Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. П. Новиков, Интегральное преобразование решений уравнения фуксова класса, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 3, 355–364

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2040>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:17:44

© 2006 г.

Д. П. Новиков*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ФУКСОВА КЛАССА, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ОКАМОТО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ VI

Показано, что некоторые решения системы уравнений Фукса (исходной пары для Пенлеве VI) переводятся эйлеровым интегральным преобразованием с ядром $(x - z)^{-\alpha}$ в решения системы того же вида с параметрами, измененными согласно преобразованию Окамото.

Ключевые слова: уравнение Пенлеве VI, уравнение Гойна, интегральное преобразование Эйлера, преобразования Шлезингера, преобразование Окамото.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Пенлеве VI было найдено Фуксом в [1] (об истории уравнения см. [2], с. 318, [3], с. 284) как условие изомонодромной деформации линейного уравнения второго порядка с четырьмя регулярными $x = 0, 1, t, \infty$ и одной несущественной $x = u$ особыми точками. Мы будем использовать следующую форму записи этого линейного уравнения:

$$f_{xx} + \left(\frac{1 + \delta_0}{x} + \frac{1 + \delta_1}{x - 1} + \frac{1 + \delta_t}{x - t} - \frac{1}{x - u} \right) f_x + \\ + \left(\frac{\alpha\beta(x - u)}{x(x - 1)(x - t)} + R \left(\frac{1}{x - u} - p \right) \frac{u(u - 1)(u - t)}{x(x - 1)(x - t)} \right) f = 0, \quad (1)$$

где $\alpha = (\delta_0 + \delta_1 + \delta_t + \delta_\infty + 1)/2$, $\beta = (\delta_0 + \delta_1 + \delta_t - \delta_\infty + 1)/2$,

$$R = p - \frac{\delta_0}{u} - \frac{\delta_1}{u - 1} - \frac{\delta_t}{u - t}.$$

Условие сохранения группы монодромии при изменении t , $u(t)$, $p(t)$ задается вторым уравнением на f , которое не совсем определено ввиду инвариантности (1) при умножении f на произвольную функцию от t . Для симметричности результата,

*Омский государственный университет, Омск, Россия.

полученного в разделе 3 (теорема 2 и ее следствие), потребуется следующая “калибровка” этого уравнения:

$$\frac{t(t-1)}{u-t}f_t - \frac{x(x-1)}{x-u}f_x - \left(\frac{2\beta u - (\alpha-1)t}{2(u-t)} - R \frac{u(u-1)}{x-u} \right) f = 0. \quad (2)$$

Соответствующее уравнение Пенлеве VI

$$u'' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-t} \right) u'^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{u-t} \right) u' + \\ + \frac{u(u-1)(u-t)}{2t^2(t-1)^2} \left\{ \delta_\infty^2 - \delta_0^2 \frac{t}{u^2} + \delta_1^2 \frac{t-1}{(u-1)^2} + (1 - \delta_t^2) \frac{t(t-1)}{(u-t)^2} \right\} \quad (3)$$

обладает автоморфизмами, действующими на параметрах δ_i аффинно. Часть автоморфизмов индуцируется преобразованиями уравнения (1): перестановки δ_i – дробно-линейными заменами x , а инволюции $(\delta_0, \delta_1, \delta_t, \delta_\infty) \rightarrow (-\delta_\infty, 1-\delta_t, 1-\delta_1, -\delta_0)$ – заменой f на $a_1(x)f_x + a_2(x)f$ с некоторыми рациональными множителями $a_1(x)$, $a_2(x)$ (преобразования Шлезингера). При специальных значениях ($\delta_0 = -1/2$, $\delta_\infty = 1/2$) имеется квадратичная замена $x \rightarrow x_1^2$ в (1) (см. подробности в [4]), но индуцируемое ею преобразование уравнения (3) не действует при произвольных δ_i .

Остальные автоморфизмы выводятся из гамильтоновой формы уравнения (3)

$$u' = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial H}{\partial u}, \quad H = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)(u-t) + p(1+(u-t)R)u(u-1)}{t(t-1)}.$$

Поскольку по истории этого вопроса в литературе есть неясности, приведем ссылку (вслед за работами [5]) на статью [6], где гамильтониан H после подстановки решений $u = u(t)$, $p = p(t)$ рассматривается как функция от t . После вычислений получается σ -версия уравнения Пенлеве VI:

$$\sigma'[t(t-1)\sigma'']^2 + (2\sigma'(t\sigma' - \sigma) - \sigma'^2 - k_1k_2k_3k_4)^2 = (\sigma' + k_1^2)(\sigma' + k_2^2)(\sigma' + k_3^2)(\sigma' + k_4^2),$$

где

$$\sigma = t(t-1)H + c_1t + c_2, \quad c_1 = k_2k_4 + k_3k_4 + k_2k_3, \quad c_2 = -\frac{c_1 + k_1(k_2 + k_3 + k_4)}{2}, \\ k_1 = \frac{\delta_0 - \delta_1}{2}, \quad k_2 = \frac{\delta_0 + \delta_1}{2}, \quad k_3 = \frac{\delta_t + \delta_\infty - 1}{2}, \quad k_4 = \frac{\delta_t - \delta_\infty - 1}{2}.$$

Здесь становятся очевидными симметрии $k_i \rightarrow k_j$, $k_i \rightarrow -k_i$, скрытые в (3). Вместе со сменами знака $\delta_i \rightarrow -\delta_i$ и перестановками δ_i они образуют группу аффинных преобразований $F_4^{(1)}$; соответствующая группа симметрий уравнения (3) действует на переменные (t, u, p, δ_i) бирационально [7], [8]. Далее преобразование Окамoto будем называть инволюцию $(k_1, k_2, k_3, k_4) \rightarrow (k_1, -k_3, -k_2, k_4)$, сохраняющую t и σ , и использовать ее в виде

$$(u, p) \rightarrow \left(U = u - \frac{\Delta}{p}, p \right), \quad \delta_i \rightarrow \Delta_i = \delta_i - \Delta,$$

где $\Delta = \alpha - 1 = k_2 + k_3$. В работах [9] симметрия $u \leftrightarrow U$, $\Delta \leftrightarrow -\Delta$ отражена в уравнениях

$$\begin{aligned} 2p &= \frac{2\Delta}{u-U} = \frac{t(t-1)u'}{u(u-1)(u-t)} + \frac{\delta_0}{u} + \frac{\delta_1}{u-1} + \frac{\delta_t-1}{u-t} = \\ &= \frac{t(t-1)U'}{U(U-1)(U-t)} + \frac{\Delta_0}{U} + \frac{\Delta_1}{U-1} + \frac{\Delta_t-1}{U-t}, \\ \Delta &= \frac{\delta_0 + \delta_1 + \delta_t + \delta_\infty - 1}{2}, \quad \Delta_i = \delta_i - \Delta \end{aligned} \quad (4)$$

(при $\Delta = 0$ здесь подразумевается $u = U$). Равенства (4) являются условием совместности системы (1), (2) и означают, что u , U удовлетворяют уравнению (3) с параметрами δ_i , Δ_i , соответственно.

Таким образом, часть известных симметрий уравнения Пенлеве VI была получена непосредственно из вида уравнения. Это приводит к вопросу о том, продолжается ли действие группы $F_4^{(1)}$ на представления Лакса для уравнения (3). Частично ответ на него известен. В [8] приведены матричная пара размера 8×8 и пара с разностным уравнением второго порядка вместо уравнения (1) и для каждого порождающего элемента группы $F_4^{(1)}$ найдено калибровочное преобразование этих представлений. В [10] построена схема перехода от исходного уравнения (1) (в (2×2) -матричном варианте) к преобразованному по Окамото; результат можно понимать как действие композиции преобразования Лапласа $f(x) \rightarrow F(\zeta)$, умножения на $\zeta^{\alpha-1}$ и обратного преобразования Лапласа. Возможно, эта композиция тождественна эйлерову интегральному преобразованию с ядром $(x-z)^{-\alpha}$:

$$\int_{C_2} e^{z\zeta} \zeta^{\alpha-1} \int_{C_1} e^{-\zeta x} f(x) dx d\zeta = \int_{C_3} (x-z)^{-\alpha} f(x) dx$$

(нужно уточнить контуры интегрирования, учитывая расположение особенностей и ветвление $f(x)$).

Цель данной работы – прямое построение симметрии пары (1), (2), отвечающей преобразованию Окамото. После формальной замены $\delta_i \rightarrow \Delta_i$, $u \rightarrow U$, $x \rightarrow z$, $f \rightarrow h$ в уравнении (1) (где p не изменяется, а выражения для R , α , β приведены после формулы (1)) получим уравнение

$$\begin{aligned} h_{zz} + \left(\frac{1+\Delta_0}{z} + \frac{1+\Delta_1}{z-1} + \frac{1+\Delta_t}{z-t} - \frac{1}{z-U} \right) h_z + \\ + \left(\frac{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}(z-U)}{z(z-1)(z-t)} + \tilde{R} \left(\frac{1}{z-U} - p \right) \frac{U(U-1)(U-t)}{z(z-1)(z-t)} \right) h = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Изомонодромная деформация последнего уравнения описывается уравнением, получаемым (формально) из (2),

$$\frac{t(t-1)}{U-t} h_t - \frac{z(z-1)}{z-U} h_z - \left(\frac{2\tilde{\beta}U - (\tilde{\alpha}-1)t}{2(U-t)} - \tilde{R} \frac{U(U-1)}{z-U} \right) h = 0. \quad (6)$$

Система (4) в силу инволютивности замены является условием совместности системы (5), (6), равно как и системы (1), (2). В разделах 2, 3 будет показано, что f и h переводятся друг в друга интегральным преобразованием Эйлера.

Заметим, что пара Лакса (1), (2) приводится к виду, который можно найти в [8], [11] и некоторых других работах, заменой $f \rightarrow x^{-\delta_0}(x-1)^{-\delta_1}(x-t)^{-\delta_t}f$, после чего можно убедиться, что определение гамильтоновых переменных (u, p) (обычно пишут q вместо u) и функции $H(t, u, p)$ здесь не изменено по сравнению с этими работами.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ФУКСОВА КЛАССА

В этом разделе зависимость величин t, u, p не будет использована. Для связи (1) и (5) нам понадобятся лишь равенства $(u-U)p = \Delta$, $\Delta = \alpha - 1$, $\Delta_i = \delta_i - \Delta$.

Предварительно выведем представление решений вспомогательного неоднородного уравнения через интегралы, зависящие от параметра (метод вычислений можно найти в [12], глава 10; его применение в теории гипергеометрического ряда дано в работах Римана; см. также [3], [13]).

Обозначим через $L[f]$ левую часть (1) и рассмотрим следующее уравнение:

$$L[\psi] = Y(x, z) - Y(x, z_0), \quad (7)$$

где

$$Y(x, z) = \frac{A(z)x^2 + B(z)x + C(z)}{x(x-1)(x-t)(x-u)(x-z)^{\alpha+1}}.$$

Выясним, при каких условиях решение этого уравнения представимо в виде $\psi = \int_{z_0}^z \Phi(z)(x-z)^{-\alpha} dz$. При вычислении ψ по формуле Ньютона–Лейбница интегрирование производится в пределах от z_0 до z по какой-либо кривой C , поэтому в правой части (7) величину функции $Y(x, z)$ следует получать, аналитически продолжая Y вдоль C , исходя из величины $Y(x, z_0)$.

ТЕОРЕМА 1. *При $\alpha \neq -1, 0, 1$ функция $\psi = \int_{z_0}^z \Phi(z)(x-z)^{-\alpha} dz$ является решением уравнения (7) в том и только том случае, когда $\Phi(z)$ удовлетворяет уравнению*

$$\tilde{L}[\Phi] = \frac{k(u-z)^{\alpha-1}}{z(z-1)(z-t)(z-U)} \quad (8)$$

(здесь через $\tilde{L}[h]$ обозначена левая часть уравнения (5), константа k произвольна), а функции $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ явно выражаются через $\Phi(z)$ и ее производные из формул (П.2), (П.3), (П.6) приложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя по z уравнение (7) и подставляя $\psi_z = \Phi(z) \times (x-z)^{-\alpha}$, получим равенство (П.1), приведенное в приложении, где также показано, что (П.1) при $\alpha \neq 0, -1$ равносильно системе уравнений (П.2)–(П.5). Эта система

сводится при $\alpha \neq 1$ к трем явным выражениям для функций $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ через Φ , Φ_z , Φ_{zz} и уравнению третьего порядка на функцию $\Phi(z)$.

Покажем теперь, что последнее уравнение имеет интеграл. Для этого заметим, что разложение общего решения уравнения $L[\Psi] = Y(x, z)$ в окрестности точки $x = u$ имеет логарифмическую особенность вида

$$\Psi = a(z)\Psi_0 \ln(x - u) + a_0(z) + a_1(z)(x - u) + a_2(z)(x - u)^2 + \dots,$$

где $\Psi_0 = (x - u)^2 + c_1(x - u)^3 + \dots$ — решение уравнения (1) с показателем 2 для несущественной особенности. Поэтому разложение общего решения уравнения (7)

$$\psi = (a(z) - a(z_0))\Psi_0 \ln(x - u) + a_0(z) - a_0(z_0) + (a_1(z) - a_1(z_0))(x - u) + \dots$$

тоже содержит логарифм. Обход x по замкнутому пути вокруг u приводит к изменению ψ на $2\pi i(a(z) - a(z_0))\Psi_0$. В рассматриваемом случае из равенства $\psi_z = \Phi(z) \times (x - z)^{-\alpha}$ следует, что ψ_z при том же обходе не меняется; следовательно, $a(z) \equiv a(z_0)$. Подстановка полученного ряда

$$\psi = a_0(z) - a_0(z_0) + (a_1(z) - a_1(z_0))(x - u) + \dots$$

в уравнение (7) дает уравнение (П.6) (интеграл системы). После замены в (П.6) функций A , B , C их выражениями через Φ , Φ_z , Φ_{zz} получается окончательный результат.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Delta_0, \alpha, \delta_0 \notin \mathbb{Z}$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Если $h(z) = z^{-\Delta_0}(1 + h_1z + \dots)$ — одно из решений уравнения (5), разложенное в окрестности точки $z = 0$, а контур C — “двойная восьмерка” Жордана–Похгаммера, охватывающая 0 и x (т.е. $C \sim aba^{-1}b^{-1}$, где петли a и b обходят 0 и x , соответственно), то функция $f(x) = \int_C h(z)(x - z)^{-\alpha} dz$ есть решение уравнения (1), имеющее в окрестности точки $x = 0$ разложение вида $x^{-\delta_0}(b_0 + b_1h_1x + \dots)$, $b_0 \neq 0$.

2. Если $\Phi(z) = \tilde{k}(z - u)^{\alpha+1}(1 + c_1(z - u) + \dots)$ — одно из решений уравнения (8), разложенное в окрестности $z = u$, а C — контур, один раз охватывающий x , u , то функция $f(x) = \int_C \Phi(z)(x - z)^{-\alpha} dz$ есть решение уравнения (1), пропорциональное Ψ_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условии теоремы будем считать, что путь интегрирования от z_0 до z проходит по контуру C и положим $k = 0$, $\Phi(z) = h(z)$, тогда правая часть (7) обратится в нуль. Поэтому решение уравнения (7) $\psi = f(x) = \int_C h(z)(x - z)^{-\alpha} dz$ будет решением уравнения (1). Для завершения доказательства, следуя [14], подставим разложение функции $h(z)$ в интеграл для $f(x)$; это сводит его вычисление к расчету интегралов $\int_C z^{-\Delta_0+m}(x - z)^{-\alpha} dz = b_mx^{-\delta_0+m}$, $m = 0, 1, \dots$, где b_m выражается через гамма-функцию. Поскольку $b_m = O(m^{\alpha-1})$, то радиусы сходимости рядов $h(z)$ и $f(x)$ совпадают. Первое из утверждений следствия доказано, второе утверждение доказывается аналогично.

Интегральное преобразование, переводящее функцию $h(z)$ в функцию $f(x)$, которое приведено в первом из утверждений следствия, имеет обратное, $h(z) = c(\alpha, \delta_0) \times \int_{C_1} f(x)(z-x)^{\alpha-2} dx$ (“двойная восьмерка” C_1 охватывает 0, z ; нужно также иметь в виду замену $\Delta \rightarrow -\Delta$).

В [15] найдено интегральное преобразование с ядром $(x-z)^{-\alpha}$ решений уравнения Гойна

$$f_{xx} + \left(\frac{1+\delta_0}{x} + \frac{1+\delta_1}{x-1} + \frac{\delta_t}{x-a} \right) f_x + \frac{\alpha\beta(x-a) - \lambda a(a-1)}{x(x-1)(x-a)} f = 0$$

(это уравнение получается из (1) слиянием двух особых точек $t \rightarrow a$, $u \rightarrow a$ при условиях $p \rightarrow \infty$, $(u-t)pR \rightarrow \lambda$), в результате получились решения другого уравнения Гойна (которое можно получить из (5) слиянием $t \rightarrow a$, $U \rightarrow a$ при тех же условиях). Исходной точкой для доказанных выше утверждений стало совпадение соответствующего действия на показателях (регулярных) особых точек этих уравнений и действия преобразования $\delta_i \mapsto \Delta_i$ (см. последнее равенство в (4)).

Группы монодромии уравнений (1) и (5) сильно различаются сигнатурами $\{\delta_i\}$ и $\{\Delta_i\}$. Тем не менее, эти группы имеют одинаковое многообразие модулей, т.е. инварианты матриц монодромии $\text{Tr } M_0 M_1$, $\text{Tr } M_0 M_t$, $\text{Tr } M_1 M_t$ сохраняются при переходе от одного уравнения к другому. В [11] для доказательства этого факта применяется метод “изомонодромного” слияния трех особых точек: $t \rightarrow 0$, $u(t) \rightarrow 0$ (слияние называют “изомонодромным”, если $u(t)$, $p(t)$ подчиняются уравнениям (3), (4)). Этот метод привел к значительному продвижению в исследовании аналитического продолжения решений Пенлеве VI [16], и на его основе описаны алгебраические решения [17].

Еще одно доказательство сохранения указанных модулей при преобразовании Окамoto $(u, p) \rightarrow (U = u - \Delta/p, p)$, $\delta_i \rightarrow \Delta_i$ (без использования условия зависимости параметров t, u, p), опирающееся на формулы пересчета монодромии при преобразовании Лапласа, дано в [18].

Модули уравнения Гойна тоже не изменяются после интегрального преобразования с ядром $(x-z)^{-\alpha}$. Доказывается это “изомонодромным” переходом $t \rightarrow a$, $u(t) \rightarrow a$ в (1) и (5). В [14] показано, как вычислить монодромию функции $f(x)$ через монодромию функции $h(z)$ путем деформации контура интегрирования. Этот метод, видимо, дает прямое объяснение инвариантности модулей.

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УСЛОВИЯ ИЗОМОНОДРОМНОСТИ

Покажем, что решения системы (1), (2) получаются интегральным преобразованием решений системы (5), (6). Пусть $L[f]$ – как и прежде, левая часть уравнения (1), обозначим через $M[f]$ левую часть уравнения (2). Рассмотрим следующую систему на функцию $\psi(x, t, z)$:

$$\begin{aligned} L[\psi] &= Y(x, t, z) - Y(x, t, z_0), \\ M[\psi] &= S(x, t, z) - S(x, t, z_0), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$Y(x, t, z) = \frac{A(z, t)x^2 + B(z, t)x + C(z, t)}{x(x-1)(x-t)(x-u)(x-z)^{\alpha+1}}, \quad S(x, t, z) = \frac{D(z, t)x + E(z, t)}{(x-u)(x-z)^\alpha}.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $h(z, t)$ удовлетворяет системе (5), (6), то при $\alpha \neq 0, -1$ функция $\psi = \int_{z_0}^z h(z, t)(x-z)^{-\alpha} dz$ является решением системы (9) при некоторых A, B, C, D, E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $\alpha \neq 1$. Так как $h(z, t)$ – решение уравнения (5), то по теореме 1 указанная функция ψ – решение первого из уравнений (9), где функции A, B, C выражаются из формул (П.2)–(П.4) при $\Phi = h$. Далее, дифференцируя по z второе уравнение в (9) и подставляя $\psi_z = h(z, t)(x-z)^{-\alpha}$, получаем равенство (П.7). Прямым вычислением это равенство сводится к явному выражению для функций $D(z, t), E(z, t)$ через $h(z, t)$ и уравнению на h с частными производными h_{tz}, h_{zz} и младше, вытекающему из системы (5), (6). Это завершает доказательство при $\alpha \neq 1$.

В случае $\alpha = 1$ после дифференцирования по z уравнений (9) подстановка $\psi_z = h(z, t)(x-z)^{-\alpha}$ приводит к равенствам (П.1), (П.7) с $\Phi = h$. Вытекающее из (П.1) равенство (П.4) совпадает с (5), а (6) несложно вывести из (П.7). Наконец, задавая $\Phi = h$, можно найти A, B, C из (П.2), (П.3), (П.5), а D, E – из (П.7), интегрируя по z , где необходимо.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Delta_0, \alpha, \delta_0 \notin \mathbb{Z}$. Тогда если $h(z, t)$ – решение системы (5), (6), имеющее в окрестности точки $z = 0$ разложение вида $z^{-\Delta_0}(a(t) + a_1(t)z + \dots)$, а контур C – “двойная восьмерка”, охватывающая 0 и x , то функция $f(x, t) = \int_C h(z, t)(x-z)^{-\alpha} dz$ есть решение системы (1), (2), имеющее в окрестности точки $x = 0$ разложение вида $x^{-\delta_0}(b_0 a(t) + b_1 a_1(t)x + \dots)$, $b_0 \neq 0$.

Доказательство данного утверждения проводится так же, как доказательство утверждения 1 следствия из теоремы 1. При аналитическом продолжении от z_0 до $z = z_0$ вдоль контура C в правой части второго из уравнений (9) имеем $S(x, t, z) - S(x, t, z_0) = 0$. Это можно получить, выражая D и E ($\alpha \neq 0, -1, 1$) в явном виде через производные $h(z, t)$ по формулам (П.8)–(П.10).

Заметим, что ведущий коэффициент $a(t)$ разложений h и f в силу (2) и (6) подчиняется согласованным по отношению к преобразованию Окамoto уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{t(t-1)}{u-t}a' + \frac{\delta_0}{u}a - \left(\frac{2\beta u - (\alpha-1)t}{2(u-t)} + R(u-1) \right)a &= 0, \\ \frac{t(t-1)}{U-t}a' + \frac{\Delta_0}{U}a - \left(\frac{2\tilde{\beta}U - (\tilde{\alpha}-1)t}{2(U-t)} + \tilde{R}(U-1) \right)a &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вид калибровки (2) (см. также (6)) позволил не добавлять зависящий от t множитель перед интегральным преобразованием.

Утверждение 2 следствия из теоремы 1 не обобщается на систему (1), (2), так как уравнение (2) не имеет решений вида $f = c(t)\Psi_0 = c(t)(x-u)^2 + \dots$.

Система (9) представляет некоторый интерес и сама по себе, без предположений о виде ее решения. Из локального анализа общего решения ψ в окрестности $x = u$ следует, что у него нет логарифмической особенности, и после подстановки $\psi = a_0 + a_1(x - u) + a_2(x - u)^2 + \dots$ в (9) для члена разложения получатся уравнения с функциями $A(z, t)$, $A(z_0, t)$, $B(z, t)$, $B(z_0, t)$, $\dots$.

Отметим еще случай $\alpha = -2$, $\psi = ax^2 + bx + c$, где коэффициенты a , b , c имеют вид $r(z, t) - r(z_0, t)$. Как легко видеть, после такой подстановки система (9) сведется к одному уравнению, дифференциальному по t (третьего порядка), на функции от (z, t) и (z_0, t) . Неясно, будет ли уравнение Пенлеве VI его следствием. В [8] отмечалось, что известны по крайней мере две пары для Пенлеве VI, которые содержат разностное уравнение.

Метод “интегралов с параметром” Эйлера можно обобщить на фуксовы уравнения n -го порядка с m особыми точками, входящие в представление общей системы Шлезингера [19].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем вычисления к теореме 1. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi \left[\alpha(\alpha + 1) - \alpha \left(\frac{1 + \delta_0}{x} + \frac{1 + \delta_1}{x - 1} + \frac{1 + \delta_t}{x - t} - \frac{1}{x - u} \right) (x - z) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha\beta(x - u)(x - z)^2}{x(x - 1)(x - t)} + R \left(\frac{1}{x - u} - p \right) \frac{u(u - 1)(u - t)}{x(x - 1)(x - t)} (x - z)^2 \right] = \\ = \frac{(A_z x^2 + B_z x + C_z)(x - z) + (\alpha + 1)(Ax^2 + Bx + C)}{x(x - 1)(x - t)(x - u)}. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Вычитая все слагаемые правой части из обеих частей уравнения и учитывая равенство $\alpha + \beta = \delta_0 + \delta_1 + \delta_t + 1$, получаем равенство $F = 0$, где

$$F = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3}{x(x - 1)(x - t)(x - u)}.$$

Значит, (П.1) равносильно системе $F|_{x=z} = 0$, $F_x|_{x=z} = 0$, $F_{xx}|_{x=z} = 0$, $c_3 = 0$. Преобразуем эти уравнения к более развернутой форме.

Подстановка $x = z$ в (П.1) дает после сокращения на $\alpha + 1$ уравнение

$$\alpha\Phi = \frac{Az^2 + Bz + C}{z(z - 1)(z - t)(z - u)}. \quad (\text{П.2})$$

Продифференцируем (П.1) по x и подставим $x = z$, затем в полученном равенстве с помощью равенства (П.2) избавимся от $Az^2 + Bz + C$, $A_z z^2 + B_z z + C_z$ и после сокращения на α , учитывая, что $\Delta_i = \delta_i - \alpha + 1$, получим

$$-\Phi_z - \left(\frac{\Delta_0}{z} + \frac{\Delta_1}{z - 1} + \frac{\Delta_t}{z - t} - \frac{\alpha + 1}{z - u} \right) \Phi = \frac{2Az + B}{z(z - 1)(z - t)(z - u)}. \quad (\text{П.3})$$

Двукратное дифференцирование (П.1) по x и подстановка $x = z$ с дальнейшим использованием (П.2) и (П.3) приводит к равенству вида

$$\Phi_{zz} + (\dots)\Phi_z + (\dots)\Phi = \frac{(\alpha - 1)A}{z(z - 1)(z - t)(z - u)}, \quad (\text{П.4})$$

где коэффициенты при Φ , Φ_z не выписаны ввиду их громоздкости. При $\alpha = 1$ последнее уравнение совпадает с уравнением (8) с нулевой правой частью.

Разложим обе части равенства (П.1) по степеням x^{-1} , $x \rightarrow \infty$. Коэффициент при x^{-1} дает

$$[\alpha((1 + \delta_0)z + \dots) + \alpha\beta(\dots) - Rpu(u - 1)(u - t)]\Phi = A_z. \quad (\text{П.5})$$

Из (П.4) при $\alpha \neq 1$ найдем A , а затем и B , C из (П.3), (П.2), выразив их в явном виде через Φ , Φ_z , Φ_{zz} . Из (П.4), (П.5) получаем уравнение третьего порядка на Φ .

Подставим в (7) ряд $\psi = a_0(z) - a_0(z_0) + (a_1(z) - a_1(z_0))(x - u) + \dots$ по степеням $x - u$. Нетрудно видеть, что без ограничения общности можно избавиться от членов, пропорциональных $(x - u)^0$ и $(x - u)^2$, за счет вычитания решений однородного уравнения (1), т.е. считать $\psi = \tilde{a}_1(x - u) + \tilde{a}_3(x - u)^3 + \dots$. В результате после сравнения коэффициентов при $(x - u)^{-1}$ и $(x - u)^0$ в обеих частях (7) получаем

$$\left(p - \frac{\alpha + 1}{u - z}\right) \frac{A(z)u^2 + B(z)u + C(z)}{(u - z)^{\alpha+1}} + \frac{2A(z)u + B(z)}{(u - z)^{\alpha+1}} = T(z_0), \quad (\text{П.6})$$

где через $T(z_0)$ обозначено значение левой части при $z = z_0$. В теореме 1 константа $k = (u - U) \cdot T(z_0)$.

Промежуточная формула к теореме 2 имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{t(t - 1)}{u - t}h_t + \left(\frac{\alpha x(x - 1)}{(x - u)(x - z)} - \frac{2\beta u - (\alpha - 1)t}{2(u - t)} + R\frac{u(u - 1)}{x - u}\right)h = \\ = \frac{D_z x + E_z}{x - u} + \frac{\alpha(Dx + E)}{(x - u)(x - z)}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Находя вычет при $x = z$ в (П.7), после сокращения на α получаем

$$z(z - 1)h = Dz + E. \quad (\text{П.8})$$

Взятие вычета при $x = u$ в (П.7) приводит к равенству

$$u(u - 1)\left(R + \frac{\alpha}{u - z}\right)h = uD_z + E_z + \alpha\frac{uD + E}{u - z}. \quad (\text{П.9})$$

При $x \rightarrow \infty$ из (П.7) получаем

$$t(t - 1)h_t + \left((\alpha - \beta)u - \frac{(\alpha + 1)t}{2}\right)h = (u - t)D_z. \quad (\text{П.10})$$

При $\alpha \neq 1$ из (П.8)–(П.10) D , а затем E явно выражаются через функцию h и ее производные; после этого уравнение (П.10) становится уравнением относительно h .

Список литературы

- [1] *R. Fuchs*. C. R. Acad. Sci. Paris. 1905. V. 141. P. 555–558; Math. Ann. 1907. V. 63. P. 301–321.
- [2] *В. А. Добровольский*. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. Киев: Вища школа, 1974.
- [3] *В. В. Голубев*. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
- [4] *A. V. Kitaev*. Dessins d'enfants, their deformations and algebraic the sixth Painlevé and Gauss hypergeometric functions. nlin.SI/0309078.
- [5] *А. М. Бородин*. Изомонодромные деформации и уравнения Пенлеве в задачах случайно-матричного типа. Препринт ПОМИ № 04–2005; <http://www.pdmi.ras.ru>; *M. Jimbo, T. Miwa*. Physica D. 1981. V. 2. P. 407–448.
- [6] *K. Okamoto*. Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. 1980. V. 56. № 6. P. 264–268.
- [7] *K. Okamoto*. Ann. Mat. Pura Appl. Ser. IV. 1987. V. 146. P. 337–381.
- [8] *M. Noumi, Y. Yamada*. A new Lax pair for the sixth Painlevé equation associated with $\mathfrak{so}(8)$. In: Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis. Eds. T. Kawai, K. Fujita. River Edge, NJ: World Scientific, 2002. P. 238–252; math-ph/0203029.
- [9] *R. Conte, M. Musette*. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 10507–10522; *R. Conte*. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. Math. 2001. V. 332. № 6. P. 501–504; math.CA/0103165.
- [10] *M. Mazzocco*. J. London Math. Soc. Ser. 2. 2004. V. 70. P. 405–419; Painleve sixth equation as isomonodromic deformations equation of an irregular system. In: The Kowalevski Property. CRM Proc. Lecture Notes. V. 32. Ed. V. Kuznetsov. Providence, RI: AMS, 2002. P. 219–238.
- [11] *M. Inaba, K. Iwasaki, M. H. Saito*. Int. Math. Res. Notices. 2004. V. 2004. № 1. P. 1–30; math.AG/0309341.
- [12] *Л. Эйлер*. Интегральное исчисление. Т. 2. М.: Физматлит, 1957.
- [13] *K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida*. From Gauss to Painlevé, a Modern Theory of Special Functions. Aspects of Math. V. E 16. Wiesbaden: Vieweg–Verlag, 1991.
- [14] *А. Я. Казаков*. ТМФ. 1998. Т. 116. № 3. С. 323–335.
- [15] *А. Я. Казаков, С. Ю. Славянов*. ТМФ. 1996. Т. 107. № 3. С. 388–396.
- [16] *M. Jimbo*. Publ. RIMS Kyoto Univ. 1982. V. 18. P. 1137–1161.
- [17] *B. Dubrovin, M. Mazzocco*. Invent. Math. 2000. V. 141. P. 55–147; Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups. math.AG/9806056.
- [18] *P. Boalch*. Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 2005. V. 90. P. 167–208.
- [19] *B. Dubrovin, M. Mazzocco*. Canonical structure and symmetries of the Schlesinger equations. math.DG/0311261.

Поступила в редакцию 3.III.2005 г.,
после доработки 18.VIII.2005 г.