Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова, Коммутационные соотношения в пространстве с индефинитной метрикой, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 3, 420–426

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 13:24:52

© 2003 г. Ю. С. Вернов*, М. Н. Мнацаканова†

КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Дано описание неприводимых регулярных представлений алгебры операторов a и b , определяемой соотношениями $[a, b] = 1$, $ba = a^+b^+$, в произвольном невырожденном, замкнутом пространстве с индефинитной метрикой. Найдена связь этой алгебры с обобщенной алгеброй Гейзенберга.

Ключевые слова: индефинитная метрика, алгебра Гейзенберга, регулярные представления.

Алгебра Гейзенберга, т.е. алгебра канонических коммутационных соотношений

$$[a, a^+] = 1, \quad (1)$$

лежит в основе квантовой теории поля. Поэтому изучению свойств этой алгебры посвящено большое число исследований начиная с классических работ Гейзенберга и Шредингера (обзор основных результатов можно найти в [1]). Поскольку теория калибровочных полей в ковариантной формулировке требует использования пространства с индефинитной метрикой [2]–[4], наиболее важный класс представлений алгебры Гейзенберга, названный регулярным, был изучен в таком пространстве [5], [6]. Условие регулярности, справедливое как для самой алгебры Гейзенберга, так и для ее обобщений, сформулировано ниже (см. определение). В последние годы широко изучались q - и R -деформированные алгебры Гейзенберга (см. соответственно работы [7], [8] и [9], [10] и ссылки в них). Свойства регулярных представлений этих алгебр в пространстве с индефинитной метрикой изучены в работах [11]–[13]. Указанные алгебры являются частными случаями более общей алгебры, определяемой соотношениями

$$a^+a = \varphi(N), \quad aa^+ = \varphi(N+1), \quad (2)$$

$$N = N^+, \quad [N, a] = -a, \quad (3)$$

где $\varphi(N)$ – некоторая функция. Отметим, что соотношение (1) или его обобщения, в частности q - и R -деформации, не фиксируют однозначно связь между a^+a (aa^+) и оператором N , определенным условиями (3). Действительно, например, в случае алгебры

* Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: vernov@ms2.inr.ac.ru

† Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: mnatsak@theory.sinp.msu.ru

Гейзенберга оператор $N \equiv a^+a + C\mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ – единичный оператор, удовлетворяет условиям (3) при любом $C \in \mathbb{R}$. В случае q -деформированной алгебры Гейзенберга эта неоднозначность носит нетривиальный характер:

$$a^+a = \frac{Cq^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(см. [12], формулы (26), (26')). Однако при любом фиксированном C изучение регулярных представлений этой алгебры сводится к исследованию соответствующей обобщенной алгебры Гейзенберга.

Такая алгебра была введена в работе [6]. В [12], [13] ее свойства рассматривались в связи с изучением q - и R -деформаций алгебры Гейзенберга. В [14] были изучены свойства этой алгебры, не зависящие от конкретного вида функции $\varphi(N)$. Например, было показано, что ее произвольное регулярное представление реализуется в пространстве Крейна, базисом которого являются собственные векторы оператора N . Свойства этих векторов зависят от $\varphi(N)$, и, более того, при одной и той же функции $\varphi(N)$ существуют представления в различных пространствах Крейна (см., например, [5]).

Мы рассмотрим другое обобщение алгебры Гейзенберга, а именно алгебру A , определяемую соотношениями

$$[a, b] = 1, \tag{4}$$

$$N = N^+, \quad N = ba. \tag{5}$$

Коммутационные свойства операторов исследовались в пространстве Гильберта [1]. Представляет интерес изучение свойств алгебры, заданной соотношениями (4) и (5), в более общем пространстве.

Мы изучим регулярные представления этой алгебры в произвольном невырожденном и замкнутом (в сильном или слабом смысле) пространстве J , в котором задано, вообще говоря, индефинитное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Напомним, что пространство J невырожденно, если из условия $x \perp J$ следует, что $x = 0$. Будет доказано, что, как и в случае алгебры Гейзенберга, спектр оператора N может быть трех типов: $\text{Sp } N = \mathbb{N}$; $\text{Sp } N = \mathbb{Z}^-$; $\text{Sp } N = \lambda + \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Однако, в отличие от алгебры Гейзенберга, где спектр оператора N определяет представление с точностью до унитарной эквивалентности, в рассматриваемой алгебре при одном и том же спектре N существует множество унитарно-неэквивалентных представлений. Это связано с тем, что представление определяется не только операторами a и b , но и их сопряженными.

В работе доказано, что каждое неприводимое представление указанной алгебры унитарно-эквивалентно некоторому неприводимому представлению обобщенной алгебры Гейзенберга (см. ниже (17), (22)). Доказано, что, в свою очередь, обобщенная алгебра Гейзенберга может быть преобразована в алгебру, заданную соотношениями (4), (5), за исключением того случая, когда соответствующий оператор N имеет конечный спектр.

Показано, что рассматриваемая алгебра может быть преобразована в алгебру Гейзенберга, если метрики пространств соответствующих представлений совпадают (см. ниже (25), (26)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Представление алгебры A называется *регулярным*, если существует оператор $U(s)$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{aligned} U(s)U(t) &= U(s+t), \\ U(s) &\rightarrow \mathbb{I} \text{ при } s \rightarrow 0, \quad U(0) = \mathbb{I}, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(s) - \mathbb{I}}{s} \psi &= iN\psi, \text{ если } \psi \in D(N), \end{aligned} \quad (6)$$

$\mathbb{I}$ – единичный оператор.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае алгебры Гейзенберга для представлений в гильбертовом пространстве это определение эквивалентно условиям Реллиха–Диксмье [15]. Для таких представлений канонические коммутационные соотношения могут быть записаны как в обычной (1), так и в вейлевской форме (см. [1], § 4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Представление будет регулярным и в том случае, если условия (6) выполнены только в некоторой области D , инвариантной относительно $U(s)$, однако оказывается, что в действительности $U(s)$ – ограниченный оператор и, следовательно, определен во всем пространстве J .

Отметим, что сами операторы a и b не ограничены (см. [1], с. 2). Поэтому соотношение (4) выполнено не во всем пространстве J , а лишь в $D(N)$. Из самосопряженности N следует, что оператор $U(s)$ унитарен, причем $U^+(s) = U(-s)$.

Спектр оператора N найдем с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в работе [5] для алгебры Гейзенберга. Сначала заметим, что согласно соотношению (4) получаем

$$[N, a] = -a, \quad [N, b] = b. \quad (7)$$

Эти соотношения, очевидно, эквивалентны равенствам

$$Na = a(N-1), \quad Nb = b(N+1). \quad (7')$$

Из условий (7) легко устанавливаются правила коммутации оператора $U(s)$ с a и b , а именно

$$U(s)a = e^{-is}aU(s), \quad U(s)b = e^{is}bU(s). \quad (8)$$

Соотношения (8) следуют из равенств

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s)aU(-s) &= iU(s)[N, a]U(-s) = -iU(s)aU(-s), \\ \frac{d}{ds}U(s)bU(-s) &= iU(s)[N, b]U(-s) = iU(s)bU(-s), \end{aligned} \quad (9)$$

которые, в свою очередь, суть следствия формул (7) и равенства

$$\frac{d}{ds}U(s) = iNU(s), \quad (10)$$

непосредственно вытекающего из условий (6).

Согласно (8)

$$[U(2\pi), a] = [U(2\pi), b] = [U(2\pi), a^+] = [U(2\pi), b^+] = 0. \quad (11)$$

Два последних равенства следуют из соотношений

$$[U(-2\pi), a] = [U(-2\pi), b] = 0.$$

Для неприводимого представления условия (11) означают, что

$$U(2\pi) = e^{2\pi i \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (12)$$

(см. обсуждение подобного вопроса в работе [5]). Из условия (12) следует, что оператор N имеет собственный вектор:

$$N\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda. \quad (13)$$

Доказательство этого утверждения аналогично проведенному в [5] для алгебры Гейзенберга, для обобщенной алгебры Гейзенберга оно приведено в [14].

Из условий (7) следует, что спектр оператора N состоит из чисел $\lambda + k$, $k \in \mathbb{Z}$, а все собственные векторы оператора N , принадлежащие неприводимому представлению, имеют вид

$$\psi_{\lambda+n} = b^n \psi_\lambda, \quad \psi_{\lambda-n} = a^n \psi_\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (14)$$

Далее легко видеть, что

$$M(a^n, b^m)\psi_\lambda \sim \psi_{\lambda+m-n}, \quad (15)$$

где $M(a^n, b^m)$ – произвольный моном от n операторов a и m операторов b . Следовательно,

$$P_n(a, b)\psi_\lambda = \sum_k C_k \psi_{\lambda+k}, \quad (16)$$

где $P_n(a, b)$ – произвольный полином от операторов a и b . Таким образом, действие полиномов от операторов a и b на ψ_λ порождает пространство J_0 – пространство конечных линейных комбинаций векторов $\psi_{\lambda+k}$. Из формулы (15) непосредственно следует, что любой собственный вектор оператора N , принадлежащий рассматриваемому неприводимому представлению, как и любой вектор $x \in J_0$, является циклическим для этого представления. Таким образом, построенное представление является неприводимым, а $J = \bar{J}_0$, где $\bar{J}_0$ – замыкание пространства J_0 . Явное построение $\bar{J}_0$ аналогично соответствующей процедуре для обобщенной алгебры Гейзенберга [14].

Найдем теперь типы спектров оператора N . Покажем, что, как и для алгебры Гейзенберга, возможны три случая: $\text{Sp } N = \mathbb{N}$; $\text{Sp } N = \mathbb{Z}^-$; $\text{Sp } N = \lambda + \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Действительно, пусть $a\psi_{\lambda-n} = 0$. Это означает, что $ba\psi_{\lambda-n} = (\lambda-n)\psi_{\lambda-n} = 0$, т.е. $\lambda = n$. В этом случае все $b^n\psi_\lambda \neq 0$. Действительно, если $b^k\psi_\lambda \neq 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, а $b^n\psi_\lambda = 0$, то $abb^{n-1}\psi_\lambda = 2nb^{n-1}\psi_\lambda = 0$, что противоречит предположению, что $b^{n-1}\psi_\lambda \neq 0$. Пусть теперь $b^n\psi_\lambda = 0$, тогда $\lambda = -n$, и рассуждая аналогично, убеждаемся, что в этом случае спектр N не ограничен снизу. Отметим, что возможность того,

что $ba\psi_{\lambda-n} = 0$, $a\psi_{\lambda-n} \neq 0$ или $ab\psi_{\lambda+n-1} = 0$, $b\psi_{\lambda+n-1} \neq 0$, исключена, так как в этих случаях вектор ψ_λ не принадлежит рассматриваемому представлению. Из проведенного рассмотрения следует, что если $\lambda \notin \mathbb{Z}$, то все $\lambda + k$, $k \in \mathbb{Z}$, принадлежат $\text{Sp } N$. Итак, как и в случае алгебры Гейзенберга [5], регулярные неприводимые представления разбиваются на три класса:

- 1) $\text{Sp } N = \mathbb{N}$, в качестве циклического вектора естественно взять ψ_0 ;
- 2) $\text{Sp } N = \mathbb{Z}^-$, в качестве циклического вектора выбираем ψ_{-1} ;
- 3) $\text{Sp } N = \lambda + \mathbb{Z}$, в качестве циклического вектора всегда можно взять вектор ψ_λ , $-1 < \lambda < 0$.

В случае алгебры Гейзенберга существует однозначная связь между метрикой пространства J и классом представления [5]. А именно, для представления первого класса метрика дефинитная (мы всегда можем выбрать ее положительной), а для двух других классов – индефинитная, причем выбор знака $\langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle$ однозначно определяет знак $\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle$.

Для рассматриваемой алгебры метрика пространства, соответствующего определенному неприводимому представлению, определяется операторами a^+ , b^+ , и мы имеем широкий спектр возможностей.

Из условий (7) и самосопряженности оператора N следует, что

$$[N, a^+] = a^+, \quad [N, b^+] = -b^+. \quad (7'')$$

Поэтому $a^+\psi_{\lambda+k} \sim \psi_{\lambda+k+1}$, $b^+\psi_{\lambda+k} \sim \psi_{\lambda+k-1}$, т.е.

$$a^+ = \xi(N)b, \quad a = b^+\xi(N). \quad (17)$$

Из полученных ниже формул (23), (24) следует, что $\xi(N) = \xi^+(N)$. Согласно (17) в качестве базисных векторов можно вместо $b^n\psi_\lambda$ взять $(a^+)^n\psi_\lambda$. Легко видеть, что справедлива следующая рекуррентная формула:

$$\langle (a^+)^n\psi_\lambda, (a^+)^n\psi_\lambda \rangle = \xi(\lambda+n)(\lambda+n)\langle (a^+)^{n-1}\psi_\lambda, (a^+)^{n-1}\psi_\lambda \rangle. \quad (18)$$

Эта формула – непосредственное следствие равенств (17) и того, что согласно (5) $b^+a^+ = N+1$. Кроме того, из условий (7') следует

$$\xi(N)a = a\xi(N-1), \quad \xi(N)b = b\xi(N+1).$$

Полагая $aa^+(a^+)^{n-1}\psi_\lambda = \varphi(\lambda+n)(a^+)^{n-1}\psi_\lambda$, видим, что

$$\varphi(\lambda+n) = \xi(\lambda+n)(\lambda+n). \quad (19)$$

Из формул (18) и (19) получаем

$$\langle (a^+)^n\psi_\lambda, (a^+)^n\psi_\lambda \rangle = \varphi(\lambda+n) \dots \varphi(\lambda+1)\langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle. \quad (20)$$

Аналогичным образом приходим к равенству

$$\langle a^n \psi_\lambda, a^n \psi_\lambda \rangle = \varphi(\lambda - n + 1) \dots \varphi(\lambda) \langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle, \quad (21)$$

где

$$\varphi(\lambda - m) = \xi(\lambda - m)(\lambda - m). \quad (22)$$

(Формулы (20), (21) совпадают с формулами (15), (16) в работе [14].) Согласно (19) и (22)

$$aa^+ = \varphi(N + 1) = \xi(N + 1)(N + 1). \quad (23)$$

Далее, рассматривая оператор a^+aa^+ , легко убедиться в том, что

$$a^+a = \varphi(N). \quad (24)$$

Поскольку оператор $\varphi(N)$ самосопряжен, то из формул (23), (24) следует самосопряженность $\xi(N)$. Сравнивая формулы (23), (24) с равенствами (2), видим, что операторы a и a^+ образуют обобщенную алгебру Гейзенберга. Следовательно, рассматриваемая алгебра операторов a и b при заданной функции $\xi(N)$ изоморфна некоторой обобщенной алгебре Гейзенберга.

Можно сказать, что рассмотренная алгебра является “промежуточной” между самой алгеброй Гейзенберга и обобщенной алгеброй Гейзенберга. Спектр оператора N совпадает со спектром аналогичного оператора в алгебре Гейзенберга, но метрика может быть произвольной. В свою очередь, любая обобщенная алгебра Гейзенберга с помощью преобразования (17) может быть сведена к алгебре, определяемой соотношениями (4) и (5), разумеется, при указанных выше ограничениях на спектр оператора N . Отметим, что поскольку для любой обобщенной алгебры Гейзенберга (2) оператор $\tilde{N} = N + C\mathbb{I}$, $C \in \mathbb{R}$, также удовлетворяет условиям (3), то ее можно представить в виде $a^+a = \tilde{\varphi}(\tilde{N})$, $aa^+ = \tilde{\varphi}(\tilde{N} + 1)$. При соответствующем выборе C записанная в таком виде обобщенная алгебра Гейзенберга может быть связана с рассматриваемой в работе алгеброй соотношениями (17). Исключением являются представления, в которых спектр оператора N конечен.

В заключение покажем, что если не только спектр, но и метрика представления рассмотренной алгебры те же, что и в соответствующем представлении алгебры Гейзенберга: $[c, c^+] = 1$, то эти две алгебры связывает простое преобразование. А именно,

$$c = a\mu(N), \quad (25)$$

$$c^+ = \nu(N)b. \quad (26)$$

Из условия $c^+c = N$ следует, что $\nu(N) = \mu^{-1}(N)$. Далее из равенств (25), (17) и (19) получаем

$$\mu^+(N)\mu(N) = \xi^{-1}(N). \quad (27)$$

Согласно (19) и (22) в любом неприводимом представлении (см. также [5], § 3) $\xi(\lambda + k) > 0 \quad \forall k, k \in \mathbb{Z}$. Запишем $\mu(N)$ и $\mu^+(N)$ в виде

$$\mu(N) = \tilde{\mu}(N)V(N), \quad \mu^+(N) = V^+(N)\tilde{\mu}(N),$$

где $V(N)$ — некоторый унитарный оператор. Согласно (27)

$$\tilde{\mu}(\lambda + k) = \xi^{-1/2}(\lambda + k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

Легко видеть, что операторы $c' = cV(N)$, $c'^+ = V^+(N)c^+$ так же, как и c , c^+ , удовлетворяют алгебре Гейзенберга.

Список литературы

- [1] *C. R. Putnam*. Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.
- [2] *F. Strocchi, A. S. Wightman*. J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 2198.
- [3] *G. Morchio, F. Strocchi*. Ann. Inst. H. Poincaré. 1980. V. 33. P. 251.
- [4] *F. Strocchi*. Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory. Singapore: World Scientific, 1993.
- [5] *M. Mnatsakanova, G. Morchio, F. Strocchi, Yu. Vernov*. J. Math. Phys. 1998. V. 29. P. 2969.
- [6] *M. N. Mnatsakanova, G. Morchio, Yu. S. Vernov*. Canonical commutation relations in a positive and an indefinite metric space. In: Quarks-96. Proc. 9th Int. Seminar (Yaroslavl, Russia, May 5–11, 1996). V. 2. Eds. V. A. Matveev, A. A. Penin, V. A. Rubakov, A. N. Tavkhelidze. M.: Inst. Nucl. Res., Russ. Acad. Sci., 1997. P. 51.
- [7] *M. Chaichian, P. P. Kulish*. Phys. Lett. B. 1990. V. 234. P. 72.
- [8] *P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky*. J. Phys. A. 1990. V. 23. P. L415; *P. P. Kulish*. ТМФ. 1991. Т. 86. С. 8.
- [9] *M. S. Plyushchay*. Nucl. Phys. B. 1997. V. 491. P. 619.
- [10] *M. S. Plyushchay*. Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 2953.
- [11] *M. Chaichian, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov*. Analogue of von Neumann's theorem of the q -oscillator algebra. In: Proc. of the 15th Workshop "Problems on High Energy Physics and Field Theory" (Protvino, 1992). Eds. A. P. Samokhin, G. L. Rcheulishvili. Protvino: Inst. High. Energy Phys., 1995. P. 126; J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 2053.
- [12] *Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова*. ТМФ. 1997. Т. 113. С. 355.
- [13] *Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова*. ТМФ. 2000. Т. 125. С. 272.
- [14] *Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова*. ТМФ. 2001. Т. 129. С. 219.
- [15] *F. Rellich*. Nachr. Akad. Wiss. Gött. Math-Phys. Kl., Math.-Phys.-Chem. Abt. 1946. V. 1946. P. 107; *J. Dixmier*. Compos. Math. 1958. V. 13. P. 263.