Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Мартынов, Общая теория распространения звуковых волн в жидкостях и газах, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 2, 340–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2039>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 09:15:58

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

Рассмотрен процесс распространения звуковой волны малой амплитуды в жидкостях и газах. С помощью уравнений гидродинамики получено точное дисперсионное уравнение, которое в безразмерных переменных содержит всего две материальные константы p и q . Получено точное решение дисперсионного уравнения, справедливое при всех значениях параметров и всех частотах вплоть до гиперзвуковых. Это позволило в аналитическом виде установить точный вид зависимости скорости звука c , волнового вектора k и коэффициента затухания χ от частоты ω и от безразмерных материальных констант p , q . Исследовано поведение решения в звуковом и ультразвуковом диапазонах при $\omega < 10^7 \text{ с}^{-1}$. Для этого интервала частот получено выражение для коэффициента затухания, отличное от формулы Кирхгофа. Показано, что при всех гиперзвуковых частотах скорость звука c и волновой вектор k имеют конечные значения, отличные от нуля. В то же время существует некоторая максимальная частота $\omega_{\text{max}} \approx 10^{11} - 10^{12} \text{ с}^{-1}$, при которой коэффициент затухания χ обращается в нуль. Это значение частоты определяет границу применимости уравнений гидродинамики.

Ключевые слова: гидродинамика, звук, дисперсионное уравнение, релаксационная теория.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, уравнения гидродинамики представляют собой не что иное, как законы сохранения массы, импульса и энергии [1]. Поэтому, казалось бы, они должны описывать любые макроскопические процессы, протекающие в жидкостях и газах. Однако в середине XX века Трусделл, анализируя процесс распространения звуковой волны, пришел к выводу, что решение уравнений гидродинамики приводит к формулам, противоречащим эксперименту [2], [3]. Так как в справедливости законов сохранения сомневаться не приходится, подобное противоречие могло возникнуть только или вследствие каких-то неточностей в формулировке уравнений

*Институт физической химии РАН, Москва, Россия. E-mail: gamartyn@mtu-net.ru

гидродинамики, или в результате некорректности использованного при их решении метода. В свое время восторжествовала первая точка зрения, что в конечном счете привело к созданию релаксационной теории распространения звука, опирающейся на видоизмененные уравнения гидродинамики [3]. Однако недавно была опубликована серия статей, в которой был дан вывод уравнений гидродинамики из уравнений Гамильтона, описывающих движение каждой молекулы и каждого атома жидкости в отдельности [4], [5]. Из этих работ следует, что уравнения гидродинамики в их традиционном виде должны иметь чрезвычайно широкую область применимости: в интервале частот от нуля до 10^{12} с^{-1} они должны описывать любые макроскопические процессы переноса, протекающие в жидкостях и газах [5], [6]. Этот вывод находится в прямом противоречии с результатами, полученными Труделлом, так как расхождение между его формулами и результатами эксперимента наступает уже при частотах $\omega \approx 10^6\text{--}10^7 \text{ с}^{-1}$ [3]. Возникшее несоответствие заставило нас вновь вернуться к проблеме распространения звука и заново проанализировать ее предпосылки и результаты.

Решение Труделла является приближенным. Ниже мы получим точное решение уравнений гидродинамики, из которого следует, что никаких видимых противоречий с данными эксперимента нет. Но окончательный ответ, конечно, может быть получен только в результате тщательного сопоставления опытных данных с предсказаниями теории, что должно быть предметом отдельного исследования.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Согласно [5] система уравнений гидродинамики включает в себя уравнение непрерывности (закон сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v_\alpha}{\partial r_\alpha}, \quad (1)$$

уравнение Навье–Стокса (закон сохранения импульса)

$$\rho \frac{dv_\alpha}{dt} = P_\rho \frac{\partial \rho}{\partial r_\alpha} + P_\theta \frac{\partial \theta}{\partial r_\alpha} + \tilde{\eta} \Delta v_\alpha + \left(\tilde{\xi} + \frac{1}{3} \tilde{\eta} \right) \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \frac{\partial v_\beta}{\partial r_\beta} \quad (2)$$

и уравнение баланса внутренней энергии (уравнение теплопроводности)

$$\frac{d\theta}{dt} - g \frac{d\rho}{dt} = a \Delta \theta - b \Delta \rho - \frac{1}{\rho c_V} \tilde{P}_{\alpha\beta} \tilde{D}_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

Здесь приняты следующие обозначения: ρ – плотность вещества, t – время, $\vec{v}$ – скорость движения жидкости, $\vec{r}$ – координата, P – равновесное давление, $P_\rho = (\partial P / \partial \rho)_\theta$, $P_\theta = (\partial P / \partial \theta)_\rho$, $\tilde{\eta}$ – сдвиговая вязкость, $\tilde{\xi}$ – объемная вязкость, $a = \lambda / (\rho c_V)$ – коэффициент температуропроводности, λ – коэффициент теплопроводности, c_V – теплоемкость при постоянном объеме, $b = \chi / (\rho c_V)$ и $g = \theta P_\theta / (\rho^2 c_V)$, χ – коэффициент потенциалопроводности. Кроме того, тензор напряжений

$$P_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} P - \eta \tilde{D}_{\alpha\beta} - \xi \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial r_\beta}, \quad (4)$$

оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \quad (5)$$

и тензор скоростей

$$\tilde{D}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial r_\alpha} - 2\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial r_\beta} \right). \quad (6)$$

Уравнения (1)–(3) отличаются от традиционных уравнений гидродинамики только тем, что в уравнение теплопроводности (3) включен член $b\Delta\rho$, учитывающий процесс переноса потенциальной энергии (в случае газов коэффициент теплопроводности $\chi = 3\eta P_\rho/(2\rho m)$, где m – масса частиц; см. [7]). В традиционных уравнениях гидродинамики он обычно опускается. Его включение не может повлиять на окончательные выводы, так как приводит к простому переопределению безразмерных констант, входящих в дисперсионное уравнение. Это, однако, не исключает того, что при численном сопоставлении полученных формул с данными эксперимента его роль может оказаться значительной.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением звука малой амплитуды, при котором отклонения $\delta\rho$, $\delta\vec{v}$ и $\delta\theta$ от равновесных значений $\rho_0 = \text{const}$, $\vec{v}_0 = \text{const}$, $\theta_0 = \text{const}$ достаточно малы. Полагая

$$\rho(r, t) = \rho_0 + \delta\rho(r, t), \quad \vec{v}(r, t) = \vec{v}_0 + \delta\vec{v}(r, t), \quad \theta(r, t) = \theta_0 + \delta\theta(r, t) \quad (7)$$

и пренебрегая квадратичными членами по $\delta\rho$, $\delta\vec{v}$ и $\delta\theta$, получим систему двух уравнений

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\eta \frac{\partial}{\partial t} + P_\rho \right) \Delta \right] \delta\rho(r, t) = P_\theta \Delta \delta\theta(r, t), \quad (8)$$

$$\left(g \frac{\partial}{\partial t} - b\Delta \right) \delta\rho(r, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - a\Delta \right) \delta\theta(r, t), \quad (9)$$

где Δ – лапласиан и константы

$$\begin{aligned} \eta = \frac{1}{\rho} \left(\tilde{\zeta} + \frac{4}{3} \tilde{\eta} \right) &> 0, \quad g = \frac{\theta P_\theta}{\rho^2 c_V} > 0, \quad b = \frac{\chi}{\rho c_V} > 0, \\ P_\rho = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_\theta &> 0, \quad P_\theta = \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \right)_\rho > 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (8), (9) отличаются от тех, которые рассматривались Трусделлом в работе [2], только дополнительным членом $b\Delta\rho$ в (9), что, как уже отмечалось, для дальнейшего несущественно.

3. ФОРМУЛА КИРХГОФА

Решение системы уравнений (8), (9) будем искать в виде волн плотности и температуры, бегущих вдоль оси z :

$$\delta\rho = L e^{i(\omega t - \vec{k}z)}, \quad \delta\theta = M e^{i(\omega t - \vec{k}z)}, \quad (11)$$

где комплексный волновой вектор $\tilde{k} = k - ix$, k – стандартный волновой вектор и x – стандартный коэффициент затухания. В этих обозначениях скорость звука $c = \omega/k$.

Подставляя (11) в (9), получим соотношение между амплитудами M и L :

$$M = \frac{i\omega g}{a\tilde{k}^2 + i\omega} L. \quad (12)$$

Исключая затем с помощью (12) амплитуду M из (8), получим после сокращения на произвольную амплитуду звуковой волны L комплексное дисперсионное уравнение

$$-\omega^2 + \tilde{k}^2(i\eta\omega + P_\rho) = -\tilde{k}^2 P_\theta \frac{ig\omega}{a\tilde{k}^2 + i\omega}. \quad (13)$$

Приравнивая нулю действительную и мнимую части этого выражения, Кирхгоф получил систему двух дисперсионных уравнений для определения функций $c = c(k)$, $x = x(k)$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}c^2k^2(k^2 - x^2) - 2ck^2x[2a\eta(k^2 - x^2) + P_S] - \tilde{q}(k^4 - 6k^2x^2 + x^4) &= 0, \\ c^3k^2 - 2\tilde{p}c^2k^2x - c[a\eta(k^4 - 6k^2x^2 + x^4) + P_S(k^2 - x^2)] + 4\tilde{q}k(k^2 - x^2) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\tilde{p} = a + \eta, \quad \tilde{q} = aP_\rho, \quad P_S = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \gamma P_\rho, \quad \gamma = \frac{c_P}{c_V}, \quad (15)$$

S – энтропия, c_P – теплоемкость при постоянном давлении. В первоначальные выражения ни P_S , ни c_P не входили, они появились в результате применения известной формулы термодинамики [8], согласно которой

$$\theta \frac{P_\theta^2}{P_\rho} = \rho^2(c_P - c_V) = \rho^2 c_V(\gamma - 1). \quad (16)$$

Следуя за Кирхгофом, Трусделл решал систему уравнений (14) путем разложения всех функций в ряд по степеням квадрата волнового вектора k^2 , что, как известно, для коэффициента затухания x в первом порядке по k^2 приводит к формуле Кирхгофа

$$\frac{x}{\omega^2} = \frac{1}{2c_0^3} \left(\eta + \frac{\gamma - 1}{\gamma} a \right), \quad (17)$$

а при учете членов порядка k^4 – к формулам Трусделла.

Однако решение дисперсионного уравнения путем разложения $c(k)$, $x(k)$ в ряд по степеням волнового вектора k некорректно по той причине, что оно нарушает основное волновое соотношение $k = \omega/c$. Действительно, из него следует уравнение

$$\omega = k(c_0 + c_2k^2 + c_4k^4 + \dots).$$

Это уравнение имеет решение только при $k = \omega = 0$; при $\omega \neq 0$ оно решений не имеет. Поэтому разложение по k^2 позволяет получить правильное значение нулевого члена

ряда (т.е. скорость звука при нулевой частоте) и приводит к ошибочным результатам во всех остальных случаях.

Исходное дисперсионное уравнение (13) содержит три неизвестных величины: частоту ω , волновой вектор k и коэффициент затухания x . Физический смысл этих величин различен: частота является параметром, характеризующим источник звука, тогда как волновой вектор и коэффициент затухания определяют реакцию среды на внешнее воздействие. Поэтому параметры источника (т.е. частоту) можно менять по собственному желанию, в то время как волновой вектор и коэффициент затухания определяются материальными параметрами среды и, следовательно, менять их по собственному желанию мы не можем. Из этого очевидного факта следует, что разложение ω по степеням k , т.е. определение зависимости внешнего воздействия от свойств среды, бессмысленно; представляют интерес только обратные зависимости $k = k(\omega)$, $x = x(\omega)$, характеризующие реакцию среды на внешнее воздействие. Прекрасно понимая это, Кирхгоф заменил в уравнении (13) величину ω на скорость звука $c = \omega/k$, после чего частота вообще исчезла из дисперсионных уравнений (14). Но в формуле Кирхгофа не учтено, что скорость звука, как и волновой вектор, также определяется свойствами среды. Поэтому формулы Кирхгофа описывают зависимость свойств среды от свойств той же среды; переход от них к интересующим нас зависимостям $c(\omega)$, $k(\omega)$, $x(\omega)$ невозможен.

Правильный подход к построению решения дисперсионного уравнения (13) предполагает сначала определение функций $k = k(\omega)$, $x = x(\omega)$, а затем нахождение скорости звука $c(\omega) = \omega/k(\omega)$ по известному значению $k = k(\omega)$. Полученные таким образом выражения для $c(\omega)$, $k(\omega)$, $x(\omega)$ уже можно разлагать в ряд по ω , не нарушая при этом ни одно из известных положений теории звука. Именно так мы и будем действовать в дальнейшем.

4. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ В БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Полученные выражения содержат около десятка материальных констант. Поэтому первое, что надо сделать, – это перейти к безразмерным переменным и тем самым сократить количество независимых параметров.

Вернемся к исходному выражению (13), которое запишем в виде биквадратного уравнения

$$\tilde{k}^4(\tilde{q} + ia\eta\omega) + \tilde{k}^2[-(a\omega^2 + \eta\omega^2) + i\omega(P_\rho + gP_\theta)] - i\omega^3 = 0. \quad (18)$$

Кроме того, учтем, что согласно (17)

$$P_\rho + gP_\theta = P_\rho + \frac{\theta P_\theta^2}{\rho^2 c_V} = P_\rho + \frac{P_\rho}{\rho^2 c_V} \theta \frac{P_\theta^2}{P_\rho} = P_\rho [1 + (\gamma - 1)] = \gamma P_\rho = c_0^2, \quad (19)$$

где $c_0 = \sqrt{\gamma P_\rho} = \sqrt{P_S}$ – скорость звука при нулевой частоте. Подставляя эти

выражения в (18), получим

$$\tilde{k}^4(\tilde{q} + ia\eta\omega) + \tilde{k}^2(-\tilde{p}\omega^2 + ic_0^2\omega) - i\omega^3 = 0, \quad (20)$$

что можно переписать в виде

$$\tilde{k}^4 a\eta \left(\frac{\tilde{q}}{a\eta\omega} + i \right) + \tilde{k}^2 c_0^2 \left(-\frac{\tilde{p}}{c_0^2}\omega + i \right) - i\omega^2 = 0. \quad (21)$$

Определим теперь нормировочную частоту с помощью соотношения $\omega_0 = c_0^2/\sqrt{a\eta}$ и положим

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (22)$$

(для газов $\omega_0 \approx 3 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$, для воды $\omega_0 \approx 10^7 \text{ с}^{-1}$). Разделив все члены (21) на ω_0^2 , получим

$$\tilde{k}^4 \frac{(a\eta)^2}{c_0^2} \left(\frac{\tilde{q}}{c_0^2 \sqrt{a\eta}} \frac{1}{\Omega} + i \right) + \tilde{k}^2 \frac{a\eta}{c_0^2} \left(-\frac{\tilde{p}}{\sqrt{a\eta}} \Omega + i \right) - i\Omega^2 = 0. \quad (23)$$

Вводя новые безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \tilde{k} \frac{\sqrt{a\eta}}{c_0}, \quad q = \frac{\tilde{q}}{c_0^2 \sqrt{a\eta}} = \frac{aP_\rho + bP_\theta}{c_0^2 \sqrt{a\eta}} > 0, \\ p &= \frac{\tilde{p}}{\sqrt{a\eta}} = \frac{a + \eta}{\sqrt{a\eta}} = \sqrt{\frac{a}{\eta}} + \sqrt{\frac{\eta}{a}} \geq 2, \end{aligned}$$

запишем дисперсионное уравнение в виде

$$\tilde{K}^4(q + i\Omega) + \tilde{K}^2\Omega(-p\Omega + i) - i\Omega^3 = 0.$$

Наконец, умножая его на i и полагая

$$\tilde{K}^* = \frac{\tilde{K}}{\Omega} = \frac{K}{\Omega} - i\frac{X}{\Omega} = K^* - iX^*,$$

получим биквадратное уравнение для определения комплексного волнового вектора:

$$\tilde{K}^{*4}\Omega(\Omega - iq) + \tilde{K}^{*2}(1 + ip\Omega) - 1 = 0, \quad (24)$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{K}^{*2} = \frac{1 + ip\Omega}{2\Omega(\Omega - iq)} \left[\sqrt{1 + 4\Omega \frac{\Omega - iq}{(1 + ip\Omega)^2}} - 1 \right] = A(\Omega) - iB(\Omega). \quad (25)$$

Поскольку $(\tilde{K}^*)^2 = (K^* - iX^*)^2 = K^{*2} - X^{*2} - 2iK^*X^*$, то введенные нами в (25) функции A и B связаны с K^* , X^* соотношениями $K^{*2} - X^{*2} = A$ и $X^* = B/(2K^*)$. Подставляя $X^* = B/(2K^*)$ в уравнение для K^{*2} , получим биквадратное уравнение

$$4K^{*4} - 4AK^{*2} - B^2 = 0 \quad (26)$$

для определения безразмерного коэффициента затухания $K^* = K/\Omega$. Оно отличается от исходного уравнения (25) тем, что содержит только действительные величины. Общее решение его имеет вид

$$K = \Omega \sqrt{\frac{1}{2}(A + \sqrt{A^2 + B^2})}, \quad C = \frac{\Omega}{K} = \sqrt{\frac{2}{A + \sqrt{A^2 + B^2}}}, \quad (27)$$

$$\frac{X}{\Omega^2} = \frac{B}{2K} = \frac{\sqrt{2}B}{\Omega \sqrt{A + \sqrt{A^2 + B^2}}},$$

где $C = c/c_0$ – безразмерная скорость звука. Эти выражения, являющиеся точным следствием линейных уравнений гидродинамики (8), (9), в параметрическом виде определяют общий вид решения дисперсионного уравнения, поскольку при их получении никаких приближений не делалось. Очевидно, что они удовлетворяют условию $\omega = kc$.

5. ЗВУКОВОЙ И УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ДИАПАЗОНЫ

Теперь остается только найти конкретный вид функций $A = A(\Omega)$, $B = B(\Omega)$. Эта задача особенно просто решается в случае звуковых и ультразвуковых частот, для которых выполняется неравенство $\Omega \ll 1$ (поскольку $\omega_0 \approx 10^7 \text{ с}^{-1}$, то согласно (22) это неравенство предполагает, что $\omega \ll 10^7 \text{ с}^{-1}$).

Поскольку $\Omega \ll 1$, то в выражении (25) член, пропорциональный Ω и стоящий под знаком корня, можно считать малой величиной. Разлагая корень по этому параметру, получим

$$\tilde{K}^{*2} = \frac{1 + ip\Omega}{2\Omega(\Omega - iq\Omega)} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} 4\Omega \frac{\Omega - iq\Omega}{(1 + ip\Omega)^2} + \dots \right] - 1 \right\} = \frac{1}{1 + ip\Omega} = \frac{1 - ip\Omega}{1 + p^2\Omega^2}. \quad (28)$$

Отсюда $A = 1/(1 + p^2\Omega^2)$, $B = p\Omega/(1 + p^2\Omega^2)$, что дает

$$K = \Omega \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + p^2\Omega^2}}{2(1 + p^2\Omega^2)}}, \quad C = \frac{\Omega}{K} = \sqrt{\frac{2(1 + p^2\Omega^2)}{1 + \sqrt{1 + p^2\Omega^2}}}, \quad (29)$$

$$\frac{X}{\Omega^2} = \frac{p^2}{\sqrt{2(1 + p^2\Omega^2)(1 + \sqrt{1 + p^2\Omega^2})}}.$$

В этом приближении зависимость искомых величин от материальной константы $q = (aP_\rho + bP_\theta)/(c_0^2 \sqrt{a\eta})$ (тем самым зависимость от коэффициента потенциальнопроводности χ) исчезает, остается только зависимость от $p = \sqrt{a/\eta} + \sqrt{\eta/a}$. Так как величина p симметричным образом зависит от a и η , то согласно (29) системы с одинаковыми отношениями $m = \eta/a$ должны вести себя одинаковым образом (закон подобия). Однако при $a \gg \eta$ в системе доминирует тепловой механизм затухания звуковой волны, а при $\eta \gg a$ – вязкостный (кинетический).

В размерных переменных формулы (29) записываются в виде

$$k = \omega \sqrt{\frac{c_0^4 + \sqrt{c_0^4 + \tilde{p}^2 \omega^2}}{2(c_0^4 + \tilde{p}^2 \omega^2)}}, \quad c = \sqrt{\frac{2(c_0^4 + \tilde{p}^2 \omega^2)}{c_0^2 + \sqrt{c_0^4 + \tilde{p}^2 \omega^2}}}, \quad (30)$$

$$\frac{x}{\omega^2} = \frac{\tilde{p}}{\sqrt{2(c_0^4 + \tilde{p}^2 \omega^2)(c_0^2 + \sqrt{c_0^4 + \tilde{p}^2 \omega^2})}},$$

где константа $\tilde{p} = a + \eta$ симметричным образом зависит от коэффициента температуропроводности $a = \lambda/(\rho c_V)$ и обобщенной вязкости $\eta = \frac{1}{\rho}(\tilde{\zeta} + 4\tilde{\eta}/3)$. Так как объемная вязкость $\tilde{\zeta}$ неизвестна, эти формулы могут быть использованы для ее определения.

Если выполняется неравенство $\tilde{p}\omega \ll c_0^2$, то соотношения (30) упрощаются:

$$\frac{x}{\omega^2} \rightarrow \frac{a + \eta}{2c_0^3}, \quad c \rightarrow c_0 = \sqrt{\gamma P_\rho} = \sqrt{P_S}, \quad k \rightarrow k_0 = \frac{\omega}{c_0}. \quad (31)$$

Полученное таким образом выражение для коэффициента затухания x отличается от формулы Кирхгофа (17) лишь тем, что вместо $(\gamma - 1)/\gamma$ в (31) стоит единица. Как отмечалось выше, причина этого расхождения в том, что формула Кирхгофа не является последовательным решением дисперсионного уравнения.

Если выполняется обратное неравенство¹⁾ $\tilde{p}\omega \gg c_0^2$, формулы (30) принимают вид

$$x \rightarrow \frac{\omega^{1/2}}{\sqrt{2(a + \eta)}}, \quad c \rightarrow \sqrt{2(a + \eta)} \omega^{1/2}, \quad k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2(a + \eta)}} \omega^{1/2}. \quad (32)$$

Отсюда следует, что при $\tilde{p}\omega \gg c_0^2$ затухание звуковой волны происходит значительно медленнее, чем при $\tilde{p}\omega \ll c_0^2$, так как в этой области частот $x \sim \sqrt{\omega}$ вместо $x \sim \omega^2$. Кроме того, согласно (32) коэффициент затухания уменьшается с ростом вязкости, так как $x \sim 1/\sqrt{\eta}$ при $\eta \rightarrow \infty$. В этом нет ничего удивительного, так как очень вязкие жидкости типа битума или стекла по своим свойствам похожи на твердые тела, а в твердых телах, как известно, звук распространяется достаточно хорошо.

6. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Получим теперь общие выражения для функций $K(\Omega; p, q)$, $X(\Omega; p, q)$, $C(\Omega; p, q)$, справедливые при всех частотах и при всех значениях материальных констант. Для этого запишем (25) в виде

$$\tilde{K}^{*2} = \frac{\Omega + iq}{2\Omega(\Omega^2 + q^2)} (-1 - ip\Omega + \sqrt{1 + 2i\Omega(p - 2q) - \Omega^2(p^2 - 4)}) \quad (33)$$

¹⁾Этот случай реализуется, например, в критической точке, где $c_0 = \sqrt{\gamma(\partial P/\partial \rho)} = 0$ и где коэффициент поглощения на единицу длины волны достигает своего максимального значения $\mu = x/k = 1$. Согласно (32) в критической точке при $\omega = 0$ скорость звука обращается в нуль, с ростом ω она начинает возрастать, а затем при нарушении неравенства $\tilde{p}\omega \gg c_0^2$ перестает зависеть от частоты, что и подтверждается данными эксперимента [9].

(здесь мы поставили перед корнем знак плюс, поскольку в пределе $\Omega \rightarrow 0$ должно выполняться условие $\tilde{K}^* = 1$, следующее непосредственно из (31); при знаке минус это условие удовлетворено быть не может). Стоящее в (33) под знаком корня выражение можно записать в виде $a + ib$, где $a = 1 - \Omega^2(p^2 - 4)$, $b = 2\Omega(p - 2q)$.

Преобразуем теперь подкоренное выражение следующим образом:

$$a + ib = (a^2 + b^2) \left(\frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = (a^2 + b^2)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = (a^2 + b^2)e^{i\varphi}.$$

В результате получим

$$\sqrt{a + ib} = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + a)} + i \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - a)},$$

где

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{a^2 + b^2} \right)}, \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{a^2 + b^2} \right)}.$$

Так как

$$a^2 + b^2 = 1 + 2\Omega^2[p^2 + 4 - 8q(p - q)] + \Omega^4(p^2 - 4)^2,$$

то

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sin \frac{\varphi}{2} = \Omega R, \quad \sqrt{a^2 + b^2} \cos \frac{\varphi}{2} = Q,$$

где

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{1}{2} \{ [3p^2 - 16(p - q)] + \Omega^2(p^2 - 4)^2 \}}, \\ Q &= \sqrt{\frac{1}{2} \{ 2 + \Omega^2[p^2 + 12 - 16q(p - q)] + \Omega^4(p^2 - 4)^2 \}}. \end{aligned} \quad (34)$$

В этих обозначениях выражение (33) записывается в виде

$$\tilde{K}^{*2} = \frac{\Omega + iq}{2\Omega(q^2 + \Omega^2)} \left[\left(-1 + \sqrt{a^2 + b^2} \cos \frac{\varphi}{2} \right) + i \left(-p\Omega + \sqrt{a^2 + b^2} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right],$$

откуда

$$A = \frac{1}{2(q^2 + \Omega^2)} [q(p - R) + (Q - 1)], \quad (35)$$

$$B = \frac{1}{2(q^2 + \Omega^2)} \left[q \frac{1 - Q}{\Omega} + \Omega(p - R) \right]. \quad (36)$$

Подставляя (35), (36) в (29), найдем искомые значения параметров звуковой волны.

7. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Как известно, всякая теория должна быть подтверждена экспериментом. Но есть несколько качественных соотношений, которым должна удовлетворять любая теория. Представление о том, что гидродинамическая теория распространения звука

приводит к выводам, противоречащим эксперименту, возникло, по всей вероятности, по следующим причинам (см. [3]):

а) формулы Трусделла не позволяют правильно описать зависимость коэффициента затухания от плотности и температуры;

б) согласно этим формулам скорость звука с ростом частоты должна возрастать до бесконечности, тогда как эксперимент показывает, что она практически остается постоянной при любых частотах.

Как уже отмечалось, формулы Трусделла являются ошибочными. Покажем, что полученные выше выражения лишены этих недостатков.

В работе [3] данные эксперимента по определению коэффициента затухания звуковых и ультразвуковых волн были аккумулированы в эмпирической формуле

$$\frac{X}{\Omega^2} = \frac{A}{1 + (\Omega/\Omega^*)^2}, \quad (37)$$

устанавливающей связь между X и Ω . Фактически это выражение является следствием формулы (29) для X . Действительно, если разложить в ряд по степеням $p\Omega$ корни, стоящие в (29) в знаменателе, получим

$$\frac{X}{\Omega^2} = \frac{p^2/2}{1 + 5p^2\Omega^2/8}, \quad (38)$$

что совпадает с (37) при условии, что $\Omega^* = \sqrt{8/5}/p$ и $A = p^2/2$. Поэтому можно считать, что здесь никаких противоречий с экспериментом нет. При этом, конечно, надо иметь в виду, что исходная формула (29) является более точной и обладает более широкой областью применимости по сравнению с эмпирической формулой (38).

На вопрос о том, возможно ли обращение скорости звука в бесконечность, однозначно отвечают формулы (27). Из них следует, что это может быть, только если $A + \sqrt{A^2 + B^2} = 0$, что невозможно, так как A – всегда положительная величина. Если же ограничиться ультразвуковым диапазоном, то согласно (30) скорость звука здесь должна непрерывно возрастать по закону

$$c = \sqrt{2} c_0 \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\tilde{p}^2 \omega^2}{c_0^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\tilde{p}^2 \omega^2}{c_0^2}}}} \right]. \quad (39)$$

Но это возрастание очень медленное: при $\tilde{p}^2 \omega^2 / c_0^2 = 8$ оно составит всего $1.5c_0$.

Рассмотрим теперь область сверхвысоких (гиперзвуковых) частот. Из (38) следует, что с возрастанием частоты коэффициент затухания непрерывно уменьшается. Однако в нуль он может обратиться только при $B = 0$ (см. (27)). Согласно (36) это произойдет при

$$q(1 - Q) + \Omega^2(p - R) = 0, \quad \Omega_{\max} = \sqrt{\frac{q(1 - Q)}{R - p}}. \quad (40)$$

Очевидно, что последнее выражение определяет некоторую частоту $\Omega_{\max}$, выше которой коэффициент затухания из положительного становится отрицательным и, следовательно, среда начинает “накачивать” энергию в звуковую волну. Это, конечно, никогда не происходит. Поэтому область применимости уравнений гидродинамики, а значит, и полученных выше формул, ограничивается интервалом частот $0 < \Omega < \Omega_{\max}$. Внутри этого интервала характер дисперсии звука определяется тремя действительными функциями $K(\Omega)$, $X(\Omega)$, $C(\Omega)$, поведение которых, в свою очередь, зависит от функций $R(\Omega)$ и $Q(\Omega)$. Если в подкоренных выражениях в (34) комбинации материальных констант удовлетворяют неравенствам

$$3p^2 - 16(p - q) \geq 0, \quad p^2 + 12 - 16q(p - q) \geq 0, \quad (41)$$

то функции $R(\Omega)$, $Q(\Omega)$ будут монотонно меняться с ростом частоты от своих начальных значений, соответствующих $\Omega = 0$, до конечных значений при $\Omega = \Omega_{\max}$. Соответственно будут монотонно меняться и функции $K(\Omega)$, $X(\Omega)$, $C(\Omega)$. Однако если хотя бы одно из неравенств (41) будет нарушено, могут появиться запретные зоны, внутри которых функции $R(\Omega)$, $Q(\Omega)$ становятся комплексными. Этот случай требует специального исследования.

8. ОБСУЖДЕНИЕ

Мы видели, что результаты, полученные в гидродинамической теории звука, не противоречат данным эксперимента. Однако они противоречат многим представлениям, давно укоренившимся в теории звука.

Представление первое: считается, что более точное описание процессов переноса в газах дается не уравнениями гидродинамики, а уравнением Больцмана. Но, как было показано в [5], [6], все обстоит как раз наоборот: уравнение Больцмана является приближенным, а уравнения гидродинамики – точным следствием исходных предпосылок статистической механики. Соответственно, и гидродинамическая теория звука должна быть более точной, чем теория, опирающаяся на уравнение Больцмана.

Представление второе: область применимости уравнения Навье–Стокса ограничена системами с малой вязкостью, к очень вязким жидкостям оно неприменимо. В работе [6] было показано, что в число параметров, ограничивающих область применимости уравнения Навье–Стокса, вязкость не входит. Поэтому оно справедливо как для вязких, так и для невязких жидкостей.

Представление третье: несоответствие (которого на самом деле нет; см. выше) между предсказаниями гидродинамической теории звука и данными эксперимента обусловлено тем, что в уравнениях гидродинамики не учитывается процесс передачи энергии звуковой волны внутримолекулярным степеням свободы и различным надмолекулярным структурам, возникающим в жидкостях (релаксационная теория). Этот вопрос требует более детального рассмотрения.

Мнение о том, что гидродинамическая теория распространения звука противоречит эксперименту, сложилось в первой половине прошлого столетия, когда представления о структуре жидкости были весьма туманными. В то время считалось, что все жидкости представляют собой своего рода набор кластеров, каждый из которых обладает своей собственной структурой. Чтобы учесть такой мозаичный характер жидкости, в релаксационной теории в уравнение теплопроводности вводилась зависимость теплоемкости среды c_V от частоты ω [3].

Заметим, что эффект передачи энергии от макроскопического движения жидкости как целого к микроскопическим степеням свободы отдельных атомов и молекул уже учтен в уравнениях гидродинамики и притом учтен точно; никаких поправок в эти формулы вводить не нужно [5], [6]. Кроме того, в настоящее время установлено, что никаких надмолекулярных структур, к которым согласно представлениям релаксационной теории происходит передача энергии, в жидкости не существует. Единственным структурным образованием, возникающим в жидкостях и газах, является корреляционная сфера, радиус R_c которой обычно не превосходит 10–20 Å (исключение – окрестность критической точки), что, как правило, на много порядков меньше длины звуковой волны $l = 2\pi c/\omega$. В этом легко убедиться с помощью простейшей оценки. Действительно, различие между теорией Кирхгофа–Трусделла и экспериментом обнаруживается уже при частотах $\omega \approx 10^7 \text{ с}^{-1}$. А так как скорость звука всегда $\sim 10^5 \text{ см/с}$, то частотам $\omega \approx 10^7 \text{ с}^{-1}$ соответствуют длины волн $l \geq 10^{-2} \text{ см}$, что на пять и более порядков превосходит радиус корреляционной сферы. Учет взаимодействия звуковой волны с объектами столь малого размера выходит далеко за рамки применимости гидродинамической теории. Но это не означает, что им всегда можно пренебрегать. При гиперзвуковых частотах с $\omega \approx 10^{12} \text{ с}^{-1}$ процессы прямого взаимодействия звуковой волны и корреляционной сферы становятся решающими, так как в этом случае длина волны l оказывается порядка радиуса корреляции. Поэтому неравенства

$$\omega \leq 10^{11} - 10^{12} \text{ с}^{-1}, \quad l \gg R_c \approx 10^{-7} \text{ см} \quad (42)$$

определяют границы применимости гидродинамической теории распространения звука. Более того, эти неравенства определяют границы применимости самой гидродинамики и статистической механики. Действительно, как было показано в [6], они являются тем условием, выполнение которого необходимо для того, чтобы уравнения движения классической механики, описывающие движение всех частиц системы, могли быть преобразованы в макроскопические уравнения гидродинамики. Если же неравенства (42) не выполняются, переход от уравнений Гамильтона к уравнениям гидродинамики становится невозможным [5].

Итак, в жидкостях не существует надмолекулярных образований, которым звуковая волна могла бы передавать свою энергию. Но этого мало. Против релаксационной теории можно выдвинуть еще одно, более формальное возражение. Очевидно, что все входящие в уравнения гидродинамики материальные константы являются

функциями плотности и температуры. Учитывая малость $\delta\rho$, $\delta\theta$, эти константы можно разложить в ряд по этим параметрам. В результате, например, для теплоемкости получаем

$$c_V = c_V(\rho_0, \theta_0) + \frac{\partial c_V}{\partial \rho} \delta\rho(\omega t) + \frac{\partial c_V}{\partial \theta} \delta\theta(\omega t),$$

где $c_V(\rho_0, \theta_0) = \text{const}$ от ω не зависит. Подставляя это выражение в уравнения гидродинамики, обнаружим, что зависимость теплоемкости от частоты дает вклад второго порядка малости по $\delta\rho$ и $\delta\theta$, т.е. является эффектом, которым мы пренебрегали с самого начала при построении гидродинамической теории распространения звука. Поэтому учет зависимости параметров задачи от частоты является превышением точности теории, а расхождение между теорией Кирхгофа–Труделла и экспериментом объясняется некорректностью использованного ими метода разложения дисперсионного уравнения в ряд по квадратам волнового вектора.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954.
- [2] С. Truesdell. J. Ration. Mech. Analys. 1953. V. 2. № 3. P. 643–650.
- [3] Д. Сетте. Изучение простых жидкостей ультразвуковыми методами. В сб.: Экспериментальные исследования. Физика простых жидкостей. Ред. Г. Темперли, Дж. Роулинсон, Дж. Рашбрук. М.: Мир, 1973. С. 151–205.
- [4] Г. А. Мартынов. ТМФ. 2002. Т. 133. № 1. С. 121–131; 2003. Т. 134. № 2. С. 325–336.
- [5] Г. А. Мартынов. ТМФ. 2003. Т. 134. № 3. С. 487–500.
- [6] Г. А. Мартынов. ТМФ. 2001. Т. 129. № 1. С. 140–152.
- [7] С. Чепмен, Т. Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960; В. М. Жданов, В. И. Ролдугин. УФН. 1998. Т. 168. № 4. С. 407–438; Ю. Л. Климонтович. Статистическая теория открытых систем. Т. 1. М.: Янус, 1995.
- [8] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1976.
- [9] М. А. Анисимов. Критические явления в жидкостях и жидких кристаллах. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию 17.I.2005 г.,
после доработки 18.IV.2005 г.