Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Мардоян, Кольцеобразные функции и $6j$ -символы Вигнера, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 2, 299–310

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2036>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 09:24:40

© 2006 г.

Л. Г. Мардоян*

КОЛЬЦЕОБРАЗНЫЕ ФУНКЦИИ И $6j$ -СИМВОЛЫ ВИГНЕРА

Получено явное выражение для кольцеобразной матрицы, связывающей кольцеобразные функции, относящиеся к разным значениям параметра аксиальности. Найдена связь этой матрицы с $6j$ -символами. Исследовано движение квантовой частицы в кольцеобразной модели с нулевым “затравочным” потенциалом. Получены базисы этой модели, факторизованные в сферических и цилиндрических координатах. Выведена формула, обобщающая разложение Рэлея плоской волны по сферическим волнам в кольцеобразной модели.

Ключевые слова: кольцеобразный потенциал, кольцеобразные функции, межбазисные разложения, $6j$ -символы Вигнера, разложение Рэлея.

1. ВВЕДЕНИЕ

В общем случае кольцеобразные потенциалы имеют вид

$$U(r, \theta) = U(r) + \frac{\Lambda}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (1)$$

где $U(r)$ – любое центрально-симметричное поле, θ – угол между осью z и радиус-вектором частицы, Λ – неотрицательный параметр, характеризующий интенсивность аксиально-симметричной добавки к “затравочному” потенциалу $U(r)$. При $U(r) = -\alpha/r$ и $U(r) = r^2/2$ говорят о кольцеобразном атоме водорода и о кольцеобразном пространственном осцилляторе, соответственно. Обе эти модели точно решаются как в классической, так и в квантовой механике [1]. Для потенциала $U(r) = -\alpha/r$ переменные разделяются в сферических и параболических, а для $U(r) = r^2/2$ – в сферических и цилиндрических координатах [2]. Известны как базисы, соответствующие указанным координатам, так и матрицы межбазисных разложений [3]. Исследованы также симметричные [4] и статистические [5] аспекты этих моделей. Эти системы с разных точек зрения были рассмотрены в работах [6]. В

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия; Ереванский государственный университет, Ереван, Армения.

E-mail: mardoyan@thsun1.jinr.ru, mardoyan@ysu.am

работах [7] рассмотрены динамические системы, которые обобщают задачи о кольцеобразном атоме водорода и о кольцеобразном пространственном осцилляторе (1). Нами также предложена [8] модель суперинтегрируемой системы, обобщающая известную задачу МИК–Кеплера¹⁾ [9] в случае кольцеобразной добавки.

Разделение переменных в сферических координатах r , θ и φ порождает функцию $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$, описывающую угловую зависимость волновой функции при любом “затравочном” потенциале $U(r)$, т.е. функцию, играющую для кольцеобразного поля ту же роль, которую сферические функции играют для центрально-симметричного поля. Параметр δ связан с параметром Λ соотношением

$$\delta = \sqrt{m^2 + 2\Lambda} - |m|, \quad (2)$$

а квантовые числа m и l пробегают значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ и $l = |m|, |m| + 1, \dots$ и при $\delta = 0$ имеют смысл магнитного и орбитального квантовых чисел.

Статья построена следующим образом. Раздел 2 посвящен рассмотрению основной информации, относящейся к кольцеобразным функциям $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$. Затем в разделах 3, 4 решается задача о разложении функции $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$ по функциям $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta')$ и устанавливается связь с $6j$ -символами Вигнера. В разделе 5 рассматривается свободное движение в кольцеобразной модели в сферической и цилиндрической системах координат. Далее в разделе 6 вычислены коэффициенты разложения цилиндрического базиса свободного движения в кольцеобразной модели по сферическому базису и показано, что это разложение обобщает известное разложение Рэлея для плоской волны по сферическим волнам.

2. КОЛЬЦЕОБРАЗНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $\hat{\mathbf{l}}^2$ и $\hat{l}_z$ – операторы квадрата орбитального момента и его z -проекции, а оператор $\widehat{M}$ имеет следующий вид:

$$\widehat{M} = \hat{\mathbf{l}}^2 + \frac{2\Lambda}{\sin^2 \theta}. \quad (3)$$

Кольцеобразные функции $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$ определяются как общие собственные функции операторов $\hat{l}_z$ и $\widehat{M}$, соответствующие собственным значениям m и $(l+\delta)(l+\delta+1)$. Таким образом,

$$\hat{l}_z Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta) = m Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta), \quad (4)$$

$$\widehat{M} Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta) = (l+\delta)(l+\delta+1) Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta). \quad (5)$$

Нормированные условием

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Z_{l'm'}^*(\theta, \varphi; \delta) Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (6)$$

¹⁾Задача МИК–Кеплера – задача Макинтоша–Кизнероса–Кеплера о связанной системе, состоящей из заряженной частицы и диона (дион – частица, которая является источником как электрического, так и магнитного поля).

функции $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$ имеют вид

$$Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta) = N_{lm}(\delta)(\sin \theta)^{|m|+\delta} C_{l-|m|}^{|m|+\delta+1/2}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (7)$$

где $C_n^\nu(x)$ – полиномы Гегенбауэра, а нормировочный множитель $N_{lm}(\delta)$ определяется формулой

$$N_{lm}(\delta) = (-1)^{(m-|m|)/2} 2^{|m|+\delta} \Gamma\left(|m| + \delta + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{(2l+2\delta+1)(l-|m|)!}{4\pi^2 \Gamma(l+|m|+2\delta+1)} \right]^{1/2}.$$

Фазовый множитель здесь выбран так, чтобы при $\delta = 0$ функции $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$ переходили в сферические функции с той фазой, которая принята [10]:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{(m+|m|)/2} \left[\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!} \right]^{1/2} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

В сказанном легко убедиться с помощью следующей формулы [11]:

$$P_l^{|m|}(\cos \theta) = \frac{(-2)^{|m|}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(|m| + \frac{1}{2}\right) (\sin \theta)^{|m|} C_{l-|m|}^{|m|+1/2}(\cos \theta).$$

Численные значения функции $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$ удобно получать, пользуясь формулой [11]

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n! \Gamma(2\nu)} {}_2F_1\left(-n, n+2\nu; \nu + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right),$$

выражающей полиномы Гегенбауэра через гипергеометрическую функцию.

Наконец, приведем представление кольцеобразной функции $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$

$$\begin{aligned} Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta) &= \frac{(-1)^{(m+|m|)/2} e^{i\pi\delta} e^{im\varphi}}{2^{l+\delta} \Gamma(l+\delta+1)} \left[\frac{(2l+2\delta+1) \Gamma(l+|m|+2\delta+1)}{4\pi(l-|m|)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times (\sin \theta)^{-|m|-\delta} \frac{d^{l-|m|}}{(d \cos \theta)^{l-|m|}} (\cos^2 \theta - 1)^{l+\delta}, \end{aligned} \quad (8)$$

которое легко получить, пользуясь формулой Родрига для полиномов Гегенбауэра [11].

3. ОБЩЕЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Теперь рассмотрим разложение кольцеобразной функции $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$ по функциям $Z_{l'm'}(\theta, \varphi; \delta')$, которые относятся к различным операторам $\widehat{M}$. Матрица разложения диагональна по m , так что

$$Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta) = \sum_{l'=|m|}^{\infty} T_{ll'}^m(\delta, \delta') Z_{l'm}(\theta, \varphi; \delta'). \quad (9)$$

Так как система функций $Z_{l'm}(\theta, \varphi; \delta')$ является ортонормированной, то матрица разложения определяется интегралом [12]

$$T_{ll'}^m(\delta, \delta') = D_{ll'}^m(\delta, \delta') \int_{-1}^1 (1-x^2)^{|m|+(\delta+\delta')/2} C_{l-|m|}^{|m|+\delta+1/2}(x) C_{l'-|m|}^{|m|+\delta'+1/2}(x) dx, \quad (10)$$

где $x = \cos \theta$,

$$D_{ll'}^m(\delta, \delta') = 2^{2|m|+\delta+\delta'} \Gamma\left(|m| + \delta + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(|m| + \delta' + \frac{1}{2}\right) \times \\ \times \left[\frac{(2l+2\delta+1)(2l'+2\delta'+1)(l-|m|)!(l'-|m|)!}{4\pi^2 \Gamma(l+|m|+2\delta+1) \Gamma(l'+|m|+2\delta'+1)} \right]^{1/2}. \quad (11)$$

В силу симметрии $C_n^\nu(-x) = (-1)^n C_n^\nu(x)$ интеграл в выражении (10) отличен от нуля лишь тогда, когда числа l и l' имеют одинаковую четность. Из (10) и (11), очевидно, вытекает и следующее свойство симметрии:

$$T_{ll'}^m(\delta, \delta') = T_{l'l}^m(\delta', \delta). \quad (12)$$

Согласно [13]

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{(\alpha+\beta-3)/2-p} C_n^\alpha(x) C_k^\beta(x) dx = {}_4F_3 \left\{ \begin{matrix} \frac{\alpha-\beta}{2} + p + 1, \frac{\alpha-\beta}{2} - p, -\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2} \\ \frac{k-n}{2} + 1, -\frac{n+k}{2} - \beta + 1, \alpha + \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| 1 \right\} \times \\ \times \frac{(-1)^{(k-n)/2}}{2^{2\alpha-1}} \frac{\pi \Gamma(n+2\alpha) \Gamma(\frac{\alpha+\beta-1}{2} - p) \Gamma(\frac{\alpha-\beta}{2} - p) \Gamma(\frac{n+k}{2} + \beta)}{n! (\frac{k-n}{2})! \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(\alpha + \frac{1}{2} + \beta) \Gamma(\frac{n+\alpha-k-\beta}{2} - p) \Gamma(\frac{n+\alpha+k+\beta}{2} - p)}.$$

Здесь предполагается, что $k \geq n$. В нашем случае $p = -1$, так что имеем

$$T_{ll'}^m(\delta, \delta'; l' \geq l) = \frac{(-1)^{(l'-l)/2} E_{ll'}^m(\delta, \delta')}{\Gamma(\frac{l'-l}{2} + 1) \Gamma(\frac{l'-l+\delta-\delta'}{2} + 1)} \times \\ \times {}_4F_3 \left\{ \begin{matrix} -\frac{l-|m|}{2}, -\frac{l-|m|-1}{2}, \frac{\delta-\delta'}{2}, 1 + \frac{\delta-\delta'}{2} \\ |m| + \delta + 1, \frac{l'-l}{2} + 1, -\frac{l+l'-1}{2} - \delta' \end{matrix} \middle| 1 \right\}, \quad (13)$$

где

$$E_{ll'}^m(\delta, \delta') = \frac{\Gamma(\frac{\delta-\delta'}{2} + 1) \Gamma(\frac{\delta+\delta'}{2} + |m| + 1) \Gamma(\frac{l+l'+1}{2} + \delta')}{2^{\delta-\delta'+1} \Gamma(|m| + \delta + 1) \Gamma(\frac{l+l'+\delta+\delta'+3}{2})} \times \\ \times \left[\frac{(2l+2\delta+1)(2l'+2\delta'+1)(l'-|m|)! \Gamma(l+|m|+2\delta+1)}{(l-|m|)! \Gamma(l'+|m|+2\delta'+1)} \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Теперь, зная формулу для $T_{ll'}^m(\delta, \delta'; l' \geq l)$, из нее и из свойства симметрии (12) можно определить и $T_{ll'}^m(\delta, \delta'; l' \leq l)$.

Из разложения (9) следует, что при $\delta = \delta'$ должно выполняться тождество

$$T_{ll'}^m(\delta, \delta) = \delta_{ll'}. \quad (15)$$

Легко убедиться, что

$$T_{ll'}^m(\delta, \delta) = \left[\frac{(2l+2\delta+1)(2l'+2\delta+1)(l'-|m|)! \Gamma(l+|m|+2\delta+1)}{(l-|m|)! \Gamma(l'+|m|+2\delta'+1)} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(-1)^{(l'-l)/2}}{l+l'+2\delta+1} \left[\Gamma\left(\frac{l'-l}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{l-l'}{2} + 1\right) \right]^{-1}.$$

Полученное выражение обращается в нуль при $l' \neq l$ за счет гамма-функций в последних двух сомножителях и равняется единице при $l' = l$. Таким образом, мы приходим к тождеству (15).

Теперь рассмотрим разложение (9) для случая $l = |m| = 0$. Имеем

$$\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\delta'-\delta}{2})}{\Gamma(\delta+\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{\delta+\delta'}{2})}(\sin\theta)^{\delta-\delta'} = \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{(l'+\delta'+1/2)\Gamma(\frac{l'+1}{2})\Gamma(\frac{l'-\delta+\delta'}{2})}{\Gamma(\frac{l'+\delta+\delta'+3}{2})\Gamma(\frac{l'}{2}+\delta'+1)}C_{l'}^{\delta'+1/2}(\cos\theta).$$

Отсюда, учитывая ортогональность полиномов Гегенбауэра [11], получаем

$$\int_0^{\pi} (\sin\theta)^{\delta+\delta'+1} C_l^{\delta'+1/2}(\cos\theta) d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1+\frac{\delta+\delta'}{2})\Gamma(\frac{l+1}{2}+\delta')\Gamma(\frac{l-\delta+\delta'}{2})}{\Gamma(\frac{l}{2}+1)\Gamma(\delta'+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{l'+\delta+\delta'+3}{2})\Gamma(\frac{\delta'-\delta}{2})}.$$

Этот же результат можно получить независимо из равенства [11]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} C_n^{\nu}(x) dx = \\ = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(n+2\nu)}{n!\Gamma(2\nu)\Gamma(\alpha+\beta+2)} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -n, n+2\nu, \alpha+1 \\ \nu+\frac{1}{2}, \alpha+\beta+2 \end{matrix} \middle| 1 \right\} \end{aligned}$$

и формулы [14]

$${}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} a, b, c \\ \frac{a+b+1}{2}, 2c \end{matrix} \middle| 1 \right\} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{a+b+1}{2})\Gamma(c-\frac{a+b-1}{2})\Gamma(c+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{a+1}{2})\Gamma(\frac{b+1}{2})\Gamma(c-\frac{a-1}{2})\Gamma(c-\frac{b-1}{2})}.$$

Таким образом, мы нашли еще одно подтверждение правильности наших результатов (кроме случая $\delta' = \delta$).

Отметим, что при $\delta' = 0$ разложение (9) переходит в разложение кольцеобразной функции $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$ по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Такое разложение необходимо при работе с кольцеобразными моделями, так как оно сводит вычисление матричных элементов от операторов по кольцеобразным функциям к более простой проблеме вычисления матричных элементов от тех же операторов по сферическим функциям.

4. СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ $T_{ll'}^m(\delta, \delta')$ С $6j$ -СИМВОЛАМИ ВИГНЕРА

Согласно (13) матрицы $T_{ll'}^m(\delta, \delta')$ выражаются через гипергеометрическую функцию ${}_4F_3$. Покажем, что это позволяет связать их с $6j$ -символами. Напомним, что $6j$ -символы Вигнера [15] определяются через преобразования между различными схемами сложения трех угловых моментов. Для этого воспользуемся формулой [10]

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a, b, c \\ d, e, f \end{matrix} \right\} = \frac{(a+b+d+e+1)!\Delta(abc)\Delta(cde)\Delta(aef)\Delta(bdf)}{(d-c+e)!(a+e-f)!(b+d-f)!(a+c-d+f)!(c-b-e+f)!} \times \\ \times \frac{(-1)^{a+b+d+e}}{(a+b-c)!} {}_4F_3 \left\{ \begin{matrix} -a-b+c, & c-d-e, & -a-e+f, & -b-d+f \\ -a-b-d-e-1, & -a+c-d+f+1, & -b+c-e+f+1 \end{matrix} \middle| 1 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta(abc) = \left[\frac{(a+b-c)!(a-b+c)!(-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{1/2}.$$

Теперь, сравнивая приведенную формулу с выражениями (13) и (14), можно убедиться в том, что

$$T_{ll'}^m(\delta, \delta') = e^{-i\pi(l+l'+1)/2+\delta'} \left\{ \begin{matrix} a, & b, & c \\ a - \frac{3}{4}, & b + \frac{1}{4}, & f \end{matrix} \right\} \times \\ \times \left[\frac{(l+\delta+\frac{1}{2})(l+\delta'+\frac{1}{2})(\delta-\delta')(2|m|+\delta+\delta')}{(l-l'+\delta-\delta')(l+l'+\delta+\delta'+1)} \right]^{1/2}, \quad (16)$$

где

$$a = \frac{l+|m|+\delta+\delta'}{4}, \quad b = \frac{l'-|m|+\delta'-\delta-2}{4}, \\ c = \frac{l'-l+2|m|+2\delta'-2}{4}, \quad d = \frac{l+l'+2\delta-1}{4}. \quad (17)$$

Теперь найдем рекуррентное соотношение, которому подчиняются коэффициенты $T_{ll'}^m(\delta, \delta')$. Для этого подействуем оператором $\hat{M}$ на разложение (9) и воспользуемся уравнением (5). Получим

$$(l+\delta)(l+\delta+1)Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta) = \\ = \sum_{l'=|m|}^{\infty} T_{ll'}^m(\delta, \delta') \left[(l'+\delta')(l'+\delta'+1) + \frac{2(\Lambda-\Lambda')}{\sin^2 \theta} \right] Z_{l'm}(\theta, \varphi; \delta').$$

Умножим обе части этого соотношения на $\sin \theta Z_{l''m}^*(\theta, \varphi; \delta)$ и проведем интегрирование по телесному углу $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. Учитывая ортонормированность функций $Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta)$, получим

$$2(\Lambda-\Lambda')T_{ll''}^m(\delta, \delta') = \sum_{l'=|m|}^{\infty} T_{ll'}^m(\delta, \delta')(l+\delta-l'-\delta')(l+\delta+l'+\delta'+1)(\sin^2 \theta)_{l''l'},$$

где

$$(\sin^2 \theta)_{l''l'} = \int Z_{l''m}^*(\theta, \varphi; \delta) \sin^2 \theta Z_{l'm}(\theta, \varphi; \delta) d\Omega.$$

Очевидно, что

$$(\sin^2 \theta)_{l''l'} = \delta_{l''l'} - (\cos^2 \theta)_{l''l'}.$$

Для вычисления матричного элемента $(\cos^2 \theta)_{l''l'}$ будем использовать следующее рекуррентное соотношение для полиномов Гегенбауэра [11]:

$$2(n+\nu)x C_n^\nu(x) = (2\nu+n-1)C_{n-1}^\nu(x) + (n+1)C_{n+1}^\nu(x).$$

Приведем окончательный результат:

$$(\sin^2 \theta)_{l''l'} = H_{l'm}(\delta')\delta_{l'',l'-2} + R_{l'm}(\delta')\delta_{l'',l'} + H_{l'+2,m}(\delta')\delta_{l'',l'+2},$$

где

$$H_{l'm}(\delta') = - \left[\frac{(l' - |m|)(l' - |m| - 1)(l' + |m| + 2\delta' - 1)(l' + |m| + 2\delta')}{(2l' + 2\delta' - 1)^2(2l' + 2\delta' - 3)(2l' + 2\delta' + 1)} \right]^{1/2},$$

$$R_{l'm}(\delta') = \frac{2(l' + \delta')(l' + \delta' + 1) + 2(|m| + \delta' - 1)(|m| + \delta' + 1)}{(2l' + 2\delta' - 1)(2l' + 2\delta' + 3)}.$$

Пользуясь этим результатом, можно показать, что матрица $T_{ll'}^m(\delta, \delta')$ удовлетворяет следующему трехчленному рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} [2(\Lambda - \Lambda') - (l + \delta - l' - \delta')(l + \delta + l' + \delta' + 1)R_{l'm}(\delta')]T_{ll'}^m(\delta, \delta') = \\ = (l + \delta - l' - \delta' + 2)(l + \delta + l' + \delta' - 1)H_{l'm}(\delta')T_{l,l'-2}^m(\delta, \delta') + \\ + (l + \delta - l' - \delta' - 2)(l + \delta + l' + \delta' + 3)H_{l'+2,m}(\delta')T_{l,l'+2}^m(\delta, \delta'). \end{aligned}$$

Подставляя сюда (16) и (17), приходим к выводу о том, что $6j$ -символы должны подчиняться рекуррентному соотношению

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ a - \frac{3}{4}, & b + \frac{1}{4}, & f \end{array} \right\} F = \left\{ \begin{array}{ccc} a, & b - \frac{1}{2}, & c - \frac{1}{2} \\ a - \frac{3}{4}, & b - \frac{1}{4}, & f - \frac{1}{2} \end{array} \right\} G_1 + \left\{ \begin{array}{ccc} a, & b + \frac{1}{2}, & c + \frac{1}{2} \\ a - \frac{3}{4}, & b + \frac{3}{4}, & f + \frac{1}{2} \end{array} \right\} G_2,$$

где

$$\begin{aligned} F &= (a - b + c) \left(-a + b + f - \frac{1}{4} \right) - (a - b - c - 1) \left(a + b + f + \frac{9}{4} \right) L, \\ L &= \frac{(2b + c + f + 7/4)(2b + c + f + 11/4) - (2a + c - f - 3/4)(2a + c - f + 5/4)}{2(2b + c + f + 5/4)(2b + c + f + 13/4)}, \\ G_1 &= \frac{(a - b - c)[(b - a + f + 1/4)(b - a + f + 3/4)]^{1/2}}{(2b + c + f + 5/4)(2b + c + f + 9/4)} \times \\ &\quad \times \left\{ \left(a + b + c + \frac{1}{2} \right) [a^2 - (b + c + 1)^2] \left(a + b + f + \frac{1}{4} \right) \left(a + b + f + \frac{5}{4} \right) \right\}^{1/2}, \\ G_2 &= \frac{[(a - b - c - 1)(b - a + f + 5/4)(b - a + f + 7/4)]^{1/2}}{(2b + c + f + 9/4)(2b + c + f + 13/4)} \times \\ &\quad \times \left\{ \left(a + b + c + \frac{3}{2} \right) [a^2 - (b + c + 2)^2] \left(a + b + f + \frac{5}{4} \right) \left(a + b + f + \frac{9}{4} \right) \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Мы не нашли в [10] такого рекуррентного соотношения для $6j$ -символов Вигнера, и не исключено, что оно является новым.

Отметим, что полученное нами разложение относится к разряду общих результатов для кольцеобразных моделей, поскольку оно не зависит от вида центрально-симметричного потенциала $U(r)$ в выражении $U(r, \theta)$. Отсюда следует, что его можно использовать в задачах о разложениях базисов кольцеобразных моделей по базисам соответствующих им центрально-симметричных систем.

5. СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ В КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ МОДЕЛИ

Согласно (1) свободное движение в кольцеобразной модели, когда “затравочный” потенциал $U(r) = 0$, описывается уравнением

$$\left(-\frac{1}{2}\Delta + \frac{\Lambda}{r^2 \sin^2 \theta}\right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (18)$$

Сферический базис в кольцеобразной модели, т.е. решение уравнения (18) в сферических координатах, имеет вид

$$\psi_{klm}(r, \theta, \varphi; \delta) = \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} J_{l+\delta+\frac{1}{2}}(kr) Z_{lm}(\theta, \varphi; \delta), \quad (19)$$

где $k = \sqrt{2E}$, а радиальная волновая функция

$$R_{kl}(r; \delta) = \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} J_{l+\delta+\frac{1}{2}}(kr)$$

нормирована условием

$$\int_0^\infty R_{k'l}(r; \delta) R_{kl}(r; \delta) dr = 2\pi \delta(k - k')$$

и является решением радиального уравнения

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{(l+\delta)(l+\delta+1)}{r^2} \right] R(r; \delta) = 0.$$

В цилиндрических координатах схеме разделения переменных соответствует факторизация

$$\psi(\rho, \varphi, z; \delta) = R(\rho; \delta) e^{ik_z z} \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}},$$

которая приводит к радиальному уравнению

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[\omega^2 - \frac{(|m|+\delta)^2}{\rho^2} \right] R(\rho; \delta) = 0, \quad (20)$$

где $\omega = \sqrt{k^2 - k_z^2}$. Регулярное решение уравнения (20) в терминах функции Бесселя имеет следующее представление:

$$R_{\omega m}(\rho; \delta) = \sqrt{2\pi\omega} J_{|m|+\delta}(\omega\rho).$$

Таким образом, нормированный условием

$$\int \psi_{\omega' k'_z m'}^*(\rho, \varphi, z; \delta) \psi_{\omega k_z m}(\rho, \varphi, z; \delta) dV = 4\pi^2 \delta(\omega - \omega') \delta(k_z - k'_z) \delta_{mm'}$$

цилиндрический базис имеет вид

$$\psi_{k\gamma m}(\rho, \varphi, z; \delta) = \sqrt{k \sin \gamma} J_{|m|+\delta}(k\rho \sin \gamma) e^{ikz \cos \gamma} e^{im\varphi}, \quad (21)$$

где для удобства мы ввели следующие обозначения:

$$k_z = k \cos \gamma, \quad \omega = k \sin \gamma, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi.$$

6. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ РЭЛЕЯ

Рассмотрим разложение цилиндрического базиса (21) свободного движения в кольцеобразной модели по сферическому базису (19). Это разложение можно записать в следующем виде:

$$\psi_{k\gamma m}(\rho, \varphi, z; \delta) = \sum_{l=|m|}^{\infty} W_{k\gamma m}^l(\delta) \psi_{klm}(r, \theta, \varphi; \delta). \quad (22)$$

Наша цель заключается в вычислении матрицы $W_{k\gamma m}^l(\delta)$. Для этого нужно сделать следующее:

- а) подставить в (22) выражения (19) и (21);
- б) обе части разложения (22) умножить на $Z_{lm}^*(\theta, \varphi; \delta)$, проинтегрировать по телесному углу и использовать условие ортонормированности кольцеобразных функций (6);
- в) использовать разложения

$$J_{|m|+\delta}(k\rho \sin \gamma) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{2}k\rho \sin \gamma\right)^{|m|+\delta+s}}{s! \Gamma(|m| + \delta + s + 1)}, \quad e^{ikz \cos \gamma} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(ikz \cos \gamma)^t}{t!},$$

в левой части разложения (22) перейти от цилиндрических координат к сферическим.

Выполняя перечисленные выше шаги, мы приходим к выражению

$$W_{k\gamma m}^l(\delta) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} J_{l+\delta+\frac{1}{2}}(kr) = \frac{\sqrt{\sin \gamma}}{\Gamma(|m| + \delta + 1)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{2}k\rho \sin \gamma\right)^{|m|+\delta+s}}{s! \Gamma(|m| + \delta + s + 1)} \times \\ \times \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(ik \cos \gamma)^t}{t!} r^{|m|+\delta+2s+t} Q_{st}^{lm}(\delta), \quad (23)$$

где

$$Q_{st}^{lm}(\delta) = \int (\cos \theta)^t (\sin \theta)^{2s+|m|+\delta} e^{im\varphi} Z_{lm}^*(\theta, \varphi; \delta) d\Omega.$$

Теперь, пользуясь формулой Родрига для кольцеобразной функции (8) и последовательно интегрируя по частям, убеждаемся в том, что интеграл $Q_{st}^{lm}(\delta)$ отличен от нуля только при условии $2s + t + |m| - l \geq 0$. Таким образом, все члены ряда содержат r в неотрицательной степени, и поэтому в пределе $r \rightarrow 0$ получим

$$W_{k\gamma m}^l(\delta) = \frac{i^{l-|m|}}{\sqrt{\pi k}} \frac{\Gamma(l + \delta + \frac{3}{2})}{\Gamma(|m| + \delta + 1)} (2 \cos \gamma)^{l-|m|} (\sin \gamma)^{|m|+\delta+1/2} \times \\ \times \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{l-|m|}{2} \rfloor} \frac{(\frac{1}{4} \tan^2 \gamma)^s}{s! (|m| + \delta + 1)_s} \frac{Q_{s, l-|m|-2s}^{lm}(\delta)}{(l - |m| - 2s)!}, \quad (24)$$

где

$$\left\lceil \frac{l-|m|}{2} \right\rceil = \begin{cases} \frac{l-|m|}{2}, & \text{если } l-|m| = 2n, \\ \frac{l-|m|-1}{2}, & \text{если } l-|m| = 2n+1. \end{cases}$$

Интеграл $Q_{st}^{lm}(\delta)$ при $t = l - |m| - 2s$ переходит в выражение

$$Q_{s, l-|m|-2s}^{lm}(\delta) = (-1)^{s+(m-|m|)/2} \times \\ \times \frac{2^{l+\delta+1} \Gamma(l+\delta+1)}{\Gamma(2l+2\delta+2)} [\pi(2l+2\delta+1)(l-|m|)! \Gamma(l+|m|+2\delta+1)]^{1/2}.$$

Теперь, подставляя последнее выражение в (24) и пользуясь формулой [16]

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

для матрицы $W_{k\gamma m}^l(\delta)$ получим соотношение

$$W_{k\gamma m}^l(\delta) = (-1)^{(m-|m|)/2} i^{l-|m|} \left[\frac{\pi(2l+2\delta+1) \Gamma(l+|m|+2\delta+1) \sin \gamma}{k(l-|m|)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \frac{(\cos \gamma)^{l-|m|} (\sin \gamma)^{|m|+\delta}}{2^{|m|+\delta} \Gamma(|m|+\delta+1)} \times \\ \times {}_2F_1\left(-\frac{l-|m|}{2}, -\frac{l-|m|-1}{2}; |m|+\delta+1; -\operatorname{tg}^2 \gamma\right).$$

Далее, используя формулы [11], [16]

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \alpha)} (1-z)^{-\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, \gamma - \beta; \alpha + 1 - \beta; \frac{1}{1-z}\right) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} (1-z)^{-\beta} {}_2F_1\left(\beta, \gamma - \alpha; \beta + 1 - \alpha; \frac{1}{1-z}\right), \\ C_{2n}^\lambda(x) = (-1)^n \frac{(\lambda)_n}{n!} {}_2F_1\left(-n, n + \lambda; \frac{1}{2}; x^2\right), \\ C_{2n+1}^\lambda(x) = (-1)^n \frac{(\lambda)_{n+1}}{n!} 2x {}_2F_1\left(-n, n + \lambda + 1; \frac{3}{2}; x^2\right),$$

матрицу $W_{k\gamma m}^l(\delta)$ можно представить через полиномы Гегенбауэра:

$$W_{k\gamma m}^l(\delta) = (-1)^{(m-|m|)/2} i^{l-|m|} \Gamma\left(|m| + \delta + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{(2l+2\delta+1)(l-|m|)!}{2k\Gamma(l+|m|+2\delta+1)} \right]^{1/2} \times \\ \times (\sin \gamma)^{|m|+\delta+1/2} C_{l-|m|}^{|m|+\delta+1/2}(\cos \gamma), \quad (25)$$

которое имеет место как для четных, так и для нечетных $l - |m|$.

Выражения (22) и (25) полностью определяют разложение цилиндрического базиса свободного движения в кольцеобразной модели по сферическому базису.

Легко проверить, что разложение (22) при $m = \delta = \gamma = 0$ переходит в известное разложение Рэлея для плоской волны по сферическим волнам:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i}{k} \sqrt{\pi(2l+1)} \psi_{kl0}(r, \theta, \varphi), \quad \psi_{klm}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Выражение (22) можно привести к виду, известному из теории специальных функций. Подставляя в (22) явные выражения сферического (19), цилиндрического (21) базисов и матрицы $W_{k\gamma m}^l(\delta)$ (25) и переходя к сферическим координатам, получим

$$\begin{aligned} & (\sin \theta \sin \gamma)^{-|m|-\delta} J_{|m|+\delta}(kr \sin \theta \sin \gamma) e^{ikr \cos \theta \cos \gamma} = \\ & = \frac{2^{2|m|+2\delta}}{\sqrt{\pi kr}} \left[\Gamma\left(|m| + \delta + \frac{1}{2}\right) \right]^2 \sum_{l=|m|}^{\infty} \frac{i^{l-|m|} \Gamma(l + \delta + \frac{1}{2})(l - |m|)!}{\Gamma(l + |m| + 2\delta + 1)} \times \\ & \quad \times J_{l+\delta+\frac{1}{2}}(kr) C_{l-|m|}^{|m|+\delta+1/2}(\cos \theta) C_{l-|m|}^{|m|+\delta+1/2}(\cos \gamma). \end{aligned} \quad (26)$$

Вводя новые обозначения

$$y = kr, \quad \lambda = |m| + \delta + \frac{1}{2}, \quad n = l - |m|,$$

перепишем формулу (26) как

$$\begin{aligned} & (\sin \theta \sin \gamma)^{(1/2)-\lambda} J_{\lambda+\frac{1}{2}}(y \sin \theta \sin \gamma) e^{iy \cos \theta \cos \gamma} = \\ & = \frac{2^{2\lambda-1/2}}{\sqrt{\pi y}} [\Gamma(\lambda)]^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n n! (\lambda + n)}{\Gamma(2\lambda + n)} J_{\lambda+n}(y) C_n^{\lambda}(\cos \theta) C_n^{\lambda}(\cos \gamma). \end{aligned} \quad (27)$$

Далее, если учесть равенства

$$J_{\lambda}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z/2)^{2n+\lambda}}{n! \Gamma(n + \lambda + 1)}, \quad C_n^{\lambda}(1) = \frac{(2\lambda)_n}{n!},$$

то при $\gamma = 0$ получим, что соотношение (27) преобразуется в формулу

$$e^{ixy} = \Gamma(\lambda) \left(\frac{y}{2}\right)^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (n + \lambda) J_{n+\lambda}(y) C_n^{\lambda}(x), \quad x = \cos \theta. \quad (28)$$

Обе формулы (27) и (28) приведены в книге [11].

Таким образом, мы, во-первых, убедились в правильности нашего результата (25) и, во-вторых, нашли связь свободной кольцеобразной модели с конкретной областью теории специальных функций.

Благодарности. В заключение автор выражает благодарность А. Н. Сисакяну и Г. С. Погосяну за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. М.: Наука, 1973; J. Friš, V. Mandrossov, Ya. A. Smorodinsky, M. Uhler, P. Winternitz. Phys. Lett. 1965. V. 16. P. 354; A. A. Makarov, Ya. A. Smorodinsky, Kh. Valiev, P. Winternitz. Nuovo Cimento. A. 1967. V. 52. P. 1061; П. Винтерниц, Я. А. Смородинский, М. Уэллрж, И. Фриш. ЯФ. 1967. Т. 4. С. 625; N. W. Evans. Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 5666; Phys. Lett. A. 1990. V. 147. P. 483; J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 3369.

- [2] *H. Hartmann.* Theor. Chim. Acta. 1972. V. 24. P. 201; *H. Hartmann, R. Schuch, J. Radke.* Theor. Chim. Acta. 1976. V. 42. P. 1; *H. Hartmann, R. Schuch.* Int. J. Quant. Chem. 1980. V. 18. P. 125; *C. Quesne.* J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 3093.
- [3] *И. В. Луценко, Г. С. Погосян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян.* ТМФ. 1990. Т. 83. С. 419; *A. N. Sissakian, I. V. Lutsenko, L. G. Mardoyan, G. S. Pogosyan.* The generalization of interbasis oscillator expansions “cylinder-sphere” in the field of a ring-shaped potential. Commun. JINR № P2-89-814. Dubna: JINR, 1989.
- [4] *C. C. Gerry.* Phys. Lett. A. 1986. V. 118. P. 445; *M. Kibler, P. Winternitz.* J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 4097; *Yu. I. Granovskii, A. S. Zhedanov, I. M. Lutsenko.* J. Phys. A. 1991. V. 24. P. 3887; *A. S. Zhedanov.* J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 4633.
- [5] *I. V. Lutsenko, A. G. Maghakian, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan.* Clusterisation of quantum states in the Hartmann model. Commun. JINR № P2-92-48. Dubna: JINR, 1992; Ring-shaped quantum oscillator: Hidden symmetry generates statistics. Commun. JINR № P2-92-503. Dubna: JINR, 1992.
- [6] *M. Kibler, T. Negadi.* Int. J. Quant. Chem. 1984. V. 26. P. 405; *I. Sökmén.* Phys. Lett. A. 1986. V. 115. P. 249; *L. Chetouani, L. Guechi, T. F. Hammann.* Phys. Lett. A. 1987. V. 125. P. 277; *J. Math. Phys.* 1992. V. 33. P. 3410; *A. Guha, S. Mukherjee.* J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 840; *M. Kibler, P. Winternitz.* Phys. Lett. A. 1990. V. 147. P. 338; *M. V. Carpio-Bernido.* J. Phys. A. 1991. V. 24. P. 3013; *J. Math. Phys.* 1991. V. 32. P. 1799; *O. F. Gal’bert, Yu. A. Granovskii, A. S. Zhedanov.* Phys. Lett. A. 1991. V. 153. P. 177; *M. Kibler, G.-H. Lamot, P. Winternitz.* Int. J. Quant. Chem. 1992. V. 43. P. 625; *M. Kibler, C. Campigotto.* Int. J. Quant. Chem. 1993. V. 45. P. 209; *C. Grosche, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian.* Fortschr. Phys. 1995. V. 43. P. 453.
- [7] *M. Kibler, L. G. Mardoyan, G. S. Pogosyan.* Int. J. Quant. Chem. 1994. V. 52. P. 1301; 1997. V. 63. P. 133.
- [8] *L. G. Mardoyan.* J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 4981; *Л. Г. Мардоян.* ЯФ. 2005. Т. 68. С. 1808; quant-ph/0310143.
- [9] *D. Zwanziger.* Phys. Rev. 1968. V. 176. P. 1480; *H. McIntosh, A. Cisneros.* J. Math. Phys. 1970. V. 11. P. 896.
- [10] *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
- [11] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974.
- [12] *Н. Я. Виленкин.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.
- [13] *M. Rashid.* J. Phys. A. 1986. V. 19. P. 2505.
- [14] *W. N. Bailey.* Generalized Hypergeometric Series (Cambridge Math. Tracts № 32). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1935.
- [15] *E. Wigner.* On the matrices which reduce the Kronecker products of representations of simple reducible groups. In: Quantum Theory of Angular Momentum. Eds. L. C. Biedenharn, H. van Dam. N.Y.: Acad. Press., 1965. P. 87.
- [16] *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 9.III.2005 г.