соответствующих “измятых” топологических конфигураций, которая решается затем алгебраически с помощью метода Ритца (посредством мультипольного разложения полей деформаций). Исследуется область параметров, характерных для модели инстантонной жидкости. Предлагается простой способ приближенного учета вклада в функциональный интеграл подобных конфигураций. В рамках суперпозиционного анзаца получена оценка средней энергии источника в инстантонной жидкости, которая линейно увеличивается с расстоянием. В случае диполя в синглетном по цвету состоянии энергия оказывается линейной функцией расстояния между источниками с коэффициентом “натяжения”, вполне согласующимся с имеющимися модельными и решеточными оценками.

Ключевые слова: инстантон, внешнее поле, приближенное решение, деформации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Значительный всплеск интереса к классической теории неабелевых полей связан с открытием инстантонов, в результате которого стало понятно, что уже в области низких энергий мог бы реализоваться своеобразный сценарий квазиклассического приближения [1]. В нем классические решения уравнений Янга–Миллса с нетривиальной топологией ((анти)инстантоны) играют определяющую роль в формировании вакуума квантовой хромодинамики (КХД). Предполагается, что константа связи в этой области “замораживается” примерно на масштабе среднего размера инстантонов, а в качестве адекватного насыщающего континуальный интеграл ансамбля принимается жидкость (газ) случайно ориентированных в цветовом пространстве и однородно распределенных по четырехмерному евклидову пространству

*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина

†Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия; Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: molodtsov@itep.ru

(анти)инстантонов. Поля кварков находятся под воздействием этого фонового поля, которое в конечном итоге и определяет все “наблюдаемые” величины: глюонный и киральный конденсаты, динамическую массу кварка, константу пионного распада и т.д.

Настоятельная потребность в углубленном изучении квазиклассического приближения при вычислении производящего функционала КХД продиктована также современными исследованиями фазы цветной сверхпроводимости, которая, как полагают, возникает при больших плотностях кварковой/барионной материи [2]. Оценки, базирующиеся на модели инстантонной жидкости (ИЖ) [3], дают парадоксально низкое значение для критической плотности перехода кварковой материи в состояние цветного сверхпроводника, меньше или порядка плотности кварков в нормальных нуклонах. Если же применить модель ИЖ, учитывающую ее возбуждения, то, как было показано ранее [4], критическая плотность перехода может стать столь высокой, что генерируемые кварками кулоновские поля вследствие малости межкварковых расстояний уже могут стать сравнимыми с инстантонными. Это заставляет усомниться в применимости простой модели ИЖ, в которой игнорируется влияние, оказываемое на псевдочастицы сторонними полями.

В настоящей работе мы сосредоточимся на задаче, являющейся одним из необходимых составных элементов при построении более реалистичной модели ИЖ в области больших кварковых/барионных плотностей и имеющей также отношение к описанию проникновения цветного поля в ИЖ. Мы изучим поведение (анти)инстантона в поле точечного евклидова источника цветового заряда и ограничимся при этом теоретико-полевой постановкой задачи, принимая во внимание, что в квазиклассическом приближении таким способом учитываются самые старшие вклады. Помимо описания членов взаимодействия источника и псевдочастицы, которые изучались еще в пионерских работах об инстантонном вакууме [1], мы постараемся ответить на вопрос, что же происходит с самой псевдочастицей при наличии внешнего воздействия. На наш взгляд, ключевой здесь может оказаться проблема описания деформаций полей-решений. Хотя исследование взаимодействий псевдочастиц имеет очень давнюю историю [5], [6], на сегодняшний день, несмотря на многочисленные усилия, мы все еще далеки от построения исчерпывающей картины. В такой ситуации нам представляется разумным построить теорию возмущений, связанную с самим нетривиальным топологическим решением, варьируя описывающие его параметры. В случае псевдочастиц такие конфигурации передают их нетривиальные топологические свойства и вместе с тем чувствительны к наличию возмущающих факторов. Обсуждая эту узкую задачу, мы сформулируем некоторый (отчасти новый) метод изучения взаимодействий частицеподобных решений полевых уравнений и предложим эффективный способ приближенного вычисления континуального интеграла с взаимодействующими псевдочастицами. Даже в рамках такой постановки задача об (анти)инстантоне в поле точечного цветового источника обнаруживает неожиданно богатый спектр взаимодействий и интересна вне контекста ИЖ. Мы увидим, что псевдочастицу можно рассматривать в качестве “поставщика” полей самой различной природы: скалярного поля; поля, несущего цветные индексы,

похожего по своим свойствам на калибровочное поле, и других тензорных полей. Мы полагаем, что скалярную компоненту можно считать естественным претендентом на роль переносчика взаимодействий в области мягких импульсов [7], а поле с цветовыми индексами, по-видимому, имеет самое прямое отношение к описанию экранирования цветового источника в инстантонной среде. Работа построена следующим образом. В разделе 2 обсуждается постановка задачи и метод ее решения. В разделе 3 проводится классификация вкладов деформаций в полное действие источника и инстантона и предлагается приближенная схема нахождения деформаций псевдочастиц, которая реализуется в разделе 4. В разделе 5 приводятся численные результаты и исследуется обобщенная постановка задачи поиска деформаций с наложенными связями. В разделе 6 дан анализ полученных результатов и рассмотрены некоторые приложения к модели ИЖ.

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ИНСТАНТОНОВ

Конкретизируя постановку задачи, положим, что в точке $\mathbf{z}_e$ расположен покоящийся точечный евклидов источник цветового поля интенсивности e , “ориентированный” по третьей оси цветового (изотопического) пространства. Плотность тока в этом случае имеет вид $j_\mu^a = (\mathbf{0}, e\delta^{a3}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{z}_e))$, где $\mathbf{x}$, $\mathbf{z}_e$ – 3-векторы, $\mu = 1, 2, 3, 4$ (как и все греческие индексы). Мы ограничиваемся только случаем группы $SU(2)$, и, следовательно, групповой индекс пробегает значения $a = 1, 2, 3$ (как и все латинские индексы). Фиксация положения точечного источника является калибровочно-инвариантной процедурой, в отличие от фиксации его ориентации в цветовом пространстве. Для того чтобы избавиться от этого недостатка, решение, как известно, должно характеризоваться полной энергией и полным “изоспином” системы, поскольку эти величины являются калибровочными инвариантами и, кроме того, сохраняются [8]. Прежде всего напомним, что создаваемое точечной частицей поле в четырехмерном пространстве, вообще говоря, выглядит конусоподобным, с острием, лежащим в месте возникновения частицы. По мере удаления от острия в ближней к частице зоне поле носит установившийся характер, и его можно описать, скажем, кулоновским решением. В дальней зоне поле проникает в первоначально свободную от сигналов область, и для него следует применять запаздывающее решение, удовлетворяющее, в частности, лоренцевской калибровке. Мы в этой работе будем интересоваться поведением псевдочастицы только в области уже установившегося поля. Для простоты влиянием инстантона на цветовой источник пренебрегаем, хотя надо отметить, что в неабелевом случае в полностью самосогласованной постановке задачи следует учитывать также и возможное изменение его ориентации в цветовом пространстве, как это проанализировано на примере с двумя цветовыми зарядами в работе [9] (см. также [10]). Однако, принимая во внимание то, что инстантон обладает заметным короткодействием (порядка размера псевдочастицы), будем полагать, что на этом масштабе поле источника не успевает перестроиться существенным образом. В конце работы нам будет нетрудно написать и обобщение уравнения для поиска поля точечного источника в самосогласованном виде, но его анализ мы отложим до следующей работы, где будут обсуждаться поляризационные свойства ИЖ.

Стоит все же упомянуть, что приближение неподвижного источника в известной степени применимо только по отношению к тяжелым кваркам.

Действие для калибровочного поля A_μ^a при наличии источника записывается в виде

$$S = \int dx \left(\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a + j_\mu^a A_\mu^a \right), \quad (1)$$

где напряженность поля представляется как

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2)$$

ε^{abc} – полностью антисимметричный тензор, g – константа связи неабелева поля. Воспользуемся теперь тем, что вдали от источника цветового поля хорошо определено решение уравнений Янга–Миллса, отвечающее отдельному (анти)инстантону, например, в сингулярной калибровке, которое характеризуется координатой центра псевдочастицы z , ориентацией в цветовом пространстве ω^{ab} и размером ρ :

$$A_\mu^a(x) = \frac{2}{g} \omega^{ab} \bar{\eta}_{b\mu\nu} \frac{\rho^2}{y^2 + \rho^2} \frac{y_\nu}{y^2}, \quad (3)$$

где $y = x - z$, $\bar{\eta}_{b\mu\nu}$ – символ 'т Хоофта (для антиинстантона $\bar{\eta} \rightarrow \eta$). Когда расстояние между точечным источником и центром инстантона велико по сравнению с размером псевдочастицы $\Delta \gg \rho$ ($\Delta = |\Delta|$, $\Delta = z - z_e$), тривиальная суперпозиция

$$A_\mu^a = B_\mu^a(x) + A_\mu^a(x) \quad (4)$$

поля точечного источника, которое мы для простоты будем рассматривать только в простейшей калибровке,

$$B_\mu^a(x) = (0, \delta^{a3} \varphi), \quad \varphi = \frac{e}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{z}_e|}, \quad (5)$$

и поля (анти)инстантона (3), является хорошим приближением к истинному решению. Для запаздывающего решения выполняется калибровочное условие Лоренца $\partial_\mu B_\mu^a = 0$ (аналогично и для поля инстантона). В области установившегося поля оно, в частности, справедливо и для кулоновского решения (5). Выражения написаны в евклидовом виде, и наш выбор переменных для поля и заряда при переходе от пространства Минковского дается следующими заменами: $B_0 \rightarrow iB_4$, $e \rightarrow -ie$. При этом последний переход можно рассматривать как следствие замен, производимых со спинорными полями $\psi \rightarrow \hat{\psi}$, $\bar{\psi} \rightarrow -i\hat{\psi}^\dagger$, $\gamma_0 \rightarrow \gamma_4$, где спиноры со шляпками отвечают евклидову случаю. Евклидовы источники будут генерировать поля той же самой природы, что и поля, встречающиеся при решении задачи о квантовании поля инстантона, где $A = A_{\text{inst}} + a_{\text{qu}}$, а a_{qu} – глюонные поля флуктуаций.

Зафиксируем размер псевдочастицы и ее ориентацию в “изотопическом” пространстве на большом расстоянии от источника и попытаемся найти ее более оптимальную (цветную) конфигурацию, исследуя функциональное пространство в окрестности (анти)инстантона при уменьшении расстояния. Для этого рассмотрим конфигурации вида (3), в которых размер (анти)инстантона и его ориентация в

“изотопическом” пространстве могут варьироваться как функции центра псевдочастицы, т.е. $\rho \rightarrow R(x, z)$, $\omega^{ab} \rightarrow \Omega^{ab}(x, z)$. Понятно, что, сделав эту подстановку в суперпозиционном анзаце (4), можно получить вариационную задачу об определении полей деформаций $R(x, z)$, $\Omega(x, z)$, оптимизирующих действие (1), с граничным условием спадания деформаций при $\Delta \rightarrow \infty$. В итоге можно прийти к некоторой сложной системе дифференциальных уравнений, которая, вообще говоря, исследуется численными методами. При такой постановке задачи мы, разумеется, не можем претендовать на охват всего соответствующего функционального пространства, однако этого оказывается вполне достаточно, чтобы построить адекватную теорию возмущений. Принципиальной трудностью в реализации указанной схемы может оказаться то обстоятельство, что из-за почти сингулярного поведения (анти)инстантонного решения коэффициенты при старших производных для полей деформации $R(x, z)$ и $\Omega(x, z)$ будут сильно подавлены вне псевдочастицы. Это, как известно, не только заметно усложняет процесс поиска решений системы дифференциальных уравнений, но иногда делает его практически невозможным. Однако эта же особенность в поведении решения для псевдочастицы подсказывает и естественный способ обхода указанной трудности, заключающийся в использовании простой процедуры Рунге вместо метода сеток. В данном конкретном случае эта процедура может быть реализована в виде мультипольного разложения, например, для размера (анти)инстантона:

$$\begin{aligned} R_{\text{in}}(x, z) &= \rho + c_\mu y_\mu + c_{\mu\nu} y_\mu y_\nu + \dots, & |y| \leq L, \\ R_{\text{out}}(x, z) &= \rho + d_\mu \frac{y_\mu}{y^2} + d_{\mu\nu} \frac{y_\mu y_\nu}{y^2} + \dots, & |y| > L \end{aligned} \quad (6)$$

(аналогично для ориентации инстантона в “изотопическом” пространстве $\Omega(x, z)$), где L – некоторый параметр, определяющий радиус сферы, на котором растущее с расстоянием мультипольное разложение заменяется на падающее исходя из требования регулярности деформаций. Следует заметить, что формально для классического глюонного поля с включенным внешним воздействием не существует стабильного инстантонного решения, поскольку в действии (1) появляются вклады типа $\Lambda \rho^2$, нарушающие масштабную инвариантность теории (где Λ – некий размерный параметр). Как следствие, уменьшая размер псевдочастицы, можно всякий раз уменьшать действие системы. На практике же мы имеем дело с квантовым ансамблем псевдочастиц, в котором вследствие учета петлевых поправок инстантоны малых размеров имеют большое действие за счет уменьшения константы связи (напомним, действие псевдочастицы $\sim 8\pi^2/g^2$). Существенная трудность, как известно, связана с псевдочастицами большого (а не малого) размера. Мы в этой работе будем предполагать, что она разрешена в рамках одного из предлагаемых сценариев (стабилизации самого насыщающего ансамбля [11], замораживания константы связи [12], влияния конфайнирующей компоненты, впервые рассмотренного в [13]), хотя в классической теории, чтобы иметь дело со стабильной конфигурацией, на систему нужно наложить дополнительные связи [14]. В нашем случае условие связи формулируется очень просто, асимптотический размер псевдочастицы ρ в шаблоне (6) фиксирован и определяется средним значением по ансамблю $\bar{\rho}$ (в п. 6.1 $\bar{\rho}(z)$).

Если рассматривать теорию возмущений не старше второго порядка малости, то коэффициенты $c_\mu, c_{\mu\nu}, \dots$ и $d_\mu, d_{\mu\nu}, \dots$, а также параметр L определяются минимизацией соответствующей квадратичной формы, вытекающей из (1): $\delta S = 0$; граничными условиями на бесконечности, а также условиями сшивки “in”- и “out”-параметров на сфере $|y| = L$. Забегая вперед, скажем, что поле инстантона (в сингулярной калибровке) служит настолько сильным регуляризатором, что, исследуя члены второго порядка малости по отклонениям от ρ и ω , правомочно пользоваться только полями R_{in} и Ω_{in} , пренебрегая уточнениями, вносимыми R_{out} и Ω_{out} , т.е. формально можно рассматривать предел $L \gg \rho$ ($L \rightarrow \infty$). Интересуясь, как говорилось выше, “стационарной” цилиндрически-симметричной в четырехмерном пространстве картиной, надо исключить в ответе зависимость от “временной” координаты x_4 , т.е. следует использовать только индексы 1, 2, 3 в коэффициентах мультипольного разложения (6). При этом ясно, что конечный результат будет зависеть только от расстояния между соответствующими трехмерными компонентами векторов центра инстантона и положения источника, которое далее будем обозначать как Δ , надеясь, что это не вызовет путаницы. Отметим, что принимаемое нами условие для поиска деформаций $\delta S = 0$ дает самые старшие входящие в экспоненту производящего функционала вклады. В этом смысле можно сказать, что оно выступает в качестве простейшего уравнения долин в квазиклассическом приближении. Последующие члены должны учитывать петлевые вклады (так называемые квантовые взаимодействия). В предшествующих работах [13], [14] влияние внешнего воздействия рассматривалось в приближении среднего поля. С одной стороны, такой подход позволял не вдаваться в подробности, характеризующие внешнее поле – результирующий ответ был функцией соответствующих средних. Но с другой стороны, при этом совершенно стираются детали, связанные с реакцией псевдочастицы на “открытый” цвет. Кроме того, в нашем случае мы исследуем функциональное пространство в окрестности нетривиального топологического решения, не налагая ограничения целочисленности топологического заряда. Конфигурация, следуя условию $\delta S = 0$, должна сама подстраиваться некоторым наивыгоднейшим образом. Вглядываясь в шаблон (6), образно можно сказать, что на северном и южном полюсах псевдочастица может иметь как бы различные размер и цветовую ориентацию. Это дает нам основание называть подобные конфигурации “измятыми”. Отметим, что предшествующие исследования в основном сосредоточивались на нахождении профиля топологических конфигураций с целым зарядом. В нашем случае мы пытаемся изучить реакцию нетривиальной топологической конфигурации в самом ее центре. При этом конфигурация может формально иметь нецелый топологический заряд. Однако стоит подчеркнуть, что речь идет всего лишь о вычислении по теории возмущений; для более глубокого понимания этого вопроса требуется привлечение более серьезных математических методов.

Выполним описанную выше программу на примере дипольных членов разложения (6), обозначив их как

$$\delta\rho = \delta_\mu \rho y_\mu, \quad \delta\omega = \delta_\mu \omega y_\mu, \quad R = \rho + \delta\rho, \quad \Omega = \omega + \delta\omega. \quad (7)$$

Для деформированного инстантона с точностью до членов второго порядка малости по $\delta\rho$ вместо (3) будем иметь

$$A_\mu^a \simeq A_\mu^a(\Omega, \rho) + \frac{\partial A_\mu^a(\Omega, \rho)}{\partial R} \Delta R + \frac{\partial^2 A_\mu^a(\Omega, \rho)}{\partial R \partial R} \frac{(\Delta R)^2}{2}, \quad (8)$$

где $\Delta R = R - \rho$. Подставляя в выражение (2) суперпозицию полей $B_\mu^a + A_\mu^a$, запишем напряженность поля $G_{\mu\nu}^a$ в виде

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &= G_{\mu\nu}^a(B) + G_{\mu\nu}^a(A) + G_{\mu\nu}^a(A, B), \\ G_{\mu\nu}^a(A, B) &= g\varepsilon^{abc}(B_\mu^b A_\nu^c - A_\mu^b B_\nu^c), \end{aligned} \quad (9)$$

где $G_{\mu\nu}^a(A)$ и $G_{\mu\nu}^a(B)$ определены как в (2). Квадрат напряженности глюонного поля представляется как сумма

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a &= G_{\mu\nu}^a(B) G_{\mu\nu}^a(B) + G_{\mu\nu}^a(A) G_{\mu\nu}^a(A) + G_{\mu\nu}^a(A, B) G_{\mu\nu}^a(A, B) + \\ &+ 2G_{\mu\nu}^a(B) G_{\mu\nu}^a(A) + 2G_{\mu\nu}^a(B) G_{\mu\nu}^a(A, B) + 2G_{\mu\nu}^a(A) G_{\mu\nu}^a(A, B). \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем, анализируя это выражение, мы не будем использовать приближение слабого фонового поля из-за сингулярной природы как поля инстантона, так и точечного источника. Затруднительно также опираться на простую физическую интерпретацию [15] большого количества членов взаимодействия, возникающих в задаче.

Ненулевой компонентой для напряженности поля от точечного источника является

$$G_{4i}^a(B) = \frac{e}{4\pi} \delta^{a3} \frac{y_i + \Delta_i}{|\mathbf{y} + \mathbf{\Delta}|^3}.$$

Напряженность поля, генерируемую только инстантоном, можно представить как

$$G_{\mu\nu}^a(A) = \hat{G}_{\mu\nu}^a(A) + \Delta G_{\mu\nu}^a(A), \quad (11)$$

при этом первое слагаемое выглядит как напряженность поля инстантона, но с варьируемыми параметрами:

$$\hat{G}_{\mu\nu}^a(A) = -\frac{4}{g} \Omega^{ak} M_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} \bar{\eta}_{k\alpha\beta} \frac{R^2}{(y^2 + R^2)^2},$$

где $M_{\mu\alpha} = \delta_{\mu\alpha} - 2y_\mu y_\alpha / y^2$, а поправочный член представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta G_{\mu\nu}^a(A) &= \frac{\partial A_\nu^a(\Omega, R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y_\mu} - \frac{\partial A_\mu^a(\Omega, R)}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y_\nu} + \frac{\partial A_\nu^a(\Omega, R)}{\partial \Omega^{bc}} \frac{\partial \Omega^{bc}}{\partial y_\mu} - \frac{\partial A_\mu^a(\Omega, R)}{\partial \Omega^{bc}} \frac{\partial \Omega^{bc}}{\partial y_\nu} + \\ &+ \frac{4}{g} [\varepsilon^{abc} (\omega^{bm} \delta \omega^{cn} - \omega^{bn} \delta \omega^{cm} + \delta \omega^{bm} \omega^{cn}) - \delta \omega^{ak} \varepsilon^{kmn}] \bar{\eta}_{m\mu\alpha} \bar{\eta}_{n\nu\beta} \frac{R^4}{(y^2 + R^2)^2} \frac{y_\alpha y_\beta}{y^4}. \end{aligned}$$

Смешанная компонента глюонного поля имеет вид

$$G_{4i}^a(A, B) = 2 \frac{e}{4\pi} \varepsilon^{a3c} \Omega^{ck} \bar{\eta}_{k i \alpha} \frac{y_\alpha}{y^2} \frac{R^2}{(y^2 + R^2)} \frac{1}{|\mathbf{y} + \mathbf{\Delta}|}.$$

В силу выбора калибровки другие вклады в $G_{\mu\nu}^a(A, B)$ отсутствуют. Напомним, что в этой работе мы будем пользоваться теорией возмущений с напряженностью поля, разложенной по $\delta\rho$ и $\delta\omega$ вплоть до членов второго порядка малости включительно.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ВКЛАДОВ ДЕФОРМАЦИЙ В ПОЛНОЕ ДЕЙСТВИЕ

Первый член в сумме (10) для нас интереса не представляет, а вычисление действия со вторым слагаемым приводит к следующей поправке к действию одного инстантона с зависящей от полей деформаций квадратичной формой типа кинетической энергии:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{kin}} = & \int dx \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a(A) G_{\mu\nu}^a(A) - \beta = \frac{\kappa}{2} (\delta_\mu \rho)^2 + \frac{\sigma_{\mu\nu}^{kl}}{2} \delta_\mu \omega^{ak} \delta_\nu \omega^{al} + \\
 & + \frac{\sigma_3}{2} \varepsilon^{kmn} \varepsilon^{abc} \omega^{bm} \delta_\mu \omega^{ak} \delta_\mu \omega^{cn} + \frac{\sigma_4}{2} \bar{\eta}_{m\mu\nu} \varepsilon^{abc} (\omega^{bm} \delta_\nu \omega^{cn} - \omega^{bn} \delta_\nu \omega^{cm}) \delta_\mu \omega^{an} + \\
 & + \frac{\sigma_5}{2} \omega^{am} \omega^{cn} \delta_\mu \omega^{am} \delta_\mu \omega^{cn} + \tilde{v}_{\mu\nu}^{al} \delta_\mu \omega^{al} \delta_\nu \rho,
 \end{aligned} \tag{12}$$

с коэффициентами-тензорами

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \frac{9}{10} \beta, & \sigma_{\mu\nu}^{kl} &= \sigma_1 \delta_{\mu\nu} \delta_{kl} + \sigma_2 \varepsilon_{klm} \bar{\eta}_{m\mu\nu}, \\
 \tilde{v}_{\mu\nu}^{al} &= \omega^{ak} v_{\mu\nu}^{kl}, & v_{\mu\nu}^{kl} &= v_1 \delta_{\mu\nu} \delta_{kl} + v_2 \varepsilon_{klm} \bar{\eta}_{m\mu\nu}, \\
 \sigma_1 &= \frac{23}{24} \beta \rho^2, & \sigma_2 &= -\frac{3}{8} \beta \rho^2, & \sigma_3 &= -2v_1 \rho, \\
 \sigma_4 &= 2v_2 \rho, & \sigma_5 &= \frac{4}{3} v_2 \rho, & v_1 &= \frac{7}{24} \beta \rho, & v_2 &= \frac{1}{8} \beta \rho,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где $\beta = 8\pi^2/g^2$ – действие одного (анти)инстантона.

Похожий на S_{kin} оператор встречается при описании полей флуктуаций в окрестности выделенного классического решения $A = A_{\text{cl}} + a_{\text{qu}}$:

$$S = S(A_{\text{cl}}) + \int dx a_{\text{qu}} \mathcal{L}(A_{\text{cl}}) a_{\text{qu}} = S(A_{\text{cl}}) + \sum_k \lambda_k \xi_k^2, \tag{14}$$

где λ_k – собственные значения оператора $\mathcal{L}$, ξ_k – коэффициенты разложения поля $a_{\text{qu}} = \sum_k \xi_k \psi_k$ по полному набору ортогональных собственных функций ψ_k этого оператора. С этой точки зрения найденная нами форма (12) описывает в квадратичном по отклонениям приближении параметрическую зависимость собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{L}$ в нашем частном случае от коэффициентов разложения (6) $(\partial \lambda_k / \partial c_\mu, \partial \psi_k / \partial c_\mu, \dots)$. Таким способом мы резервируем возможность учета в функциональном интеграле вклада регулярной компоненты, индуцируемой воздействующим на инстантон внешним полем, не обращаясь при этом к плохо определенной функции Грина для инстантона.

При выводе формул (13) и последующих соотношений полезны два справедливых в случае группы $SU(2)$ свойства:

$$\omega^{ab} \omega^{ac} = \delta^{bc}, \quad \varepsilon^{abc} \omega^{a\alpha} \omega^{b\beta} \omega^{c\gamma} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}. \tag{15}$$

Вычисляя поправку к действию одного инстантона, разобьем ее на сумму двух компонент: члена типа кинетической энергии S_{kin} и члена взаимодействия S_{int} (игнорируя, естественно, сингулярный вклад в действие, связанный только с точечным

источником):

$$S - \beta = S_{\text{kin}} + S_{\text{int}}. \quad (16)$$

В свою очередь, взаимодействие S_{int} разложим на сумму трех слагаемых:

$$S_{\text{int}} = S_{\text{int}}^{\kappa} + S_{\text{int}}^d + S_{\text{int}}^{\delta}. \quad (17)$$

Смысл каждого из них будет пояснен ниже. Мы приведем только результат вычислений, опуская все промежуточные выкладки, которые носят рутинный характер и требуют не столько изобретательности, сколько упорства. Интересно отметить, что формально медленно убывающие слагаемые в разложении напряженности поля (11) будут приводить к интегрируемому результату при умножении на поле инстантона $G_{\mu\nu}^a(\rho, \omega)$ (см. ниже формулу (23)).

3.1. Квадратичные члены, зависящие от расстояния до источника. В первое слагаемое формулы (17) соберем квадратичные по $\delta\rho$, $\delta\omega$ члены, описывающие зависимость кинетических коэффициентов от расстояния Δ :

$$\begin{aligned} S_{\text{int}}^{\kappa} = & \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \omega^{3k} \bar{\eta}_{k4l} \Sigma_{lij} \delta_i \rho \delta_j \rho + \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 (\delta_{kl} - \omega^{3k} \omega^{3l}) (\delta_{kl} Q_{ij} - \bar{\eta}_{k4m} \bar{\eta}_{l4n} R_{mni j}) \delta_i \rho \delta_j \rho - \\ & - \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \bar{\eta}_{k4m} (\bar{\eta}_{lin} S_{jmn} + \bar{\eta}_{lmn} T_{nij}) \varepsilon^{a3b} \delta_i \omega^{ak} \delta_j \omega^{bl} - \\ & - \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \varepsilon^{a3b} \bar{\eta}_{k4m} \bar{\eta}_{lnc} Z_{mci jn} \delta_i \omega^{ak} \delta_j \omega^{bl} + \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \varepsilon^{a3c} \bar{\eta}_{kl\alpha} \bar{\eta}_{m4\beta} \bar{\eta}_{nl\gamma} \Phi_{\alpha\beta\gamma ji} \times \\ & \times [\varepsilon^{abd} (\omega^{bm} \delta_i \omega^{dn} - \omega^{bn} \delta_i \omega^{dm}) - \varepsilon^{dmn} \delta_i \omega^{ad}] \delta_j \omega^{ck} + \\ & + \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 (\delta_{kl} U_{ij} - \bar{\eta}_{k4m} \bar{\eta}_{l4n} V_{ijmn}) (\delta_i \omega^{ak} \delta_j \omega^{al} - \delta_i \omega^{3k} \delta_j \omega^{3l}) + \\ & + \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \bar{\eta}_{k4l} \Psi_{ilj} \delta_i \omega^{3k} \delta_j \rho + \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} [(\bar{\eta}_{l4m} \bar{\eta}_{kmn} - \bar{\eta}_{k4m} \bar{\eta}_{lmn}) W_{ijn} + \\ & + (\bar{\eta}_{l4m} \bar{\eta}_{kjn} - \bar{\eta}_{k4m} \bar{\eta}_{ljn}) X_{mni} + 2 \bar{\eta}_{l4m} \bar{\eta}_{kin} X_{mnj}] \omega^{ak} \varepsilon^{a3b} \delta_i \omega^{bl} \delta_j \rho + \\ & + \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \varepsilon^{a3c} \omega^{ck} \bar{\eta}_{kl\alpha} \bar{\eta}_{m4\beta} \bar{\eta}_{nl\gamma} \Theta_{\alpha i \beta \gamma j} \times \\ & \times [\varepsilon^{abd} (\omega^{bm} \delta_i \omega^{dn} - \omega^{bn} \delta_i \omega^{dm}) - \varepsilon^{dmn} \delta_i \omega^{ad}] \delta_j \rho + \\ & + \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \bar{\eta}_{c4k} \bar{\eta}_{dln} \Xi_{knijl} [\varepsilon^{3ab} (\omega^{ac} \delta_i \omega^{bd} - \omega^{ad} \delta_i \omega^{bc}) - \varepsilon^{acd} \delta_i \omega^{3a}] \delta_j \rho. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку мы рассматриваем влияние на инстантон установившегося кулоновского поля, в приведенной формуле задействованы только пространственные индексы у полей деформации $\delta_\mu \rho$, $\delta_\mu \omega$. Явные, но достаточно громоздкие выражения для компонент тензор-функций даны в работе [16]. Здесь для нас будут интересны только их асимптотические значения при $\Delta \rightarrow \infty$. Сами функции удобно записывать в безразмерном виде, заменяя все расстояния по правилу $\Delta_i/\rho \rightarrow \Delta_i$. Члены порядка

$O((\delta\rho)^2)$ построены из трех тензоров: тензора третьего ранга

$$\begin{aligned}\Sigma_{ijk} &= \delta_{ij}\hat{\Delta}_k\Sigma_1 + \delta_{ik}\hat{\Delta}_j\Sigma_2 + \delta_{jk}\hat{\Delta}_i\Sigma_3 + \hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_k\Sigma_4, \\ \Sigma_1 &\simeq -2\pi^2, \quad \Sigma_2 \simeq 2\pi^2, \quad \Sigma_3 \simeq \frac{49\pi^2}{3}\frac{\ln\Delta}{\Delta^2}, \quad \Sigma_4 \simeq 0,\end{aligned}$$

где $\hat{\Delta}_i = \Delta_i/\Delta$ – единичный вектор; полностью симметричного тензора второго ранга

$$Q_{ij} = \delta_{ij}Q_1 + \hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_jQ_2 \quad (19)$$

с компонентами

$$Q_1 \simeq 6\pi^2\frac{\ln\Delta}{\Delta^2}, \quad Q_2 \simeq 0;$$

а также полностью симметричного тензора четвертого ранга

$$\begin{aligned}R_{ijkl} &= (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})R_1 + (\delta_{ij}\hat{\Delta}_k\hat{\Delta}_l + \delta_{ik}\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_l + \delta_{il}\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_k + \\ &+ \delta_{kl}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j + \delta_{jl}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_k + \delta_{jk}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_l)R_2 + \hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_k\hat{\Delta}_lR_3\end{aligned} \quad (20)$$

с компонентами

$$R_1 \simeq \pi^2\frac{\ln\Delta}{\Delta^2}, \quad R_2 \simeq 0, \quad R_3 \simeq 0.$$

Если компонента какого-либо тензора мала по сравнению с главным членом асимптотики и не обсуждается в тексте, мы для простоты будем записывать, что она приблизительно равна нулю, не приводя ее действительного асимптотического вида. Все тензор-функции, за исключением компонент Σ_1, Σ_2 тензора Σ_{ijk} , убывают с расстоянием. Наличие этих ненулевых асимптотик (Σ) при $\Delta \rightarrow \infty$ мы обязаны вкладу интерференционного члена, возникающего от произведения напряженности поля от источника $G_{4i}^a(B)$ и компоненты $G_{4i}^a(A)$ второго порядка малости по $(\delta\rho)^2$. Это поведение обусловлено тем, что мы используем подстановку, в которой параметр сшивки для растущих и убывающих мультипольных полей $L \gg \rho$.

Далее выпишем коэффициенты для членов порядка $O((\delta\omega)^2)$. Они построены из двух полностью симметричных тензоров третьего ранга – тензора S :

$$S_{ijk} = (\delta_{ij}\hat{\Delta}_k + \delta_{ik}\hat{\Delta}_j + \delta_{jk}\hat{\Delta}_i)S_1 + \hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_kS_2, \quad (21)$$

с компонентами

$$S_1 \simeq -\frac{\pi^2}{3}\frac{\ln\Delta}{\Delta^2}, \quad S_2 \simeq 0,$$

и тензора T , аналогичного (21) и имеющего компоненты

$$T_1 \simeq -\frac{\pi^2}{2}\frac{\ln\Delta}{\Delta^2}, \quad T_2 \simeq 0.$$

Далее, имеется тензор пятого ранга Z :

$$\begin{aligned}Z_{ijklm} &= [\hat{\Delta}_i(\delta_{jk}\delta_{lm} + \delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{kl}) + \hat{\Delta}_j(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{kl}) + \\ &+ \hat{\Delta}_k(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}) + \hat{\Delta}_l(\delta_{ij}\delta_{km} + \delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk})]Z_1 + \\ &+ \hat{\Delta}_m(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})Z_2 + \hat{\Delta}_m[\delta_{ij}\hat{\Delta}_k\hat{\Delta}_l + \delta_{ik}\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_l + \delta_{il}\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_k + \\ &+ \delta_{jk}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_l + \delta_{jl}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_k + \delta_{kl}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j]Z_3 + [\delta_{im}\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_k\hat{\Delta}_l + \delta_{jm}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_k\hat{\Delta}_l + \\ &+ \delta_{km}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_l + \delta_{lm}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_k]Z_4 + \hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_k\hat{\Delta}_l\hat{\Delta}_mZ_5,\end{aligned} \quad (22)$$

компоненты которого не имеют особенностей и стремятся к нулю при $\Delta \rightarrow \infty$. Кроме того, присутствует полностью симметричный тензор пятого ранга Φ вида, аналогичного Z , с компонентами $\Phi_1 = \Phi_2$, $\Phi_3 = \Phi_4$. В приложении к работе [16] первые две компоненты обозначены как Φ_1 , две другие – как Φ_2 и, наконец, компонента Φ_5 обозначена как Φ_3 . В отличие от тензора Z , компонента тензора Φ с двумя “временными” индексами ($\Phi_{4\beta 4ji}$) дает отличный от нуля вклад в член типа кинетической энергии. В приложении к работе [16] даны две нетривиальные компоненты этой конструкции вида (21), которые обозначены как $\Phi_{1,2}^{44}$. Аналогично тензору Z тензор Φ не имеет особенностей при $\Delta \rightarrow \infty$. Следующие слагаемые построены из полностью симметричного тензора второго ранга U вида (19) с компонентами

$$U_1 \simeq \pi^2 \frac{\ln \Delta}{\Delta^2}, \quad U_2 \simeq 0,$$

и, наконец, из полностью симметричного тензора четвертого ранга V вида (20) с компонентами

$$V_1 \simeq -\frac{\pi^2 \ln \Delta}{4 \Delta^2}, \quad V_2 \simeq 0, \quad V_3 \simeq 0.$$

В отличие от дилатационного слагаемого Σ в члене типа кинетической энергии (18), в слагаемом, связанном с вращениями в “изотопическом” пространстве, все промежуточные сингулярные вклады компенсируются, и в результате тензор убывает с расстоянием.

Для смешанных вкладов порядка $O(\delta\rho\delta\omega)$ снова получается тензор с компонентой, выходящей на константу:

$$\begin{aligned} \Psi_{ijk} &= (\delta_{ij}\hat{\Delta}_k + \delta_{jk}\hat{\Delta}_i)\Psi_1 + \delta_{ik}\hat{\Delta}_j\Psi_2 + \hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_k\Psi_3, \\ \Psi_1 &\simeq 0, \quad \Psi_2 \simeq 0, \quad \Psi_3 \simeq 4\pi^2 \end{aligned}$$

(особенность в третьей компоненте связана с членом jA действия (1)), а также имеются два полностью симметричных тензора третьего ранга W и X вида (21) с компонентами

$$W_1 \simeq -2\pi^2 \frac{\ln \Delta}{\Delta^2}, \quad W_2 \simeq 0; \quad X_1 \simeq -\frac{4\pi^2 \ln \Delta}{3 \Delta^2}, \quad X_2 \simeq 0.$$

Кроме того, имеется полностью симметричный тензор пятого ранга Θ , построенный аналогично тензору Φ , с такими же нетривиальными компонентами ($\Theta_{1,2,3}$, $\Theta_{1,2}^{44} = \Theta_{4i\beta 4j}$). Наконец, тензор пятого ранга Ξ имеет вид (22). Оба тензора Θ и Ξ не имеют особенностей при $\Delta \rightarrow \infty$.

Собирая все полученные асимптотики вместе для дополнительного вклада в кинетическую энергию при $\Delta \rightarrow \infty$, с логарифмической точностью получим

$$S_{\text{int}}^\kappa \rightarrow \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} 2\pi^2 \omega^{3k} \bar{\eta}_{k4l} (-\hat{\Delta}_j \delta_{li} + \hat{\Delta}_i \delta_{lj}) \delta_i \rho \delta_j \rho = 0, \quad (23)$$

т.е. наличие особенностей у компонент тензоров не сказывается на наблюдаемых и, следовательно, упрощенная процедура Ритца с параметром сшивки $L \rightarrow \infty$ вполне применима.

Рис. 1. Сравнение вкладов S_{kin} и S_{int}^{κ} для псевдочастицы как функций пути, проходимого по оси x . Две верхние (в окрестности начала координат) кривые показывают S_{kin} , две нижние – S_{int}^{κ} ; сплошные линии отвечают инстантону, штриховые – антиинстантону. Источник e ориентирован по третьей оси “изотопического” пространства.

Полный анализ деформаций псевдочастицы, включающий вклад члена S_{int}^{κ} (18), довольно сложен, но оказывается, что для параметров, которые интересны с точки зрения приложений к модели ИЖ ($\beta = 8\pi^2/g^2 \simeq 12 \div 18$) [17], можно предложить приближенную процедуру поиска оптимальных деформаций. Обратимся к рис. 1, где сравниваются вклады S_{kin} и S_{int}^{κ} для инстантона как функции пути, проходимого по оси x . Для действия инстантона положено $\beta = 18$. Интенсивность источника взята равной константе связи $e = g$, а матрица вращения определяется с помощью вектора $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$, задающего направление вращения псевдочастицы в “изотопическом” пространстве на угол φ :

$$\omega^{ab} = n_a n_b + P_{ab} \cos \varphi - \varepsilon_{abc} n_c \sin \varphi, \quad (24)$$

где $P_{ab} = \delta_{ab} - n_a n_b$ – проекционный оператор. В обсуждаемом примере $\varphi = \pi/2$. Если вкладом S_{int}^{κ} пренебречь в сравнении с S_{kin} , то для деформаций $\delta\rho$, $\delta\omega$ можно получить явные формулы (см. ниже (33)). Как видно из рис. 1, применение этого приближения вполне оправдано на малых расстояниях от источника как для инстантона, так и для антиинстантона. В области порядка размера инстантона вклад S_{int}^{κ}

для антиинстантона формально велик, но в этом случае вклад члена типа кинетической энергии мал в сравнении с S_{int}^δ и решение в целом носит не только качественный характер. Отметим, что на всех приводимых ниже рисунках параметры матрицы вращения и путь будут такими же, как и на рис. 1.

Рис. 2. Сравнение вкладов в энергию взаимодействия S_{int} . Две верхние (в окрестности начала координат) кривые показывают S_{int}^d , две нижние – S_{int}^δ . Сплошные кривые отвечают инстантону, штриховые – антиинстантону.

3.2. Взаимодействие недеформированного инстантона. Теперь обратимся к следующим членам взаимодействия в формуле (17). Второе слагаемое зависит напрямую только от асимптотического размера и ориентации инстантона ρ , ω^{ak} и описывает взаимодействие с точечным источником недеформированного инстантона

$$S_{\text{int}}^d = \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \bar{\eta}_{k4i} \omega^{3k} I_i + \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 J + \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 K_{kl} \omega^{3k} \omega^{3l}, \quad (25)$$

причем интересно отметить, что первое слагаемое обусловлено целиком только членом jA в действии (1) с вектор-функцией вида

$$I_i = 8\pi^2 \Delta_i (D^{-1} - \Delta^{-1}),$$

где $D^2 = \Delta^2 + 1$. Вклады в S_{int}^d для хромоэлектрических и хромомагнитных полей в двух слагаемых

$$2G_{\mu\nu}^a(B)G_{\mu\nu}^a(A) + 2G_{\mu\nu}^a(A)G_{\mu\nu}^a(A, B) \quad (26)$$

после взятия интеграла взаимно сокращаются. Если же считать поле инстантона слабым на фоне кулоновского и оставить только первое слагаемое, то можно получить

$$\frac{1}{4} \int dx 2G_{\mu\nu}^a(B)G_{\mu\nu}^a(A) = \frac{e}{4\pi} \frac{8\pi^2}{g} \bar{\eta}_{k4i} \omega^{3k} \frac{\Delta_i}{\Delta^2} (2D^3 - 2\Delta^3 - 3D + D^{-1}).$$

Устремляя теперь $\Delta \rightarrow \infty$, придем к хорошо знакомому результату для дипольного взаимодействия инстантона с внешним полем:

$$\frac{1}{4} \int dx 2G_{\mu\nu}^a(B)G_{\mu\nu}^a(A) \rightarrow \frac{2\pi^2}{g} \bar{\eta}_{k4i} \omega^{3k} E_i,$$

если осуществим переход к пространству Минковского, приняв во внимание выбор переменных для поля и источника (см. замечание после формулы (5)), а также вернем размерные переменные. Вектор E_i обозначает поле источника:

$$E_i = \frac{e}{4\pi} \frac{\Delta_i}{\Delta^3}.$$

Функция

$$J = 2 \int dy \frac{2y^2 - \mathbf{y}^2}{y^4(y^2 + 1)^2 |\mathbf{y} + \mathbf{\Delta}|^2}$$

и тензор

$$K_{kl} = 2 \int dy \frac{y_k y_l}{y^4} \frac{1}{(y^2 + 1)^2 |\mathbf{y} + \mathbf{\Delta}|^2}$$

не интегрируются в элементарных функциях, и проще всего их получить с помощью численного интегрирования. Здесь же приведем их асимптотики при $\Delta \rightarrow \infty$:

$$J \simeq \frac{5\pi^2}{2} \frac{1}{\Delta^2},$$

а для компонент тензора второго ранга вида (19) имеем

$$K_1 \simeq \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{\Delta^2}, \quad K_2 \simeq 0.$$

Отметим теперь, что при действии одного инстантона $\beta = 18$ и интенсивности источника $e = g$ вклад членов, пропорциональных e^2 в формуле (25), на малых расстояниях ($\Delta \leq 1$) заметно больше вклада первого слагаемого, что можно наблюдать, если обратиться, например, к кривой для S_{int}^d на рис. 2. Если бы вклад первого диполеподобного члена в (25) был ведущим, то штриховая линия, соответствующая антиинстантону, была бы целиком развернута в отрицательную область. В конце работы мы приведем еще один очень интересный результат, связанный с медленным убыванием обсуждаемых функций в применении к ИЖ.

3.3. Линейные деформации. Однако наибольший интерес для нас в этой работе представляют члены взаимодействия, позволяющие находить оптимальные деформации псевдочастицы. Они определяются линейными по $\delta\rho$ и $\delta\omega$ слагаемыми, которые представим в следующей форме:

$$S_{\text{int}}^{\delta} = \Lambda_n \delta_n \rho + M_n^{ak} \delta_n \omega^{ak}, \quad (27)$$

где

$$\Lambda_n = \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \bar{\eta}_{k4i} \omega^{3k} A_{in} + \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 B_n + \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 \omega^{3k} \omega^{3l} C_{knl}. \quad (28)$$

Компоненты тензоров даны в приложении к работе [16], а здесь приведем только их асимптотику на больших расстояниях. Так, для тензора второго ранга A вида (19) имеем

$$A_1 \simeq -2\pi^2 \frac{1}{\Delta}, \quad A_2 \simeq 16\pi^2 \frac{1}{\Delta};$$

для вектор-функции B_i , натянутой на единичный вектор $\hat{\Delta}$, можно получить

$$B_i = \hat{\Delta}_i B, \quad B \simeq -\frac{28\pi^2 \ln \Delta}{3 \Delta^3};$$

для двух компонент тензора третьего ранга C вида (21) –

$$C_1 \simeq -\frac{4\pi^2 \ln \Delta}{3 \Delta^3}, \quad C_2 \simeq 0.$$

Наконец, слагаемое, связанное с вращением в “изотопическом” пространстве в формуле (27), определяется через тензор-функцию

$$\begin{aligned} M_n^{ak} = & \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \bar{\eta}_{k4i} D_{in} \delta^{a3} - \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \varepsilon^{a3c} \omega^{cl} (\bar{\eta}_{k4m} \bar{\eta}_{lni} E_{mi} + \bar{\eta}_{k4j} \bar{\eta}_{ljm} F_{mn}) + \\ & + \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} [\varepsilon^{a3b} \omega^{bc} (\bar{\eta}_{c4j} \bar{\eta}_{kil} - \bar{\eta}_{k4j} \bar{\eta}_{cil}) - \delta^{a3} \varepsilon^{kbc} \bar{\eta}_{b4j} \bar{\eta}_{cil}] H_{jlni} + \\ & + \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} [(\omega^{ab} \omega^{3c} - \delta^{3a} \delta^{bc}) \delta^{kl} - (\omega^{ab} \omega^{3l} - \delta^{3a} \delta^{lb}) \delta^{kc} - \\ & - \varepsilon^{a3d} \omega^{db} \varepsilon^{kcl}] \bar{\eta}_{bi\alpha} \bar{\eta}_{c4\gamma} \bar{\eta}_{li\delta} Y_{\alpha n \gamma \delta} + \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 (\omega^{al} - \omega^{3l} \delta^{a3}) (O_n \delta_{kl} - P_{lkn}). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь в асимптотике $\Delta \rightarrow \infty$ можно получить: для двух компонент тензора третьего ранга D вида (21) –

$$D_1 \simeq 0, \quad D_2 \simeq 8\pi^2 \frac{1}{\Delta};$$

для компонент тензоров E и F вида (21) –

$$E_1 \simeq \pi^2 \frac{1}{\Delta}, \quad E_2 \simeq 0, \quad F_1 \simeq 2\pi^2 \frac{1}{\Delta}, \quad F_2 \simeq 0;$$

для вектор-функции –

$$O_i = \hat{\Delta}_i O, \quad O \simeq -4\pi^2 \frac{\ln \Delta}{\Delta^3},$$

для компонент последнего тензора третьего ранга P вида (21) –

$$P_1 \simeq -\frac{2\pi^2}{3} \frac{1}{\Delta}, \quad P_2 \simeq -\frac{8\pi^2}{3} \frac{1}{\Delta}.$$

Тензор четвертого ранга H имеет вид

$$H_{ijkl} = (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})H_1 + (\delta_{ij}\hat{\Delta}_k\hat{\Delta}_l + \delta_{ik}\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_l + \delta_{jk}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_l)H_2 + \\ + (\delta_{il}\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_k + \delta_{kl}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j + \delta_{jl}\hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_k)H_3 + \hat{\Delta}_i\hat{\Delta}_j\hat{\Delta}_k\hat{\Delta}_l H_4$$

с асимптотиками компонент

$$H_1 \rightarrow -\frac{13}{36} \frac{\pi^2}{\Delta^3}, \quad H_2 \rightarrow -\frac{53}{12} \frac{\pi^2}{\Delta^3}, \quad H_3 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{\Delta^3}, \quad H_4 \rightarrow -\frac{5}{2} \frac{\pi^2}{\Delta^3}.$$

Для “пространственных” компонент полностью симметричного тензора четвертого ранга Y вида (20) можно получить

$$Y_1 \rightarrow \frac{1}{6} \frac{\pi^2}{\Delta}, \quad Y_2 \rightarrow 0, \quad Y_3 \rightarrow 0.$$

Кроме того, отличен от нуля вклад этого тензора с двумя “временными” индексами Y_{4ij4} вида (19), компоненты которого обозначим как $Y_{1,2}^{44}$, причем в асимптотике $\Delta \rightarrow \infty$

$$Y_1^{44} \rightarrow \frac{1}{6} \frac{\pi^2}{\Delta}, \quad Y_2^{44} \rightarrow \frac{33}{16} \frac{\pi^2}{\Delta}.$$

Принимая во внимание явный вид Λ_n (28) и M_n^{ak} (29), легко видеть, что взаимодействие S_{int}^δ дает члены второго порядка малости по параметру $e/(4\pi g)$, вклады которых в действие в интересном для приложений случае могут быть вполне сравнимыми с вкладом S_{int}^d , поскольку резонно предполагать, что интенсивность источника e должна быть порядка g (понятно, что множитель 4π компенсируется при взятии интеграла). Подавления мультипольных вкладов в этом случае следует ожидать от геометрического фактора, который возникает при интегрировании по азимутальному углу, и для достаточно однородных в пространстве полевых конфигураций будет иметь порядок $1/(2k+1)$, где k – тип мультиполя. Рис. 2 наглядно демонстрирует роль взаимодействий деформируемых псевдочастиц.

4. ПРИБЛИЖЕННАЯ СХЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Теперь мы можем найти оптимальные “изминания” инстантона. Как уже отмечалось выше, в явном виде формулы легко получить, пренебрегая зависящим от расстояния вкладом S_{int}^κ (18). Оптимизируя квадратичную форму в действии (16), можно получить следующую систему алгебраических уравнений:

$$\kappa \delta_i \rho + \tilde{v}_{ji}^{al} \delta_j \omega^{al} + \Lambda_i = 0, \\ \sigma_{ij}^{kl} \delta_j \omega^{al} + \tilde{v}_{ij}^{ak} \delta_j \rho + \bar{\eta}_{mij} \varepsilon^{abc} v_2 (2\omega^{bm} \delta_j \omega^{ck} - \omega^{bk} \delta_j \omega^{cm}) - \\ - v_2 \bar{\eta}_{kij} \varepsilon^{abc} \omega^{bn} \delta_j \omega^{cn} - 2v_1 \varepsilon_{kmn} \varepsilon^{abc} \omega^{bm} \delta_i \omega^{cn} + \frac{4}{3} v_2 \omega^{ak} \omega^{cn} \delta_i \omega^{cn} + M_i^{ak} = 0. \quad (30)$$

Для того чтобы найти решение, введем новую переменную $y^{jki} = \omega^{aj} \delta_i \omega^{ak}$. Пользуясь свойством ортогональности матриц вращения и сохранения объема группы (15), можно получить

$$\begin{aligned} \sigma_1 \omega^{al} y^{lki} + \sigma_2 \delta_{ki} \omega^{al} y_{lnn} - \sigma_2 \omega^{al} y^{lik} + 2v_2 \varepsilon_{mij} \varepsilon_{dml} \omega^{ad} y^{lkj} - v_2 \varepsilon_{mij} \varepsilon_{dkl} \omega^{ad} y^{lmj} - \\ - v_2 \varepsilon_{kij} \varepsilon_{dnl} \omega^{ad} y^{lnj} - 2v_1 \varepsilon_{kmn} \varepsilon_{dml} \omega^{ad} y^{lni} + \frac{4}{3} v_2 \omega^{ak} y^{nni} + \tilde{v}_{ij}^{ak} \delta_j \rho + M_i^{ak} = 0. \end{aligned}$$

Умножая на матрицу ω и раскрывая произведения антисимметричных тензоров, имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1 y^{ijk} - \sigma_2 y_{ikj} + 2v_1 y^{jik} + v_2 y^{jki} + v_2 y^{kij} + \\ + \delta_{jk} (\sigma_2 y^{inn} - v_2 y^{nin} + v_2 y^{nni}) - v_2 \delta_{ki} (y^{jnn} + y^{nnj}) + \\ + \delta_{ji} \left[-v_2 y^{nkn} + v_2 y^{knn} + \left(\frac{4}{3} v_2 - 2v_1 \right) y^{nnk} \right] + v_{kn}^{ij} \delta_n \rho + \omega^{ai} M_k^{aj} = 0. \quad (31) \end{aligned}$$

Особенностью полученной системы уравнений является наличие сверток независимой переменной y^{ijk} . Отсюда легко заключить, что эти уравнения будут противоречивыми, если выполнены следующие условия для трех возможных сверток решения y^{ikk} , y^{kik} , y^{kki} :

$$\begin{aligned} (\sigma_1 + 2\sigma_2) y^{ikk} + (2v_1 - 3v_2) y^{kik} + \left(\frac{13}{3} v_2 - 2v_1 \right) y^{kki} + \omega^{ai} M_k^{ak} + v_{kn}^{ik} \delta_n \rho = 0, \\ (\sigma_2 + 3v_2) y^{ikk} - (\sigma_2 + 3v_2) y^{kik} + (\sigma_1 - 4v_1 + 4v_2) y^{kki} + \omega^{ak} M_i^{ak} + v_{in}^{kk} \delta_n \rho = 0, \\ (\sigma_2 + 2v_1 - v_2) y^{ikk} + (\sigma_1 - 2v_2) y^{kik} + \left(\frac{v_2}{3} - \sigma_2 - 2v_1 \right) y^{kki} + \omega^{ak} M_k^{ai} + v_{kn}^{ki} \delta_n \rho = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

которые получаются при суммировании системы (31) по индексам k и j , i и j , i и k . Несколько ниже мы проанализируем и расширенную постановку задачи, наложив произвольные связи. Не содержащие сверток первые пять слагаемых в уравнении (31) запишем с помощью вспомогательного тензора

$$s^{jp\beta; kq\gamma} = s_1 \delta_{jk} \delta_{pq} \delta_{\beta\gamma} + s_2 \delta_{jk} \delta_{p\gamma} \delta_{\beta q} + s_3 \delta_{jq} \delta_{pk} \delta_{\beta\gamma} + s_4 \delta_{jq} \delta_{p\gamma} \delta_{\beta k} + s_5 \delta_{j\gamma} \delta_{pk} \delta_{\beta q}$$

с компонентами $s_1 = \sigma_1$, $s_2 = -\sigma_2$, $s_3 = 2v_1$, $s_4 = s_5 = v_2$. Обратным к нему является тензор вида

$$\tau^{i\alpha; jp\beta} = \tau_1 \delta_{ij} \delta_{op} \delta_{\alpha\beta} + \tau_2 \delta_{ij} \delta_{o\beta} \delta_{\alpha p} + \tau_3 \delta_{ip} \delta_{oj} \delta_{\alpha\beta} + \tau_4 \delta_{ip} \delta_{o\beta} \delta_{\alpha j} + \tau_5 \delta_{i\beta} \delta_{oj} \delta_{\alpha p} + \tau_6 \delta_{i\beta} \delta_{op} \delta_{\alpha j}$$

такой, что $\tau^{i\alpha; jp\beta} s^{jp\beta; kq\gamma} = \delta_{ik} \delta_{oq} \delta_{\alpha\gamma}$, с компонентами

$$\begin{aligned} \tau_1 = \frac{11 \cdot 199}{D}, \quad \tau_2 = -\frac{25 \cdot 31}{D}, \quad \tau_3 = -\frac{35 \cdot 37}{D}, \\ \tau_4 = \tau_5 = \frac{109}{D}, \quad \tau_6 = \frac{7 \cdot 23}{D}, \quad D = 13 \cdot 83\beta. \end{aligned}$$

Входящие в эти формулы коэффициенты можно было бы записать через соответствующие комбинации σ_i и v_i . Они, однако, выглядят излишне громоздко, и мы

просто приводим их явный вид для псевдочастицы в сингулярной калибровке. Легко видеть, что полученных соотношений достаточно, чтобы найти решение системы (31). Из уравнений связи (32) извлекаются свертки

$$\begin{pmatrix} y^{ikk} \\ y^{kik} \\ y^{kki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{136}{25\beta} & \frac{24}{175\beta} & \frac{8}{5\beta} \\ \frac{24}{175\beta} & -\frac{24}{7\beta} & \frac{8}{5\beta} \\ \frac{16}{25\beta} & -\frac{144}{175\beta} & -\frac{8}{5\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{ai} M_k^{ak} + (v_1 - 2v_2)\delta_i \rho \\ \omega^{ak} M_i^{ak} + 3v_1 \delta_i \rho \\ \omega^{ak} M_k^{ai} + (v_1 + 2v_2)\delta_i \rho \end{pmatrix},$$

подставив которые в уравнение для $\delta\rho$, можно получить

$$-\frac{53}{200}\beta\delta_n\rho - \frac{28}{25}\omega^{ak}M_n^{ak} + \frac{19}{25}\omega^{an}M_k^{ak} - \frac{2}{5}\omega^{ak}M_k^{an} + \Lambda_n = 0. \quad (33)$$

При помощи тензора τ , обратного к тензору s , из системы (31) извлекаем решение y и восстанавливаем $\delta_i\omega^{ak} = \omega^{aj}y^{jki}$. Явные формулы довольно громоздки, и мы их не приводим.

Рис. 3. Норма отклонений размера инстантона $|\delta\rho|$. Штриховая линия отвечает антиинстантону.

5. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведем анализ численных результатов и зададимся прежде всего вопросом, до каких расстояний законно пользоваться предложенной теорией возмущений. Формальным критерием является малость деформаций на характерном размере порядка

размера псевдочастицы, что в безразмерных переменных соответствует, естественно, расстоянию, равному единице: $|y| \simeq 1$. На рис. 3 приведена норма отклонений в размере инстантона

$$|\delta\rho| = \max_i |\delta_i\rho|, \quad i = 1, 2, 3,$$

как функция пути. Видно, что на расстояниях до источника в несколько инстантонных размеров, а также на малых расстояниях теория возмущений вполне применима. Кроме того, следует отметить, что отклонения от асимптотического размера сильно зависят от взаимного расположения псевдочастицы и источника в “изотопическом” пространстве, и мы привели пример с одним из самых жестких ограничений по $|\delta\rho|$. Если, например, ориентировать инстантон по третьей оси “изотопического” пространства в том же направлении, что и источник, то деформации становятся заметно меньшими.

Рис. 4. Приращение действия $(S-\beta)$ “измятых” инстантона (сплошные линии) и антиинстантона (штриховая линия). Жирная сплошная линия показывает S_{int}^d . Пунктирной линией обозначена траектория для инстантона с наложенными связями.

Для выбранного нами примера расположения в “изотопическом” пространстве псевдочастицы и источника характерно заметное преобладание вклада вращательной компоненты в энергию взаимодействия S_{int}^δ (17) над дилатационной составляющей. Если же ориентировать псевдочастицу по направлению вектора источника, то вклад дилатационной моды, наоборот, сильнее, т.е. для псевдочастицы “выгоднее”

развернуться в “изотопическом” пространстве коррелированно с источником. На рис. 4 приведено полное приращение к действию $(S-\beta)$ инстантона (сплошная кривая) и антиинстантона (штриховая кривая) как функция пути. Отметим, что они различаются, однако следует помнить, что после усреднения по всем возможным положениям псевдочастиц в “изотопическом” пространстве ситуация становится топологически нейтральной.

Вблизи начала координат жирная сплошная линия показывает вклад S_{int}^d разложения (17). Теперь обратим внимание на то, что на больших расстояниях траектории как инстантона, так и антиинстантона проходят выше S_{int}^d – того действия, которое соответствует недеформированному инстантону. Итак, инстантону сначала выгодно двигаться по траектории “измятой” псевдочастицы, затем на расстояниях $\sim 2\rho$ следует излом, и на больших расстояниях от источника траектория без деформаций становится более выгодной. Отметим, что подобная картина не может быть получена в рамках приближения среднего поля (см. работы [13], [14]). Следовательно, на больших расстояниях от источника точка экстремума для деформированной псевдочастицы отвечает максимуму действия, и поэтому должны существовать направления в функциональном пространстве, по которым действие можно уменьшать. Чтобы выделить их, рассмотрим более общую постановку задачи и будем искать экстремум функционала (16) с девятью теперь уже произвольными связями

$$y^{ikk} = a_i, \quad y^{kik} = b_i, \quad y^{kki} = c_i.$$

Действие (16) с лагранжевыми множителями λ, μ, ν преобразуется к виду

$$S \rightarrow \hat{S} = S + \lambda_i(y^{ikk} - a_i) + \mu_i(y^{kik} - b_i) + \nu_i(y^{kki} - c_i). \quad (34)$$

Довольно затруднительно непосредственно диагонализировать квадратичную форму для этой системы, но необходимое для наших целей представление об устройстве этой функции получить все же можно. Для этого часть, связанную только с вращениями в “изотопическом” пространстве:

$$\begin{aligned} S^y &= y^{ip\alpha} \sigma^{ip\alpha; jp\beta} y^{jp\beta}, \\ \sigma^{ip\alpha; jp\beta} &= \frac{\sigma_1}{2} \delta_{ij} \delta_{pq} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\sigma_2}{2} \delta_{ij} \delta_{p\beta} \delta_{\alpha q} + v_2 \delta_{iq} \delta_{p\beta} \delta_{\alpha j} + v_1 \delta_{iq} \delta_{pj} \delta_{\alpha\beta} + \\ &+ \frac{\sigma_2}{2} \delta_{ij} \delta_{p\alpha} \delta_{q\beta} - v_2 \delta_{iq} \delta_{p\alpha} \delta_{j\beta} - v_2 \delta_{i\alpha} \delta_{p\beta} \delta_{jq} - \\ &- v_2 \delta_{i\beta} \delta_{p\alpha} \delta_{jq} + \left(\frac{2}{3} v_2 - v_1 \right) \delta_{ip} \delta_{\alpha\beta} \delta_{jq}, \end{aligned} \quad (35)$$

перепишем с помощью разложения по мультиплетам

$$y^{jq\beta} = y^{\{jq\beta\}} + y^{[jq\beta]} + y^{\{j[q\beta]\}} + y^{[j\{q\}\beta]},$$

где фигурными скобками обозначены симметричные по индексам комбинации, а

квадратными – антисимметричными. Тогда слагаемые без сверток диагонализуются:

$$S^y = y^{ip\alpha} \left[r_1 y^{\{ip\alpha\}} + r_2 y^{[ip\alpha]} + r_3 y^{\{i[p]\alpha\}} + r_4 y^{[i\{p\}\alpha\}} + \right. \\ \left. + \delta_{p\alpha} \left(\frac{\sigma_2}{2} y^{ikk} - v_2 y^{kik} + v_2 y^{kki} \right) - v_2 \delta_{i\alpha} y^{kkp} + \delta_{ip} \left(\frac{2}{3} v_2 - v_1 \right) y^{kk\alpha} \right], \quad (36)$$

где собственные значения

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2} + v_2 + v_1 = \frac{13}{12} \beta, & r_2 &= \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2}{2} + v_2 - v_1 = \frac{1}{8} \beta, \\ r_3 &= \frac{\sigma_1}{2} + \frac{\sigma_2}{2} + v_1 - v_2 = \frac{11}{24} \beta, & r_4 &= \frac{\sigma_1}{2} - \frac{\sigma_2}{2} - v_2 - v_1 = \frac{1}{4} \beta. \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку все r_i положительны, то каждый мультиплет по отдельности устойчив и отчетливо различим по вкладу в член типа кинетической энергии.

Система уравнений при наложении произвольных связей имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa \delta_i \rho + v_1 y^{kki} + v_2 y^{kik} + v_2 y^{ikk} + \Lambda_i &= 0, \\ \sigma_1 y^{ijk} - \sigma_2 y_{ikj} + 2v_1 y^{jik} + v_2 y^{jki} + v_2 y^{kij} + \delta_{jk} (\sigma_2 y^{inn} - v_2 y^{nin} + v_2 y^{nni}) - \\ - v_2 \delta_{ki} (y^{jnn} + y^{nnj}) + \delta_{ji} \left[-v_2 y^{nkn} + v_2 y^{knn} + \left(\frac{4}{3} v_2 - 2v_1 \right) y^{nnk} \right] + \\ + \lambda_i \delta_{jk} + \mu_j \delta_{ik} + \nu_k \delta_{ij} + v_{kn}^{ij} \delta_n \rho + \omega^{ai} M_k^{aj} &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Условия непротиворечивости этой системы можно рассматривать в качестве уравнений для определения лагранжевых множителей:

$$\begin{aligned} 3\lambda + \mu + \nu + (\sigma_1 + 2\sigma_2)\mathbf{a} + (2v_1 - 3v_2)\mathbf{b} + \left(\frac{13}{3} v_2 - 2v_1 \right) \mathbf{c} + \omega^{ai} M_k^{ak} + (v_1 - 2v_2) \delta \rho &= 0, \\ \lambda + 3\mu + \nu + (\sigma_2 + 3v_2)\mathbf{a} - (\sigma_2 + 3v_2)\mathbf{b} + (\sigma_1 - 4v_1 + 4v_2)\mathbf{c} + \omega^{ak} M_i^{ak} + (v_1 + 2v_2) \delta \rho &= 0, \\ \lambda + \mu + 3\nu + (\sigma_2 + 2v_1 - v_2)\mathbf{a} + (\sigma_1 - 2v_2)\mathbf{b} + \left(\frac{v_2}{3} - \sigma_2 - 2v_1 \right) \mathbf{c} + \omega^{ak} M_k^{ai} + 3v_1 \delta \rho &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение для деформации размера имеет вид

$$\kappa \delta \rho - v_2 \mathbf{a} + v_2 \mathbf{b} - v_1 \mathbf{c} + \mathbf{\Lambda} = 0.$$

Отсюда найдем λ , μ , ν и, подставляя их в систему (38), с помощью обратного тензора τ получим искомое решение для системы со связями. На больших расстояниях от заряда, когда взаимодействие пренебрежимо мало, или в частном случае, когда взаимодействие отсутствует (рассматривается только деформируемая псевдочастица), лагранжевы множители λ , μ , ν и решение y^{ijk} будут функциями только связей $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{83}{D_1} & -\frac{43}{D_1} & -\frac{49}{3D_1} \\ -\frac{43}{D_1} & -\frac{353}{D_1} & \frac{571}{3D_1} \\ -\frac{49}{3D_1} & \frac{571}{3D_1} & -\frac{557}{9D_1} \end{array} \right\| \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix},$$

где $D_1 = 5 \cdot 9 \cdot 32/\beta$,

$$y^{ijk} + \delta^{jk}(A_{11}a_i + A_{12}b_i + A_{13}c_i) + \delta^{ik}(A_{21}a_j + A_{22}b_j + A_{23}c_j) + \\ + \delta^{ij}(A_{31}a_k + A_{32}b_k + A_{33}c_k) = 0,$$

причем матрица A как раз приводится к виду проекционной матрицы, необходимой для выделения из решения y девяти наложенных связей: $A_{11} = A_{22} = A_{33} = -2/5$, $A_{12} = A_{13} = A_{21} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = 1/10$. В результате действие (34) примет вид квадратичной формы от трех векторов связей $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

$$\hat{S} = -\frac{1}{2}(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}).$$

Оказывается, что два собственных значения квадратичной формы положительны, а одно отрицательно. Направление, двигаясь по которому можно действие уменьшать, задается условиями

$$\mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad 3 \cdot 571\mathbf{b} - 557\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

(оговоримся снова, что выражения получены при анализе инстантона в сингулярной калибровке, и мы не приводим их вида через соответствующие компоненты тензоров σ_i , v_i , в силу громоздкости выражений). Хотя мы и не диагонализировали систему уравнений (31) явно, мы смогли убедиться, введя произвольные связи, что часть собственных значений квадратичной формы отрицательна, и, таким образом, псевдочастица может проявлять себя как своего рода “сфалерон”. В принципе изучение деформируемых псевдочастиц вне рамок рассматриваемой в этой работе теории возмущений позволило бы рассмотреть проблему перехода непертурбативных полевых конфигураций в пертурбативные. Заметим кстати, что обычно такого рода переход ассоциируется только с аннигиляцией инстантон-антиинстантонной молекулы и служит основанием для известной критики простого суперпозиционного анзаца в модели ИЖ. Мы же демонстрируем с этой точки зрения, что уже в одночастичном секторе могут существовать пути в функциональном пространстве, связывающие решения из разных топологических классов.

Рассматривая одночастичную задачу, можно, в частности, интересоваться деформациями, оставляющими решение в заданном топологическом классе, наложив условие сохранения топологического заряда $\delta N = 0$. В квадратичном по отклонениям приближении для него можно получить

$$\delta N = \frac{1}{\beta} \int dx \frac{G_{\mu\nu}^a \tilde{G}_{\mu\nu}^a}{4} - 1 = -\frac{3}{10} \delta_\mu \rho \delta_\mu \rho - \frac{1}{12} \delta_\mu \omega^{ak} \delta_\mu \omega^{ak}, \quad (39)$$

где $\tilde{G}_{\mu\nu}^a = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} G_{\alpha\beta}^a/2$. Отсюда в силу диагональности формы (39) следует, что диполеподобные деформации (имеется в виду разложение (7)) исключены при условии неизменности топологического заряда.

В качестве примера системы с наложенными связями мы приведем следующую подстановку (которая продиктована рассматриваемым частным видом матрицы вращения ω) с четырьмя ненулевыми компонентами:

$$\delta_1 \rho = x, \quad \delta_1 \omega^{13} = \delta_1 \omega^{22} = y, \quad \delta_1 \omega^{31} = z.$$

Кроме того, в этом примере мы учитываем также вклад членов S_{int}^κ . В результате решение определяется минимизацией следующей квадратичной формы:

$$S - \beta = \frac{A}{2}x^2 + \frac{B}{2}y^2 + \frac{9}{16}\beta z^2 + Fyz + Cxy + Dxz + \Lambda_1x + Ey + Gz,$$

где

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \frac{\kappa}{2} \mp \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \Sigma_{111} + \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 (2Q_{11} - R_{2211} - R_{3311}), \\ \frac{B}{2} &= \frac{17}{24}\beta \pm \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} (2T_{111} - S_{133} - S_{122}) + \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 (2U_{11} - V_{2211} - V_{3311}) \pm \\ &\quad \pm \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} 2(Z_1 - Z_2 - Z_3 + Z_4), \\ C &= \frac{7}{12}\beta \pm \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} 2(2W_{111} - 3X_{221} - X_{331}) \pm \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} 4(\Xi_1 - \Xi_2 - \Xi_3 + \Xi_4), \\ D &= -\frac{7}{24}\beta \mp \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} \Psi_{111} \pm \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} 2(\Xi_1 - \Xi_2 - \Xi_3 + \Xi_4) \pm \\ &\quad \pm \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} 2(3\Theta_1^{44} + \Theta_2^{44} + 21\Theta_1 + 12\Theta_2 + \Theta_3), \\ F &= \frac{13}{24}\beta \pm \frac{1}{g} \frac{e}{4\pi} 2(3\Phi_1^{44} + \Phi_2^{44} + 21\Phi_1 + 12\Phi_2 + \Phi_3), \\ E &= M_1^{13} + M_1^{22}, \quad G = M_1^{31}, \end{aligned}$$

причем верхний знак отвечает инстантону. Траектория для инстантона приведена на рис. 4 пунктирной линией.

Рис. 5 демонстрирует интересную возможность проследить в нашей модели изменение топологического заряда (о чем упоминалось в начале работы) для рассматриваемых траекторий, из которого видно, что взаимодействие приводит к существенному изменению топологического класса решений с зарядом $|N| = 1$. Приведенная нами величина (39) характеризует степень деформации только приближенного инстантонного решения, хотя, конечно же, стоило бы интересоваться топологическим зарядом для всего суперпозиционного анзаца, поскольку только он может иметь непосредственный физический смысл.

Сделаем еще одно замечание по поводу возможных условий связи. Наложив произвольные девять ограничений, можно было бы поискать те, для которых действие экстремально, т.е. провести еще и оптимизацию по связям. Оказывается, что таковыми будут первоначально рассмотренные нами траектории (32), причем в этом случае лагранжевы множители тривиальны ($\lambda = \mu = \nu = 0$).

В целом из приведенных результатов можно заключить, что предложенная теория возмущений применима со стороны как больших, так и малых расстояний и позволяет эффективно исследовать влияние, оказываемое на псевдочастицы сторонними полями. Существенного подавления вклада инстантонов для параметров, характерных для модели ИЖ, следует ожидать только на расстояниях порядка размера инстантона, но при этом взаимодействие с кулоноподобным полем простирается существенно дальше нескольких инстантонных размеров.

Рис. 5. Изменение топологического заряда δN для “измятых” инстантона (сплошная линия) и антиинстантона (штриховая линия). Пунктиром обозначена траектория для инстантона с наложенными связями.

Отметим, что мощность вклада “измятых” псевдочастиц в функциональный интеграл имеет тот же порядок, что и у недеформированных псевдочастиц. Важность при вычислении функционального интеграла поиска такого рода траекторий, которые (даже в случае проигрыша в действии) обладали бы большой энтропией, хорошо известна (см., например, [18]). Используемое нами условие для поиска оптимально “измятых” конфигураций $\delta S = 0$ учитывает только старшие вклады взаимодействия в экспоненте производящего функционала и, как можно показать, является “уравнением долин” в квазиклассическом приближении. Для того чтобы претендовать на большую точность и учитывать квантовые взаимодействия (вклад соответствующих детерминантов в предэкспоненту), следует применять метод долин (например, вариант, пригодный для практического применения, предложен в работе [19]). Рассмотренный нами пример учета диполеподобных деформаций (7) наглядно демонстрирует, однако, насколько сложной может оказаться эта конфигурация даже в этом относительно простом случае.

Сделаем замечание по поводу деформаций псевдочастиц на больших расстояниях. Рассматривая асимптотики членов взаимодействия, можно видеть, что они

носят кулоноподобный характер, т.е. даже в дальней зоне поле псевдочастицы может быть заметно поляризованным. Если окажется возможным выделить на фоне межинстантонных взаимодействий дальнедействующую компоненту, рассматривая, например, разреженный газ сильно охлажденных конфигураций (анти)инстантонов, то появится шанс непосредственно на решетке измерить величину константы связи g , прилагая к ее границе внешнее поле с величиной, контролируемой интенсивностью e . Дилатационная и вращательная деформации могут входить в наблюдаемые только в виде соответствующих средних $\langle \delta_n \rho \rangle$, $\langle \delta \omega_i^{ab} \rangle$, которые, как можно проследить, определяются через два независимых параметра e^2 и e/g . Интересно отметить, что в принципе можно построить такую линейную комбинацию из этих двух средних, которая зависела бы только от интенсивности e и могла бы быть проконтролирована в процессе измерения, тогда как оставшаяся служила бы для определения g . Накопленный к настоящему времени опыт работы с решеткой с наложенными граничными условиями (см., например, [20]) позволяет надеяться, что применение техники охлаждения [21], успешно выявляющей инстантонные конфигурации, которые, кстати сказать, действительно выглядят заметно деформированными [22], позволит продвинуться в этом направлении.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ К МОДЕЛИ ИНСТАНТОННОЙ ЖИДКОСТИ

Возникает вопрос: нельзя ли предложить какой-либо простой способ учета вклада в функциональный интеграл конфигураций с “измятыми” псевдочастицами? Если претендовать только на точность вычисления экспоненты производящего функционала, то их вклад оценивается в квазиклассическом приближении так же, как и для недеформированных псевдочастиц (обозначения см. в работе [17]):

$$Z = \sum_N \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \int \frac{d\gamma_i}{V \rho_i^5} C_{N_c} \tilde{\beta}^{2N_c} e^{-S}, \quad d\gamma_i = dz_i d\rho_i d\omega_i. \quad (40)$$

В модели ИЖ интеграл насыщается конфигурациями характерного размера $\bar{\rho}$. В нашем случае под действием S в этой формуле подразумевается действие с учетом вклада деформаций. Таким образом, добавляя вклад, вносимый “измятыми” псевдочастицами такого же характерного масштаба, мы сможем с той же точностью описывать и реакцию ИЖ на внешнее воздействие. С точки зрения интегрирования в функциональном пространстве шаблон Ритца (6) выглядит слишком “жестким” и неполным. Варьируемыми параметрами являются только скорости и высшие коэффициенты мультипольного разложения, но не основной член разложения – средний размер инстантона. Более естественным в духе функционального интегрирования представлялось бы разложение с варьируемыми средними, например, для размера псевдочастицы, вида

$$R_{\text{in}}(x, z) = \rho(z) + \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_\mu} y_\mu + \frac{\partial^2 \rho(z)}{\partial z_\mu \partial z_\nu} \frac{y_\mu y_\nu}{2} + \dots, \quad |y| \leq L, \quad (41)$$

и аналогично для Ω . Теперь производящий функционал оценивается как

$$Z = \int D[\rho(z)] D[\omega(z)] \sum_N \frac{1}{N!} \prod_{i=1}^N \int \frac{dz_i d\omega_i}{V} C_{N_c} \tilde{\beta}^{2N_c} e^{-S}. \quad (42)$$

Напомним, что в ИЖ помимо одночастичных вкладов следует учитывать и взаимодействие псевдочастиц между собой, т.е. в формуле (10) в качестве поля B может выступать и поле псевдочастицы. Пусть для простоты и инстантоны, и антиинстантоны испытывают незначительные изменения размера при воздействии на ИЖ стороннего источника: $\rho(z) = \bar{\rho} + \delta\rho(z)$. Положим, что цветовая ориентация инстантонов описывается матрицами $\omega_i(z) = \omega_i + \Delta\omega(z)$, а антиинстантонов — $\bar{\omega}_i(z) = \bar{\omega}_i + \Delta\bar{\omega}(z)$. Здесь первые слагаемые отвечают предполагаемым выделенным направлениям в цветовом пространстве. Напомним, что в отличие от дипольного разложения (7) матрицы $\omega(z)$, $\bar{\omega}(z)$ являются матрицами вращения. Напряженность поля для отдельного инстантона имеет вид

$$G_{\mu\nu}^a(A) = -\frac{4}{g} \omega^{ak}(z) M_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} \bar{\eta}_{k\alpha\beta} \frac{\rho^2(z)}{(y^2 + \rho^2(z))^2}$$

с заменой ω на $\bar{\omega}$ для антиинстантона. В случае инстантон-инстантонной молекулы смешанная компонента напряженности поля $G(A, B)$ записывается как

$$G_{\mu\nu}^a(A, B) = \frac{4}{g} \varepsilon^{abc} \omega^{bn}(z_1) \omega^{ck}(z_2) (\bar{\eta}_{n\mu\gamma} \bar{\eta}_{k\nu\alpha} - \bar{\eta}_{n\nu\gamma} \bar{\eta}_{k\mu\alpha}) \times \\ \times \frac{y_{1\alpha} y_{2\gamma}}{y_1^2 y_2^2} \frac{\rho^2(z_1)}{(y_1^2 + \rho^2(z_1))} \frac{\rho^2(z_2)}{(y_2^2 + \rho^2(z_2))},$$

где $y_i = x - z_i$. Можно видеть, что благодаря свойствам (15) все комбинации цветовых матриц для инстантон-инстантонного взаимодействия свернутся в единичную матрицу, если в качестве оценки соответствующих интегралов ограничиться только контактным видом взаимодействия. Это приближение оправданно, поскольку для далеко разнесенных псевдочастиц $|z_1 - z_2| \gg \bar{\rho}$ интересующие нас интегралы быстро убывают. Для инстантон-антиинстантонной молекулы смешанная компонента напряженности поля дается выражением

$$G_{\mu\nu}^a(A, B) = \frac{4}{g} \varepsilon^{abc} \bar{\omega}^{bn}(z_1) \omega^{ck}(z_2) (\eta_{n\mu\gamma} \bar{\eta}_{k\nu\alpha} - \bar{\eta}_{k\mu\alpha} \eta_{n\nu\gamma}) \times \\ \times \frac{y_{1\alpha} y_{2\gamma}}{y_1^2 y_2^2} \frac{\rho^2(z_1)}{(y_1^2 + \rho^2(z_1))} \frac{\rho^2(z_2)}{(y_2^2 + \rho^2(z_2))}.$$

Используя свойства свертки символов 'т Хоофта, можно показать, что и в этом случае матрицы ω и $\bar{\omega}$ снова свертываются в единичную. Это свойство, конечно же, обусловлено калибровочной инвариантностью теории Янга–Миллса. В результате усредненный интеграл взаимодействия псевдочастиц (обозначения см. в работе [17]) приводится к виду

$$\langle S(A, B) \rangle = \int \frac{dz_1}{V} \int \frac{dz_2}{V} \bar{U}_{\text{int}}(A, B), \quad (43) \\ \bar{U}_{\text{int}}(A, B) = \frac{8\pi^2}{g^2} \frac{N_c}{N_c^2 - 1} \int dx \frac{(7y_1^2 y_2^2 - (y_1 y_2)^2) \rho^2(z_1) \rho^2(z_2)}{y_1^4 (y_1^2 + \rho^2(z_1))^2 y_2^4 (y_2^2 + \rho^2(z_2))^2}.$$

Для интеграла по положениям выделенной псевдочастицы можно получить оценку в виде контактного члена:

$$\int dz_1 \bar{U}_{\text{int}}(A, B) \simeq \frac{8\pi^2}{g^2} \xi^2 \rho^2(z_2) \rho^2(z_2) \simeq \frac{8\pi^2}{g^2} \xi^2 \bar{\rho}^2 \rho^2(z_2),$$

где

$$\xi^2 = \frac{27\pi^2}{4} \frac{N_c}{N_c^2 - 1}$$

(независимость интеграла взаимодействия от цветовой ориентации представляется вполне очевидной вследствие изотропности ИЖ в цветовом пространстве). Кроме того, следует учесть вклад типа кинетической энергии (12) от каждой псевдочастицы. В результате, как было показано ранее [7], производящий функционал (42) для такого сорта “измятых” псевдочастиц имеет вид эффективного лагранжиана для скалярного поля $\rho(z)$ с массовой щелью: $M^2 = 2(11N_c - 2N_f - 12)/(3\kappa\bar{\rho}^2)$. Зависимость от вращательной компоненты $(\delta\omega, \delta\bar{\omega})$ тривиальна. Ранее для кинетического коэффициента получалась оценка порядка $\kappa \sim 1.5\beta - 6\beta$ в зависимости от принимаемого анзаца для насыщающей конфигурации. Для чистой глюодинамики, например, с параметрами $N_c = 3$, $\beta \simeq 17.5$, $\bar{\rho}\Lambda \simeq 0.37$, при $\kappa = 4\beta$ масса оценивалась как $M \simeq 1.21\Lambda$. В этом случае с характерной для ИЖ Λ порядка 280 МэВ мы имели мягкую шкалу масс. Полученному в этой работе коэффициенту $\kappa = 0.9\beta$ отвечает уже более жесткая шкала – свыше 1 ГэВ. По квантовым числам рассмотренное возбуждение ИЖ отвечает глюболу.

Асимптотика средней энергии источника и диполя. В этой работе мы рассматривали воздействие на псевдочастицу заданного внешнего поля. Но можно добиться и самосогласованного описания отклика ИЖ на источник, если не полагать поле $B_\mu^a(x)$ заранее известным. Тогда, как это можно проанализировать, примененное нами мультипольное разложение позволяет факторизовать задачу и построить для фурье-компоненты поля $B_\mu^a(p)$ замкнутое уравнение, которое позволяет в принципе получить один из важнейших параметров, характеризующих ИЖ, – дебаевский радиус экранирования. Однако даже в несамосогласованном виде полученное нами описание инстантонов во внешнем поле позволяет извлекать богатую информацию о свойствах ИЖ при изучении всевозможных наблюдаемых, таких, например, как поток неабелева поля через замкнутую поверхность или интеграл по замкнутому контуру. Мы приведем здесь только один результат для средней энергии евклидова источника, помещенного в ИЖ [23]. Напомним, что в качестве адекватной насыщающей конфигурации в модели ИЖ принимается суперпозиция полей (анти)инстантонов, дополненная в нашем случае еще и полем источника B_μ^a :

$$A_\mu^a(x) = B_\mu^a(x) + \sum_{i=1}^N A_\mu^a(x; \gamma_i), \quad (44)$$

где $\gamma_i = (\rho_i, z_i, \omega_i)$ обозначают параметры, описывающие i -й (анти)инстантон. Из рис. 4 можно видеть, что на расстояниях, больших $2\Delta/\rho$, плотность ИЖ становится практически равной своему асимптотическому значению $n(\Delta) \sim n_0 e^{\beta-S} \simeq n_0$,

поскольку в этой зоне действие каждой псевдочастицы примерно совпадает с β , $S - \beta \geq S_{\text{int}}^d$.

Интересующая нас величина дается усреднением S по цветовым ориентациям и по положениям псевдочастиц (для простоты рассмотрим псевдочастицы одинакового размера):

$$\langle S \rangle = \prod_{i=1}^N \int \frac{dz_i}{V} \int d\omega_i S = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{a} X_4 + N\beta + N \int \frac{d\Delta}{L^3} \left(\frac{e}{4\pi} \right)^2 \left(J + \frac{K_{ii}}{3} \right), \quad (45)$$

где L – некоторый формальный верхний предел интегрирования, $V = L^3 X_4$ – объем, занимаемый ИЖ, X_4 – верхний предел, отвечающий “времени”, N – полное число псевдочастиц, а a – радиус источника по сильному взаимодействию. Подставляя асимптотики функций J и K и возвращаясь к размерным переменным, запишем одноинстантонные вклады в среднее действие в следующем виде:

$$\langle S \rangle \simeq \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{a} X_4 + \frac{N}{V} \beta L^3 X_4 + \frac{N}{V} \frac{6\pi^3}{\beta} \frac{e^2}{g^2} \bar{\rho}^2 L X_4,$$

где $\bar{\rho}$ – средний размер (анти)инстантонов в ИЖ. Общий множитель X_4 может быть выделен, поскольку, как обсуждалось в начале работы, мы рассматриваем инстантоны в поле источника в установившейся зоне, и задача автомодельна на каждом x_4 -слое. В пределе больших $N, V \rightarrow \infty$ при фиксированной плотности инстантонной жидкости $n = N/V$ имеем

$$\langle S \rangle \simeq E X_4, \quad E = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{a} + n\beta L^3 + n \frac{6\pi^3}{\beta} \frac{e^2}{g^2} \bar{\rho}^2 L.$$

Формально последнее слагаемое выглядит как пренебрежимо малая поправка к глюонному конденсату (второе слагаемое). Однако этот линейно растущий по L вклад пропорционален e^2 и имеет иной физический смысл типа дополнительного слагаемого к собственной энергии источника:

$$E \simeq \sigma L, \quad \sigma = n \frac{6\pi^3}{\beta} \frac{e^2}{g^2} \bar{\rho}^2.$$

При характерных для ИЖ параметрах $\bar{\rho}/\bar{R} \simeq 1/3$, $n = \bar{R}^{-4}$ ($\bar{R}$ – среднее расстояние между псевдочастицами), $\beta \simeq 12$, $\bar{\rho} \simeq 1 \text{ ГэВ}^{-1}$ [3], [4], имеем $\sigma \simeq 0.6 \text{ ГэВ/Фм}$ (если для оценки положить источник такой силы, что $e \simeq g$). Учитывая качественный характер модели ИЖ, это значение совсем неплохо согласуется с оценками, получающимися в рамках потенциальных моделей для тяжелых кваркониев. Рассматривая среднее вида $\langle S_{\text{int}} e^{-S_{\text{int}}} \rangle$, моделирующее эффект подавления вклада псевдочастиц вблизи источника, и взяв соответствующие интегралы численно, можно увидеть, что линейно растущий вклад становится заметным при $\Delta/\bar{\rho} \sim 3-4$. Рост энергии с расстоянием можно прежде всего интерпретировать как демонстрацию невозможности внесения голого цветового заряда в ИЖ. Без учета эффектов экранирования масса источника, а именно так следует трактовать найденный нами дополнительный

вклад, неограниченно растет. Приведенная нами оценка асимптотики для энергии евклидова источника в ИЖ является главным вкладом в производящий функционал в квазиклассическом приближении, когда все константы взаимодействия фиксируются на масштабе среднего размера инстантона $\bar{\rho}$. Вклад дипольной составляющей в формуле (25) (пропорциональной первой степени матрицы вращения) проявляется, начиная со второго порядка в разложении экспоненты, и не является лидирующим вследствие регулярности.

Опишем теперь цветовой диполь в синглетном по цвету состоянии с источниками $e\delta^{a3}$, $-e\delta^{a3}$, “ориентированными” по третьей оси “изотопического” пространства, покоящимися в точках $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$, соответственно. В этом случае интересующая нас компонента напряженности поля имеет вид

$$G_{4i}^a(A, B) = 2 \frac{e}{4\pi} \varepsilon^{a3c} \Omega^{ck} \bar{\eta}_{k i \alpha} \frac{y_\alpha}{y^2} \frac{\rho^2}{(y^2 + \rho^2)} \left(\frac{1}{|\mathbf{y} + \mathbf{\Delta}_1|} - \frac{1}{|\mathbf{y} + \mathbf{\Delta}_2|} \right),$$

$\mathbf{\Delta}_{1,2} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_{1,2}$. Дополнительный к кулоновскому вклад в среднюю энергию E на больших расстояниях определяется интегралом, похожим на случай одного источника, с тем же коэффициентом, но другим средним по положениям инстантона, вида

$$I_d = \int d\mathbf{\Delta}_1 \left(\frac{1}{\mathbf{\Delta}_1^2} - 2 \frac{1}{|\mathbf{\Delta}_1| |\mathbf{\Delta}_2|} + \frac{1}{\mathbf{\Delta}_2^2} \right).$$

Когда расстояние между источниками $l = |\mathbf{\Delta}_1 - \mathbf{\Delta}_2|$ стремится к нулю, поле исчезает, и мы должны иметь в ответе нуль. В нашем распоряжении есть только два параметра, от которых интеграл может зависеть: L и l . По соображениям размерности интеграл есть линейная функция, но только зависимость от l удовлетворяет требованию обращения интеграла в нуль при $l \rightarrow 0$. Для определения же коэффициента легко получить

$$\frac{I_d}{4\pi} = L - 2 \left(L - \frac{l}{2} \right) + L = l$$

(здесь по отдельности написаны вклады трех интегралов), где $l = |\mathbf{\Delta}_1 - \mathbf{\Delta}_2|$ – расстояние между зарядами. Окончательно для дополнительного вклада в среднюю энергию диполя в ИЖ имеем

$$E \sim \sigma l.$$

Несинглетные по цвету состояния сильно подавляются в ИЖ фактором порядка радиуса экранирования ($\sim \sigma R_D$).

Сделаем еще одно замечание несколько общего характера, не связанное непосредственно с моделью ИЖ. “Измятые” конфигурации частиц-решений встречаются не только при учете влияния на них внешних полей или при изучении взаимодействия между ними. Мы обнаруживаем их даже в случае простейшего кинка в задаче о двугорбом потенциале: $V(x) = -\lambda(x^2 - \eta^2)^2$ (напомним, мы интересуемся описанием ситуации в евклидовом пространстве). Рассмотрим, например, кинк на конечном интервале $(-T, T)$, где $T \gg \omega^{-1}$ – характерного размера кинка ($\omega^2 = 8\lambda\eta^2$). Приближенно решение описывается как $x_k(t) \simeq x_{as}(t) = \eta \operatorname{th}(\omega t/2)$, причем в точках поворота $x_k(T) = x_k(-T) \simeq \eta$ скорость частицы обращается в нуль: $\dot{x}_k(\pm T) = 0$. Траектория выбрана так, чтобы начало координат частица проходила в нулевой момент

времени (координата центра кинка $\tau_c = 0$). Помимо такого (единственного) симметричного кинка интерес представляют и траектории со смещенным центром, которые пересекаются с осью $x = 0$ не только в нулевой момент времени. В окрестности центра кинка такие решения описываются приближенно как $x_c(t) = \eta \operatorname{th}(\omega(t - \tau_c)/2)$. Чтобы построить их, рассмотрим движения, которые совершаются на большем, чем исходный, интервале времени $(-T_2, T_2)$, где $T_2 > T$. И здесь имеется траектория с центром кинка в нуле, которую обозначим как $\dot{x}_k(t)$: $\dot{x}_k(t) \simeq x_{as}(t)$, причем стартовать и финишировать частица снова будет с нулевой скоростью: $\dot{x}'_k(\pm T_2) = 0$. Определив энергию для этой траектории, мы получим чуть большее значение, чем для траектории $x_k(t)$, при этом частица забирается на горб чуть выше точек остановок $x_k(\pm T)$ первоначальной траектории. Теперь сдвинем начало отсчета времени у траектории $\dot{x}_k(t)$ и получим интересующее нас решение $x_c(t) = \dot{x}_k(t + T - T_2)$ со смещенным центром. В данном случае частица начинает падать в яму в момент времени $-T$, не имея начальной скорости, и пересекает ось $x = 0$ в момент времени $T_2 - T$. Взявшись затем по склону, она не останавливается в момент времени T , а имеет в запасе еще некоторую скорость, и, следовательно, нужно поставить какой-либо жесткий барьер, чтобы заставить ее отскочить в обратном направлении. Поэтому такие траектории, строго говоря, не являются решениями для исходного потенциала. Аналогичным образом можно построить и траекторию, когда частица финиширует “правильным” образом. В отличие от кинка $x_k(t)$, траектория $x_c(t)$ несимметрична. Правый ее конец не совсем точно повторяет левый, правда, это отличие весьма незначительно (экспоненциально мало), если $\tau_c \ll T$, но становится существенным, когда смещение центра кинка оказывается того же порядка, что и величина интервала. В общем случае частица может иметь отличную от нуля скорость и на старте, и на финише. Вспомним теперь, что при взятии функционального интеграла мы ограничены в выборе траекторий требованием использовать только такие, начало и конец которых фиксированы. Этого, как следует из нашего обсуждения, в общем положении можно добиться, как правило, путем нарушения уравнений движения.

Таким образом, мы вынуждены рассматривать “нестандартные” кинки, которые, собственно, и составляют то уникальное множество траекторий, мера которого в функциональном пространстве пропорциональна величине интервала $\int d\tau_c = 2T$. Кинк-антикинковые конфигурации представляют собой еще более запутанное множество траекторий (со сложным взаимодействием между фрагментами), вырождающихся ближе ко дну ямы уже в обычные осцилляторные (пертурбативные) траектории с частотой осцилляций $\Omega^2 = 4\lambda\eta^2$, которые не следует ассоциировать с кинк-антикинковыми конфигурациями.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение перечислим основные результаты работы. Для описания поведения псевдочастицы при наличии внешнего воздействия предложена теория возмущений, основанная на вариации описывающих ее параметров. Сформулирована вариационная задача поиска оптимальных деформаций псевдочастиц, которую из-за почти

сингулярного характера решения можно решить алгебраически с помощью метода Ритца путем мультипольного разложения полей деформаций. Проанализирована область параметров, интересных для приложений к модели ИЖ. При этом показано, что если пренебречь зависящим от расстояния до источника возмущения вкладом в член типа кинетической энергии S_{int}^{κ} , то можно заметно упростить решение алгебраической задачи и получить явные формулы для полей деформаций в дипольном приближении. Коэффициенты квадратичной формы в члене типа кинетической энергии S^{κ} связаны с самой псевдочастицей и характеризуют присущую ей податливость по отношению к изменению размера, а также ориентации в “изотопическом” пространстве. Найдены члены взаимодействия недеформированной псевдочастицы и псевдочастицы с варьируемыми параметрами, с фиксированным точечным евклидовым источником цветового поля. Отмечено, что диполеподобные вклады в S_{int}^d , пропорциональные e/g , в области параметров, характерных для модели ИЖ, на малых расстояниях заметно меньше членов порядка e^2 . Предложен простой способ учета “измятых” конфигураций при приближенном вычислении функционального интеграла. Приведенное в настоящей работе описание поведения инстантона в поле точечного евклидова источника цветового поля наглядно демонстрирует, что топография долин в функциональном пространстве может быть настолько сложной, что, по-видимому, не представляется возможным исследовать ее в сколько-нибудь общей постановке.

В рамках суперпозиционного анзаца получена линейно растущая с расстоянием оценка средней энергии помещенного в ИЖ евклидова цветового источника. Показано, что в случае цветового диполя без учета эффектов экранирования получается удерживающий потенциал с таким же коэффициентом роста, вполне согласующимся с имеющимися данными о натяжении струны.

Благодарности. Авторы выражают сердечную благодарность коллегам за многочисленные обсуждения, но особенно полезными были обсуждения с профессорами В. Г. Кадышевским, М. Д. Матеевым, Г. В. Ефимовым, а также А. Е. Дороховым, Н. И. Кочелевым, С. Н. Неделько, А. М. Снигиревым, А. С. Сориным, О. В. Теряевым. Работа выполнена при финансовой поддержке STCU (грант № P015с), CERN-INTAS (грант № 2000-349), NATO (грант № 2000-PST.CLG 977482), INTAS (грант № 04084-398), NATO (грант № PDD(CP)-NUKR 980668).

Список литературы

- [1] C. G. Callan, R. Dashen, D. J. Gross. Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 2717; Phys. Lett. B. 1977. V. 66. P. 375.
- [2] M. Alford, K. Rajagopal, F. Wilczek. Phys. Lett. B. 1998. V. 422. P. 247; R. Rapp, T. Schäfer, E. V. Shuryak, M. Velkovsky. Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 53.
- [3] R. Rapp, T. Schäfer, E. V. Shuryak, M. Velkovsky. Ann. Phys. (N. Y.). 2000. V. 280. P. 35; G. W. Carter, D. I. Diakonov. Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 016004.
- [4] S. V. Molodtsov, A. M. Snigirev, G. M. Zinovjev. Nucl. Phys. B. 2002. V. 106&107. P. 281; S. V. Molodtsov, G. M. Zinovjev. Nucl. Phys. B. 2002. V. 106&107. P. 471; Г. М. Зиновьев, С. В. Молодцов. ЯФ. 2003. Т. 66. С. 1000; С. 1389.

- [5] *D. Förster*. Phys. Lett. B. 1977. V. 66. P. 279; *E. V. Shuryak, J. J. M. Verbaarschot*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 364. P. 255.
- [6] *I. I. Balitsky, A. V. Yung*. Phys. Lett. B. 1986. V. 168. P. 113.
- [7] *S. V. Molodtsov, A. M. Snigirev, G. M. Zinovjev*. Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 056006; Phononlike excitations of instanton liquids and new scale of non-perturbative QCD. In: Lattice Fermions and Structure of the Vacuum. Contributed NATO Advanced Research Workshop on Lattice Fermions and Structure of the Vacuum (Dubna, Russia, 5–9 Oct. 1999). Eds. V. Mitrjushkin, G. Schierholz. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 307; hep-th/9912342; *Г. М. Зиновьев, С. В. Молодцов, А. М. Снигирев*. ЯФ. 2000. Т. 63. С. 975.
- [8] *P. Sikivie, N. Weiss*. Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 3809; 1979. V. 20. P. 487.
- [9] *В. В. Головизнин, С. В. Молодцов, А. М. Снигирев*. ЯФ. 1993. Т. 56. № 6. С. 123.
- [10] *J. Ishida, A. Hosoya*. Progr. Theor. Phys. 1979. V. 62. P. 544.
- [11] *D. I. Diakonov, V. Yu. Petrov*. Nucl. Phys. B. 1984. V. 245. P. 259; *И. В. Мусатов, А. Н. Тавхелидзе, В. Ф. Токарев*. ТМФ. 1991. Т. 86. С. 31; *А. Н. Тавхелидзе, В. Ф. Токарев*. ЭЧАЯ. 1990. Т. 21. С. 1126.
- [12] *E. V. Shuryak*. Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 5370.
- [13] *A. E. Dorokhov, S. V. Esaibegian, A. E. Maximov, S. V. Mikhailov*. Eur. Phys. J. C. 2000. V. 13. P. 331.
- [14] *I. Affleck*. Nucl. Phys. B. 1981. V. 191. P. 429; *O. Espinosa*. Nucl. Phys. B. 1990. V. 343. P. 310.
- [15] *А. М. Поляков*. Калибровочные поля и струны. Черноголовка: ИТФ им. Л. Д. Ландау, 1995.
- [16] *S. V. Molodtsov, G. M. Zinovjev*. Instanton in Euclidean non-abelian field of point-like source. hep-ph/0410395.
- [17] *Д. И. Дьяконов, В. Ю. Петров*. Спонтанное нарушение киральной инвариантности в инстантонном вакууме. В сб.: Труды конференции “Адронная материя в экстремальных условиях”. Ред. В. Шелест, Г. Зиновьев. Киев: Наукова думка, 1986. С. 192; *D. I. Diakonov, V. Yu. Petrov, P. V. Pobylitsa*. Phys. Lett. B. 1989. V. 226. P. 471; *E.-M. Ilgenfritz, M. Müller-Preussker*. Nucl. Phys. B. 1981. V. 184. P. 443; *T. Schäfer, E. V. Shuryak*. Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 323.
- [18] *Д. И. Дьяконов, В. Ю. Петров*. ЖЭТФ. 1984. Т. 86. С. 25.
- [19] *Н. Aoyama, H. Kikuchi*. Nucl. Phys. B. 1992. V. 369. P. 219.
- [20] *J. Smit, A. van der Sijs*. Nucl. Phys. B. 1994. V. 422. P. 349; *E.-M. Ilgenfritz, S. V. Molodtsov, M. Müller-Preusker, A. I. Veselov*. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 1999. V. 73. P. 581.
- [21] *M. I. Polikarpov, A. I. Veselov*. Nucl. Phys. B. 1988. V. 297. P. 34; *M.-C. Chu, J. M. Grandy, S. Huang, J. W. Negele*. Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 6039; *C. Michael, P. S. Spencer*. Phys. Rev. D. 1995. V. 52. P. 4691; *M. G. Pérez, T. G. Kovács, P. van Baal*. Phys. Lett. B. 2000. V. 472. P. 295.
- [22] *J. W. Negele*. Nucl. Phys. (Proc. Suppl.). 1999. V. 73. P. 92.
- [23] *Г. М. Зиновьев, С. В. Молодцов*. Письма в ЭЧАЯ. 2005. Т. 2. № 5. С. 111.

Поступила в редакцию 25.III.2005 г.,
после доработки 4.VI.2005 г.