Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Миссаров, Р. Г. Степанов, Эпсилон-разложения в N -компонентной φ^4 -модели, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 3, 365–384

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2041>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 04:24:00

© 2006 г.

М. Д. Миссаров*, Р. Г. Степанов*

ЭПСИЛОН-РАЗЛОЖЕНИЯ В N -КОМПОНЕНТНОЙ φ^4 -МОДЕЛИ

Формализм проекционных гамильтонианов применен к N -компонентной $O(N)$ -инвариантной φ^4 -модели в евклидовом и p -адическом пространствах. Используются два варианта ε -разложений: при $\varepsilon = 4 - d$ и при $\varepsilon = \alpha - 3d/2$, где α – параметр ренормгруппы. Вычисляются критические индексы ν и η вплоть до второго порядка теории возмущений. При этом ответы в $(4 - d)$ -разложении совпадают с известными результатами, полученными методами квантово-полевой ренормгруппы. Проведенные расчеты говорят в пользу того, что в размерности три оба разложения описывают одну и ту же негауссовскую неподвижную точку ренормгруппы.

Ключевые слова: ε -разложение, ренормализационная группа, евклидовы и p -адические модели, теория возмущений, критические индексы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В большинстве физических работ по современной теории критических явлений используется вариант ренормализационной группы (РГ), основанный на уравнениях Каллана–Симанзика [1], где в качестве параметра разложения выбирается $\delta = (4 - d)$, d – размерность пространства, и в качестве основных объектов исследования выступают вершинные функции, а не гамильтонианы. Первоначальные работы Вильсона по теории РГ более явно используют понятия теории динамических систем (неподвижные точки, инвариантные многообразия и т.д.) [2].

В работах [3], [4] был развит формализм теории проекционных гамильтонианов, использующий методику РГ Вильсона. В них показано, что проекции гамильтонианов полей со всего пространства на шар образуют многообразие, инвариантное относительно преобразования Вильсона. Негауссовская ветвь инвариантных относительно преобразования РГ гамильтонианов строится как бифуркация от гауссовской ветви по параметру $\varepsilon = \alpha - 3d/2$, где α – параметр РГ. При построении этой ветви была использована процедура аналитической перенормировки по параметру ε . В работе [5] этот формализм был обобщен на случай $(4 - d)$ -разложения. В этом случае негауссовская ветвь бифурцирует от гауссовского гамильтониана, заданного оператором Лапласа, и используется процедура размерной перенормировки. Связь

*Казанский государственный университет, Казань, Россия.
E-mail: moukadas.missarov@ksu.ru, rstepanov@mail.ru

между этими двумя вариантами ε -разложений оставалась (и остается) не очень ясной.

Из точного решения фермионной иерархической модели [6] следует, что $(4 - d)$ -разложение при $\alpha = 2 + d$ (это значение α соответствует оператору Лапласа в гамильтониане гауссовской части) и $(\alpha - 3d/2)$ -разложение при $d = 3$ описывают одну и ту же негауссовскую неподвижную точку. Бозонная иерархическая модель не является точно решаемой, но низшие порядки соответствующих разложений для неподвижной точки в размерности три имеют одинаковую асимптотику по объему элементарной ячейки иерархической решетки [7]. Поэтому возникает естественная гипотеза: в евклидовых моделях $(\alpha - 3d/2)$ - и $(4 - d)$ -разложения также описывают одну и ту же негауссовскую неподвижную точку в размерности три. Эта гипотеза кажется нам правдоподобной, поскольку иерархические модели являются дискретными версиями p -адических моделей теории поля [8], а в формальном алгебраическом описании p -адические модели очень схожи с евклидовыми. Введением в теорию p -адических моделей математической физики является книга [9].

На наш взгляд, $(\alpha - 3d/2)$ -разложение является более естественным с математической точки зрения, в нем не приходится использовать понятие дробной размерности, и динамическая картина критических явлений становится более прозрачной.

В данной работе мы обобщаем формализм проекционных гамильтонианов на общий случай N -компонентной $O(N)$ -инвариантной φ^4 -модели. Действие преобразования РГ на перенормированный проекционный гамильтониан описывается как формальный дифференциальный оператор, и константы связи, задающие негауссовскую неподвижную точку, определяются из условия равенства нулю коэффициентов функций этого дифференциального оператора.

В случае $(4 - d)$ -разложения эти условия однозначно определяют значение параметра РГ $\alpha = \alpha(\delta)$ и приводят к возникновению ненулевой аномальной размерности. Критический индекс ν определяется старшим собственным числом дифференциала РГ в негауссовской неподвижной точке. При этом ответы в $(4 - d)$ -разложении совпадают с известными результатами, полученными методами квантово-полевой РГ.

В то же время $(\alpha - 3d/2)$ -разложение не фиксирует значение α и позволяет построить нетривиальный неподвижный гамильтониан при произвольном α в окрестности $\alpha = 3d/2$. Мы сравниваем результаты разложений для ν , подставляя значение $\alpha(\delta)$ в $(\alpha - 3d/2)$ -разложение. Вплоть до второго порядка теории возмущений результаты совпадают, и это говорит в пользу того, что в размерности три оба разложения описывают одну и ту же негауссовскую неподвижную точку РГ. Вопрос о том, как определить значение α , соответствующее этой неподвижной точке, оставаясь только в рамках $(\alpha - 3d/2)$ -разложения, остается открытым.

В случае p -адической модели формализм проекционных гамильтонианов также применим. Главным отличием от евклидовой модели является то, что $(4 - d)$ -разложение приводит к нулевой аномальной размерности.

Другим популярным методом получения разложений для критических индексов является $1/N$ -разложение [10]. Непротиворечивость этих разложений во всех порядках по $1/N$ показана в работах [11]. Было бы интересно объединить формализмы $1/N$ -разложения, ε -разложения при $\varepsilon = \alpha - 3d/2$ и δ -разложения при $\delta = 4 - d$ в

рамках единой схемы проекционных гамильтонианов. Другой интересной задачей является строгое описание предела N -компонентной иерархической φ^4 -модели при $N \rightarrow \infty$. Все эти вопросы мы надеемся осветить в последующих публикациях.

2. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\sigma(q) = (\sigma_1(q), \dots, \sigma_N(q))$ – N -компонентное гиббсовское поле в d -мерном шаре $\Omega_R = \{q : |q| \leq R\}$, заданное формальным гамильтонианом вида

$$H(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_{2k}=1}^N F_{i_1, \dots, i_{2k}} \times \\ \times \int_{q_1, \dots, q_{2k} \in \Omega_R} h_k(q_1, \dots, q_{2k}) \delta(q_1 + \dots + q_{2k}) \prod_{s=1}^{2k} \sigma_{i_s}(q_s) dq, \quad (1)$$

где $h_k(q_1, \dots, q_{2k})$ – функции, удовлетворяющие свойствам изотропности и инвариантности относительно перестановок переменных,

$$F_{i_1, \dots, i_{2k}} = \frac{1}{(2k-1)!!} \sum_{\gamma} \prod_{(m_1, m_2) \in \gamma} \delta_{i_{m_1}, i_{m_2}}, \quad (2)$$

суммирование по γ ведется по всем разбиениям набора $\{1, \dots, 2k\}$ на пары.

Нетрудно убедиться, что гамильтониан вида (1) является $O(N)$ -инвариантным.

Действие преобразования РГ Вильсона $r_{\lambda, \alpha}$ задается соотношениями

$$r_{\lambda, \alpha} \sigma(q) = (s_{\lambda, \alpha} \sigma(q)) \chi(q), \quad s_{\lambda, \alpha} \sigma(q) = |\lambda|^{-\alpha/2} \sigma\left(\frac{q}{\lambda}\right),$$

где λ – параметр растяжения, α – параметр РГ, $\chi(q)$ – индикатор шара Ω_R . В пространстве гамильтонианов преобразование РГ $R_{\lambda, \alpha}$ представляет собой композицию двух преобразований, $R_{\lambda, \alpha} = P_{\lambda} S_{\lambda, \alpha}$, где преобразование скейлинга $S_{\lambda, \alpha}$ индуцировано преобразованием $s_{\lambda, \alpha}$ и сводится к изменению коэффициентных функций:

$$h'_k(q_1, \dots, q_{2k}) = |\lambda|^{\alpha k - 2kd + d} h_k\left(\frac{q_1}{\lambda}, \dots, \frac{q_{2k}}{\lambda}\right).$$

Оператор проекции P_{λ} индуцирован операцией ограничения поля $\sigma'(q) = s_{\lambda, \alpha} \sigma(q)$, живущего в шаре $\Omega_{\lambda R}$, на шар Ω_R . Пусть $\sigma_0(q) = \chi(q) \sigma'(q)$, $\sigma_1(q) = (1 - \chi(q)) \sigma'(q)$, так что поле $\sigma_0(q)$ определено в шаре Ω_R , поле $\sigma_1(q)$ – в кольце $\Omega_{\lambda R} \setminus \Omega_R$, и при этом $\sigma' = \sigma_0 + \sigma_1$. Если $H'(\sigma')$ – гамильтониан поля σ' , то гамильтониан $P_{\lambda} H'$ является гамильтонианом поля σ_0 и определяется по формуле

$$P_{\lambda} H'(\sigma_0) = -\ln \frac{\int D\sigma_1 \exp(-H'(\sigma_0 + \sigma_1))}{\int D\sigma_0 \int D\sigma_1 \exp(-H'(\sigma_0 + \sigma_1))}.$$

Пусть $H(\sigma)$ – гамильтониан поля σ , заданного во всем пространстве $\mathbb{R}^d$. Обозначим через PH проекцию H на шар Ω_R , тогда

$$PH(\sigma_0) = -\ln \frac{\int D\sigma_1 \exp(-H(\sigma_0 + \sigma_1))}{\int D\sigma_0 \int D\sigma_1 \exp(-H(\sigma_0 + \sigma_1))},$$

где $\sigma_0(q) = \chi(q)\sigma(q)$ – поле в шаре Ω_R , $\sigma_1 = (1 - \chi(q))\sigma(q)$ – поле, определенное в $\mathbb{R}^d \setminus \Omega_R$. Таким образом, PH – гамильтониан поля, заданного в шаре Ω_R .

ЛЕММА 1. Пусть гамильтониан $H(\sigma)$ поля σ , заданного в $\mathbb{R}^d$, имеет вид

$$H(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_{2k}=1}^N F_{i_1, \dots, i_{2k}} \int h_k(q_1, \dots, q_{2k}) \delta(q_1 + \dots + q_{2k}) \prod_{s=1}^{2k} \sigma_{i_s}(q_s) dq. \quad (3)$$

Тогда $R_{\lambda, \alpha}(PH) = P(S_{\lambda, \alpha}H)$, где

$$S_{\lambda, \alpha}H(\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_{2k}=1}^N F_{i_1, \dots, i_{2k}} |\lambda|^{\alpha k - 2kd + d} \times \\ \times \int h_k\left(\frac{q_1}{\lambda}, \dots, \frac{q_{2k}}{\lambda}\right) \delta(q_1 + \dots + q_{2k}) \prod_{s=1}^{2k} \sigma_{i_s}(q_s) dq.$$

Доказательство данного утверждения в случае N -компонентной модели аналогично доказательству для однокомпонентного случая, приведенному в [3].

Введем следующие обозначения:

$$H_{0, \alpha, R}(\sigma) = \sum_{i=1}^N \int_{q_1, q_2 \in \Omega_R} \delta(q_1 + q_2) |q_1|^{\alpha - d} \sigma_i(q_1) \sigma_i(q_2) dq, \\ H_{0, R}(\sigma) = \sum_{i=1}^N \int_{q_1, q_2 \in \Omega_R} \delta(q_1 + q_2) |q_1|^2 \sigma_i(q_1) \sigma_i(q_2) dq, \quad (4) \\ H_k(\sigma) = \sum_{i_1, \dots, i_{2k}=1}^N F_{i_1, \dots, i_{2k}} \int_{q_1, \dots, q_{2k} \in \mathbb{R}^d} \delta(q_1 + \dots + q_{2k}) \prod_{s=1}^{2k} \sigma_{i_s}(q_s) dq, \quad k \geq 1.$$

Заметим, что гамильтониан $H_{0, \alpha, R}/2$ является гауссовской неподвижной точкой оператора $R_{\lambda, \alpha}$.

Для подсчета возникающих функциональных интегралов будем пользоваться техникой фейнмановских диаграмм. Пусть G – некоторый связный фейнмановский граф, построенный на n вершинах (n – натуральное число), и все эти вершины пронумерованы числами от 1 до n . Степенью вершины назовем количество линий, выходящих из данной вершины. Обозначим степень вершины с номером v через $2k_v$ (считаем, что это всегда четное число). Пусть все линии, выходящие из вершины v , пронумерованы числами от 1 до $2k_v$.

Предположим, что граф G имеет $2k$ внешних линий. Каждая внешняя линия определяется набором (v, m) , где v – номер вершины, из которой выходит линия, m – порядковый номер этой линии среди линий данной вершины. отождествим каждую внутреннюю линию с четверкой (v_1, m_1, v_2, m_2) . При этом считаем, что внутренняя линия (v_1, m_1, v_2, m_2) соединяет вершины v_1, v_2 и имеет для вершины v_1 номер m_1 , а для вершины v_2 номер m_2 .

Пусть $L(G) = \{(v_1, m_1, v_2, m_2)\}$ – множество внутренних линий графа G ; $E(G) = \{(v, m)\}$ – множество внешних линий графа G , $\mathcal{F}_G(q)$ – фейнмановская амплитуда

графа G с пропагатором

$$\langle \sigma(p), \sigma(q) \rangle = \delta(p+q)\theta(p)$$

с некоторой допустимой функцией $\theta(q)$. Для натуральных $k_1, \dots, k_n$ положим

$$\begin{aligned} \langle H_{k_1} H_{k_2} \dots H_{k_n} \rangle_\theta^c = \sum_G \sum_{\substack{i_1^1, \dots, i_{2k_1}^1=1 \\ \dots \\ i_1^n, \dots, i_{2k_n}^n=1}}^N \left(\prod_{v=1}^n F_{i_1^v, \dots, i_{2k_v}^v} \right) \times \\ \times \left(\prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(G)} \delta_{i_{m_1}^{v_1} i_{m_2}^{v_2}} \right) \int \mathcal{F}_G(q) \prod_{(v, m) \in E(G)} \sigma_{i_m^v}(q_m^v) dq, \end{aligned} \quad (5)$$

где внешнее суммирование ведется по всем связным невакуумным фейнмановским графам G , построенным на n вершинах, причем количество линий, выходящих из вершины с номером v равно $2k_v$, $v = 1, \dots, n$.

Для произвольной функции $F(x_1, \dots, x_n)$, представленной степенным рядом, определим $\langle F(H_1, \dots, H_n) \rangle_\theta^c$ как соответствующий ряд, составленный из членов вида (5).

На языке фейнмановских диаграмм оператор проекции можно записать следующим образом:

$$P\left(\frac{1}{2}H_{0,\alpha,\infty} + \sum_{k=1}^m u_k H_k\right) = \frac{1}{2}H_{0,\alpha,R} - \left\langle \exp\left(-\sum_{k=1}^m u_k H_k\right) \right\rangle_{\theta_1}^c, \quad (6)$$

$$P\left(\frac{1}{2}H_{0,\infty} + \sum_{k=1}^m u_k H_k\right) = \frac{1}{2}H_{0,R} - \left\langle \exp\left(-\sum_{k=1}^m u_k H_k\right) \right\rangle_{\theta_2}^c, \quad (7)$$

где

$$\theta_1(q) = |q|^{d-\alpha}(1 - \chi(q)), \quad \theta_2(q) = |q|^{-2}(1 - \chi(q)). \quad (8)$$

3. $(\alpha - 3d/2)$ -РАЗЛОЖЕНИЕ

Негауссовские гамильтонианы, инвариантные относительно действия РГ, будем искать в пространстве проекционных гамильтонианов вида

$$\frac{1}{2}H_{0,\alpha,R} - \langle \exp(-v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c, \quad (9)$$

где θ_1 определено в (8).

Как и в случае однокомпонентной модели, анализ дифференциала РГ на гауссовской ветви неподвижных точек показывает, что $\alpha = 3d/2$ является бифуркационным значением. Дальнейшие разложения будут строиться по параметру $\varepsilon = \alpha - 3d/2$. Поскольку фейнмановские амплитуды, задающие коэффициентные функции проекционных гамильтонианов вида (9), расходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$, то для их определения в точке $\varepsilon = 0$ нам понадобится процедура перенормировки. Наиболее естественной процедурой перенормировки является процедура аналитической перенормировки.

Пусть $\text{A.R.}\mathcal{F}_G(q)$ – операция аналитической перенормировки по параметру ε фейнмановской амплитуды $\mathcal{F}_G(q)$, соответствующей графу G :

$$\text{A.R.}\mathcal{F}_G(q) = \sum_{r=1}^n \sum_{V_1, \dots, V_r} \sum_{\substack{\{G_1, \dots, G_r\}: \\ V(G_j) = V_j}} \mathcal{F}_{G|G_1, \dots, G_r}(q) \prod_{j=1}^r O(G_j), \quad (10)$$

где n – количество вершин графа G , второе суммирование ведется по неупорядоченным разбиениям множества вершин графа G на r непустых множеств $V_1, \dots, V_r$. Внутреннее суммирование ведется по различным разбиениям графа G на подграфы $G_1, \dots, G_r$ такие, что множество вершин каждого подграфа G_j совпадает с V_j , $G|G_1, \dots, G_r$ – граф, получаемый из G путем “стягивания” подграфов $G_1, \dots, G_r$, $O(G_j)$ – вершинные части графов G_j .

Известно, что при d , не кратном 4, вершинная часть $O(G)$ является полиномом от ε^{-1} , отличным от нуля только в следующих случаях.

- Граф G состоит из одной вершины и не имеет внутренних линий. В этом случае $O(G) = 1$.
- Граф G одночастично неприводим, степени всех вершин равны 4 и число внешних линий равно 4. В этом случае $O(G)$ – полином от ε^{-1} без свободного члена.
- Граф G одночастично неприводим, степень одной вершины равна 2, степени остальных вершин равны 4, а число внешних линий равно 2. В этом случае, как и в предыдущем, $O(G)$ – полином от ε^{-1} без свободного члена.

Вершинные части $O(G)$ подбираются так, чтобы величина $\text{A.R.}\mathcal{F}_G(q)$ не имела полюса в точке $\varepsilon = 0$. Это условие и формула (10) фактически задают рекурсивный алгоритм вычисления вершинных частей.

Рассмотрим перенормированный проекционный гамильтониан

$$H_{\text{eff}}(u_1, u_2) = \frac{1}{2} H_{0, \alpha, R} - \text{A.R.} \langle \exp(-u_1 H_1 - u_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c. \quad (11)$$

Здесь операция аналитической перенормировки применяется ко всем фейнмановским амплитудам $\mathcal{F}_G(q)$, возникающим в выражениях вида (5), и обеспечивает конечность гамильтониана при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Тензорным коэффициентом* графа G назовем следующее выражение:

$$S_N(G) = N^{-k} \sum_{\substack{i_1^1, \dots, i_{2k_1}^1 = 1 \\ \dots \\ i_1^n, \dots, i_{2k_n}^n = 1}}^N \left(\prod_{v=1}^n F_{i_1^v, \dots, i_{2k_v}^v} \right) \left(\prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(G)} \delta_{i_{m_1}^{v_1}, i_{m_2}^{v_2}} \right) \quad (12)$$

(см. обозначения, предшествующие (5)).

ТЕОРЕМА 1 (теорема о контрчленах). *Для гамильтониана (11) справедливо представление*

$$H_{\text{eff}}(u_1, u_2) = \frac{1}{2} H_{0, \alpha, R} - \langle \exp(-u_1 w_1(u_2) H_1 - w_2(u_2) H_2) \rangle_{\theta_1}^c,$$

где

$$w_1(u) = 1 + \sum_{n \geq 1} O_1(n) \frac{(-u)^n}{n!}, \quad O_1(n) = \sum_{G_1} O(G_1) S_N(G_1), \quad (13)$$

$$w_2(u) = - \sum_{n \geq 1} O_2(n) \frac{(-u)^n}{n!}, \quad O_2(n) = \sum_{G_2} O(G_2) S_N(G_2). \quad (14)$$

Суммирование в формуле для $O_1(n)$ выполняется по фейнмановским графам G_1 , порожденным n вершинами степени 4 и одной вершиной степени 2 и имеющим две внешние линии. Суммирование в формуле для $O_2(n)$ выполняется по графам G_2 , порожденным n вершинами степени 4 и имеющим четыре внешние линии.

Доказательство теоремы см. в приложении.

Положим $v_1 = u_1 w_1(u_2)$, $v_2 = w_2(u_2)$. Рассмотрим множество гамильтонианов, представимых в виде

$$H = \langle F(v_1 H_1, v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c, \quad (15)$$

где $F(x_1, x_2)$ – формальный степенной ряд от переменных x_1, x_2 . Воспользуемся теоремой 1 и представим гамильтониан $H_{\text{eff}}(u_1, u_2) - H_{0,\alpha}/2$ в виде (15), при этом $F(x_1, x_2) = -e^{-x_1 - x_2}$.

Определим оператор $\tilde{R}_\tau$ на гамильтонианах вида (15) с помощью формулы

$$\tilde{R}_\tau(\langle F(v_1 H_1, v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c) = \langle F(e^{\tau(\alpha-d)} v_1 H_1, e^{\tau(2\alpha-3d)} v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c.$$

ЛЕММА 2. Для оператора $\tilde{R}_\tau$ справедливо представление

$$\tilde{R}_\tau = \exp\left(\tau \sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial}{\partial u_j}\right), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_2(u_2) &= (2\alpha - 3d) \frac{w_2(u_2)}{w_2'(u_2)}, \\ \beta_1(u_1, u_2) &= u_1 \left(\alpha - d + (2\alpha - 3d) \frac{w_1'(u_2)}{w_1(u_2)} \frac{w_2(u_2)}{w_2'(u_2)} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что семейство операторов $\tilde{R}_\tau$ образует аддитивную непрерывную полугруппу относительно параметра τ . Следовательно,

$$\tilde{R}_\tau = e^{\tau B}, \quad B = \left. \frac{\partial \tilde{R}_t}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Таким образом, остается проверить, что $B = \sum_{j=1}^2 \beta_j \partial / \partial u_j$.

Рассмотрим произвольный гамильтониан вида (15). С одной стороны,

$$\begin{aligned} B \langle F(v_1 H_1, v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \tilde{R}_t(\langle F(v_1 H_1, v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c) \right|_{t=0} = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \langle F(v_1 H_1 e^{t(\alpha-d)}, v_2 H_2 e^{t(2\alpha-3d)}) \rangle_{\theta_1}^c \right|_{t=0} = \\ &= \langle (\alpha - d) v_1 H_1 F_1(v_1 H_1, v_2 H_2) + (2\alpha - 3d) v_2 H_2 F_2(v_1 H_1, v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c, \end{aligned} \quad (18)$$

где $F_i(x_1, x_2) = \partial F(x_1, x_2) / \partial x_i$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial}{\partial u_j} \langle F(v_1 H_1, v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c &= \left\langle \sum_{j=1}^2 \beta_j \sum_{i=1}^2 F_i(v_1 H_1, v_2 H_2) H_i \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \right\rangle_{\theta_1}^c = \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \right) F_i(v_1 H_1, v_2 H_2) H_i \right\rangle_{\theta_1}^c. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что формальные ряды для β_1, β_2 удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial v_1}{\partial u_j} = (\alpha - d)v_1, \quad \sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial v_2}{\partial u_j} = (2\alpha - 3d)v_2.$$

Следовательно, выражения (18), (19) совпадают. Отсюда следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 2. Действие PG на перенормированный проекционный гамильтониан (11) задается формальным дифференциальным оператором

$$R_{\lambda, \alpha} H_{\text{eff}}(u_1, u_2) = \exp \left(\ln |\lambda| \sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right) H_{\text{eff}}(u_1, u_2), \quad (20)$$

где величины β_1, β_2 определены в (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (6), теореме о контрчленах и лемме 1 имеют место равенства

$$\begin{aligned} R_{\lambda, \alpha} H_{\text{eff}}(u_1, u_2) &= R_{\lambda, \alpha} \left(\frac{1}{2} H_{0, \alpha} - \langle \exp(-v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c \right) = \\ &= R_{\lambda, \alpha} P \left(\frac{1}{2} H_{0, \alpha} + v_1 H_1 + v_2 H_2 \right) = \\ &= P \left(\frac{1}{2} H_{0, \alpha} + v_1 |\lambda|^{\alpha-d} H_1 + v_2 |\lambda|^{2\alpha-3d} H_2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} H_{0, \alpha} - \langle \exp(-v_1 |\lambda|^{\alpha-d} H_1 - v_2 |\lambda|^{2\alpha-3d} H_2) \rangle_{\theta_1}^c. \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть $\tau = \ln |\lambda|$. Тогда, используя лемму 2, получим, что

$$\begin{aligned} R_{\lambda, \alpha} H_{\text{eff}}(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} H_{0, \alpha} - \tilde{R}_\tau (\langle \exp(-v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c) = \\ &= \exp \left(\tau \sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right) H_{\text{eff}}(u_1, u_2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 3. Формальные степенные ряды для $\beta_1(u_1, u_2), \beta_2(u_2)$ имеют следующий вид:

$$\beta_1(u_1, u_2) = u_1 \sum_{n \geq 0} b_{1,n} u_2^n, \quad \beta_2(u_2) = 2\varepsilon u_2 + \sum_{n \geq 2} b_{2,n} u_2^n, \quad (22)$$

где коэффициенты $b_{1,n}, b_{2,n}$, не зависят от ε . При этом $b_{1,0} \neq 0, b_{2,2} \neq 0$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующей теоремы для случая $N = 1$ [3], [4].

Из теоремы 2 следует, что гамильтониан $H_{\text{eff}}(u_1, u_2)$ инвариантен относительно преобразования РГ $R_{\lambda, \alpha}$, если u_1, u_2 удовлетворяют системе из двух уравнений $\beta_1(u_1, u_2) = 0, \beta_2(u_2) = 0$.

Используя теорему 3, заключаем, что данная система имеет два решения в виде формальных степенных рядов по ε : тривиальное (гауссовское) решение $u_1 = u_2 = 0$, соответствующее гауссовскому неподвижному гамильтониану, и негауссовское решение $u_1 = 0, u_2 = \tilde{u}$, где $\tilde{u} = c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots$, – нетривиальное решение уравнения $\beta_2(\tilde{u}) = 0, c_1 \neq 0$.

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\tilde{u}$ – нетривиальное решение уравнения $\beta_2(\tilde{u}) = 0$. Тогда гамильтониан $H_{\text{eff}}(0, \tilde{u})$ является негауссовским гамильтонианом, неподвижным относительно оператора $R_{\lambda, \alpha}$.

Обратимся к вычислению критических индексов ν, η . Критический индекс η определяется по формуле $\eta = 2 + d - \alpha$, следовательно, $\eta = (4 - d)/2 - \varepsilon$. Критический индекс ν определяется следующим образом: $\nu = \ln |\lambda| / \ln \lambda_1$, где λ_1 – старшее собственное число дифференциала $R_{\lambda, \alpha}$ в нетривиальной неподвижной точке.

ТЕОРЕМА 5. Гамильтониан $\frac{\partial}{\partial u_1} H_{\text{eff}}(u_1, u_2) \Big|_{u_1=0, u_2=\tilde{u}}$ является собственным гамильтонианом дифференциала $R_{\lambda, \alpha}$ в неподвижной точке $H_{\text{eff}}(0, \tilde{u})$ с собственным числом $\lambda_1 = |\lambda| \Big| \frac{\partial \beta_1}{\partial u_1} \Big|_{u_1=0, u_2=\tilde{u}}$. Критический индекс равен

$$\nu = \left(\frac{d}{2} + \varepsilon + 2\varepsilon \frac{w'_1(\tilde{u})}{w_1(\tilde{u})} \frac{w_2(\tilde{u})}{w'_2(\tilde{u})} \right)^{-1}. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = \partial H_{\text{eff}}(u_1, u_2) / \partial u_1$. Тогда

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\partial}{\partial u_1} \text{A.R.} \langle \exp(-u_1 H_1 - u_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c = -\frac{\partial}{\partial u_1} \langle \exp(-v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c = \\ &= \left\langle \left(\frac{\partial v_1}{\partial u_1} H_1 + \frac{\partial v_2}{\partial u_1} H_2 \right) \exp(-v_1 H_1 - v_2 H_2) \right\rangle_{\theta_1}^c = \langle w_1 H_1 \exp(-v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c. \end{aligned}$$

Дифференциал D оператора $R_{\lambda, \alpha}$ в точке $H_{\text{eff}}(u_1, u_2)$, примененный к гамильто-

ниану H , равен

$$\begin{aligned}
 DH &= \frac{\partial}{\partial a} R_{\lambda, \alpha} (H_{\text{eff}} + aH) \Big|_{a=0} = \\
 &= \frac{\partial}{\partial a} R_{\lambda, \alpha} \left(\frac{1}{2} H_{0, \alpha} - \langle (1 - aw_1 H_1) \exp(-v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c \right) \Big|_{a=0} = \\
 &= \langle w_1 H_1 |\lambda|^{\alpha-d} \exp(-v_1 H_1 |\lambda|^{\alpha-d} - v_2 H_2 |\lambda|^{2\alpha-3d}) \rangle_{\theta_1}^c = \\
 &= u_1^{-1} \tilde{R}_{\ln |\lambda|} \langle v_1 H_1 \exp(-v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c = \\
 &= u_1^{-1} \exp \left(\ln |\lambda| \sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \langle v_1 H_1 \exp(-v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c = \\
 &= \exp \left(\ln |\lambda| u_1^{-1} \left(\sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right) u_1 \right) \langle w_1 H_1 \exp(-v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c.
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$u_1^{-1} \left(\sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right) u_1 = u_1^{-1} \beta_1 + \sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial}{\partial u_j}.$$

Так как $u_1^{-1} \beta_1 = \partial \beta_1 / \partial u_1$, то

$$DH = \exp \left(\ln |\lambda| \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial u_1} + \sum_{j=1}^2 \beta_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \right) H.$$

В точке $(u_1, u_2) = (0, \tilde{u})$ выполнены равенства $\beta_1(u_1, u_2) = 0$, $\beta_2(u_1, u_2) = 0$, следовательно,

$$DH = |\lambda|^{\frac{\partial \beta_1}{\partial u_1} |_{u_1=0, u_2=\tilde{u}}} H = \lambda_1 H,$$

а значит, H – собственный гамильтониан с собственным числом λ_1 . Формула (23) следует из соотношения

$$\nu^{-1} = \frac{\ln \lambda_1}{\ln |\lambda|} = \frac{\partial \beta_1}{\partial u_1} \Big|_{u_1=0, u_2=\tilde{u}} = \alpha - d + (2\alpha - 3d) \frac{w_1'(\tilde{u})}{w_1(\tilde{u})} \frac{w_2(\tilde{u})}{w_2'(\tilde{u})}.$$

В разложении до второго порядка по ε получаем следующий ответ для модели в евклидовом пространстве:

$$\nu^{-1} = \frac{d}{2} + \varepsilon - 2 \frac{N+2}{N+8} \varepsilon + 8\varepsilon^2 \frac{(N+2)(7N+20)}{(N+8)^3} A(d) + O(\varepsilon^3), \quad (24)$$

где

$$A(d) = -\frac{1}{2} \left(-\gamma - 2\psi \left(\frac{d}{4} \right) + \psi \left(\frac{d}{2} \right) \right), \quad \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

$\gamma = 0.577216$ – константа Эйлера.

4. $(4 - d)$ -РАЗЛОЖЕНИЕ

В этом разделе мы опишем инвариантную относительно преобразования РГ ветвь негауссовских $O(N)$ -симметричных гамильтонианов вида

$$\frac{1}{2}H_{0,R} - \langle \exp(-v_0 H_0 - v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_2}^c, \quad (25)$$

где θ_2 определено в (8). В качестве малого параметра выбран параметр $\delta = 4 - d$. О том, как понимать гамильтониан в дробной размерности, см. [5].

Для удаления расходимостей фейнмановских амплитуд $\mathcal{F}_G(q)$ при $\delta \rightarrow 0$ будем использовать процедуру размерной перенормировки D.R.:

$$\text{D.R.}\mathcal{F}_G(q) = \sum_{r=1}^n \sum_{V_1, \dots, V_r} \sum_{\substack{\{G_1, \dots, G_r\}: \\ V(G_j)=V_j}} \mathcal{F}_{G|G_1, \dots, G_r}(q) \prod_{j=1}^r O(G_j), \quad (26)$$

где обозначения аналогичны обозначениям в (10).

Известно, что при процедуре размерной перенормировки вершинная часть $O(G)$ является полиномом от δ^{-1} , отличным от нуля только в следующих случаях.

- Граф G состоит из одной вершины и не имеет внутренних линий. В этом случае $O(G) = 1$.
- Граф G одночастично неприводим, степени всех вершин равны 4 и число внешних линий равно 4. В этом случае $O(G)$ не зависит от q и является полиномом от δ^{-1} без свободного члена.
- Граф G одночастично неприводим, степень одной вершины равна 2, степени остальных вершин равны 4, а число внешних линий равно 2. В этом случае, как и в предыдущем, $O(G)$ не зависит от q и является полиномом от δ^{-1} без свободного члена.
- Граф G одночастично неприводим, степени всех вершин равны 4, а количество внешних линий равно 2. В этом случае $O(G) = \tilde{O}(G)|q|^2$, где $\tilde{O}(G)$ не зависит от q и является полиномом от δ^{-1} без свободного члена.

Формула (26) используется для рекуррентного вычисления величин $O(G)$ так, чтобы перенормированная амплитуда $\text{D.R.}\mathcal{F}_G(q)$ не имела полюса при $\delta = 0$.

Рассмотрим перенормированный проекционный гамильтониан

$$H_{\text{eff}}(u_0, u_1, u_2) = \frac{1}{2}H_{0,R} - \text{D.R.}\langle \exp(-u_0 H_0 - u_1 H_1 - u_2 H_2) \rangle_{\theta_2}^c. \quad (27)$$

ТЕОРЕМА 6 (теорема о контрчленах). *Для гамильтониана (27) справедливо представление*

$$H_{\text{eff}}(u_0, u_1, u_2) = \frac{1}{2}H_{0,R} - \langle \exp(-v_0 H_0 - v_1 H_1 - v_2 H_2) \rangle_{\theta_2}^c,$$

где

$$\begin{aligned}
 v_0 &= u_0 + (1 + 2u_0)w_0 \left(\frac{u_2}{(1 + 2u_0)^2} \right), \\
 v_1 &= u_1 w_1 \left(\frac{u_2}{(1 + 2u_0)^2} \right), \quad v_2 = (1 + 2u_0)^2 w_2 \left(\frac{u_2}{(1 + 2u_0)^2} \right), \\
 w_0(u) &= - \sum_{n \geq 2} O_0(n) \frac{(-u)^n}{n!}, \quad O_0(n) = \sum_{G_0} \tilde{O}(G_0) S_N(G_0), \\
 w_1(u) &= 1 + \sum_{n \geq 1} O_1(n) \frac{(-u)^n}{n!}, \quad O_1(n) = \sum_{G_1} O(G_1) S_N(G_1), \\
 w_2(u) &= - \sum_{n \geq 1} O_2(n) \frac{(-u)^n}{n!}, \quad O_2(n) = \sum_{G_2} O(G_2) S_N(G_2).
 \end{aligned}$$

Суммирование в формуле для $O_0(n)$ выполняется по графам G_0 с двумя внешними линиями, порожденным n вершинами степени 4. Суммирование в формуле для $O_1(n)$ выполняется по графам G_1 с двумя внешними линиями, порожденным n вершинами степени 4 и одной вершиной степени 2. Суммирование в формуле для $O_2(n)$ выполняется по графам G_2 с четырьмя внешними линиями, порожденным n вершинами степени 4.

ТЕОРЕМА 7. Действие РГ на перенормированный проекционный гамильтониан (27) задается формальным дифференциальным оператором:

$$R_{\lambda, \alpha} H_{\text{eff}}(u_0, u_1, u_2) = \exp \left(\ln |\lambda| \left(\sum_{j=0}^2 \beta_j \frac{\partial}{\partial u_j} \right) \right) H_{\text{eff}}(u_0, u_1, u_2), \quad (28)$$

где $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^2 \beta_j \frac{\partial v_0(u)}{\partial u_j} &= (\alpha - d - 2) \left(\frac{1}{2} + v_0 \right), \\
 \sum_{j=0}^2 \beta_j \frac{\partial v_i(u)}{\partial u_j} &= (\alpha i - 2id + d) v_i(u), \quad i = 1, 2.
 \end{aligned} \quad (29)$$

Доказательство теорем 6, 7 аналогично доказательству теорем 1, 2.

Для определения неподвижной точки РГ необходимо найти такие значения u_0, u_1, u_2, α , при которых выполняются соотношения $\beta_0 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть

$$\begin{aligned}
 \rho_0(u) &= \frac{w'_0(u)}{1/2 + w_0(u)}, \quad \rho_1(u) = \frac{w'_1(u)}{w_1(u)}, \quad \rho_2(u) = \frac{w_2(u)}{w'_2(u)}, \\
 \zeta(u) &= \frac{4 - d}{1 - 2\rho_0(u)\rho_2(u)}.
 \end{aligned}$$

Если формальный ряд $\tilde{u}$ удовлетворяет уравнению

$$\zeta(\tilde{u})\rho_2(\tilde{u}) = 0 \quad (30)$$

и выполняется соотношение

$$\alpha = \frac{3}{2}d + \frac{\zeta(\tilde{u})}{2}, \quad (31)$$

то для любого u_0 гамильтониан $H_{\text{eff}}(u_0, 0, \tilde{u}(1+2u_0)^2)$ является неподвижной точкой преобразования $R_{\lambda, \alpha}$. Критические индексы ν и η определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \nu^{-1} &= \alpha - d - \rho_1(\tilde{u})\rho_2(\tilde{u})\zeta(\tilde{u}), \\ \eta &= 2 + d - \alpha = \frac{4-d}{2} - \frac{\zeta(\tilde{u})}{2}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы (7) следует, что гамильтониан $H_{\text{eff}}(u_0, u_1, u_2)$ является неподвижной точкой РГ, если выполнены равенства $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$. Решая систему (29) относительно $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0}{1+2u_0} &= \frac{2\alpha - 3d - \zeta(\tilde{u})}{4}, \\ \frac{\beta_2}{(1+2u_0)^2} &= (2\alpha - 3d)\rho_2(\tilde{u}) - (2\alpha - 3d - \zeta(\tilde{u}))(\rho_2(\tilde{u}) - \tilde{u}), \\ \beta_1 &= u_1(\alpha - d - \rho_1(\tilde{u})\rho_2(\tilde{u})\zeta(\tilde{u})), \end{aligned}$$

где $\tilde{u} = u_2(1+2u_0)^{-2}$.

Из уравнений $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ получим формулы (30), (31), а также равенство $u_1 = 0$.

Аналогично тому, как это было сделано в случае $(\alpha - 3d/2)$ -разложения, можно показать, что значение $\lambda_1 = \left| \lambda \right|_{\frac{\partial \beta_1}{\partial u_1}} \Big|_{u_1=0, u_2=\tilde{u}(1+2u_0)^2}$ является собственным числом дифференциала РГ в неподвижной точке. Следовательно,

$$\nu^{-1} = \frac{\partial \beta_1}{\partial u_1} \Big|_{u_1=0, u_2=\tilde{u}(1+2u_0)^2} = \alpha - d - \rho_1(\tilde{u})\rho_2(\tilde{u})\zeta(\tilde{u}).$$

Для евклидовой модели получаем следующий ответ до второго порядка по δ :

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8}\delta - \delta^2 \frac{(N+2)(13N+44)}{2(N+8)^3} + O(\delta^3), \quad (32)$$

$$\eta = \delta^2 \frac{N+2}{2(N+8)^2} + O(\delta^3). \quad (33)$$

Этот результат совпадает с результатами вычислений в рамках формализма уравнений Каллана–Симанзика [1].

5. СЛУЧАЙ p -АДИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

До этого мы рассматривали бозонное поле, определенное в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Однако все рассуждения могут быть проведены и в случае d -мерного p -адического пространства $\mathbb{Q}_p^d$. В последнем случае интегрирование в (1), (3), (4) ведется по p -адическим переменным q , а параметр растяжения λ равен p^{-k} . Тогда $|\lambda|_p = p^k$, $k \in \mathbb{N}$, и, вообще говоря, полугруппа преобразований РГ является дискретной. Но мы можем локально вложить преобразование $R_{\lambda, \alpha}$ в непрерывную полугруппу преобразований с помощью формулы (21), в которой заменяем $|\lambda|$ на произвольное вещественное число. Дальнейший формализм остается без изменений, если не считать того, что вместо евклидовых фейнмановских амплитуд мы вычисляем p -адические фейнмановские амплитуды. Проблема вычисления p -адических фейнмановских амплитуд $\mathcal{F}_G(q)$ рассматривалась в работах [12].

В случае $(\alpha - 3d/2)$ -разложения все результаты, сформулированные для евклидовой модели, без изменений переносятся на p -адическую модель. При этом выражение для ν^{-1} имеет вид

$$\nu^{-1} = \frac{d}{2} + \varepsilon - 2\frac{N+2}{N+8}\varepsilon + 8\varepsilon^2 \frac{(N+2)(7N+20)}{(N+8)^3} A_p(d) + O(\varepsilon^3), \quad (34)$$

где

$$A_p(d) = -\frac{1}{2} \left(\ln p - 2\psi_p\left(\frac{d}{4}\right) + \psi_p\left(\frac{d}{2}\right) \right),$$

$$\psi_p(x) = \frac{f'_p(x)}{f_p(x)}, \quad f_p(x) = (1 - p^{-2x})^{-1}.$$

В случае $(4 - d)$ -разложения все результаты, сформулированные для евклидовой модели, также переносятся на p -адическую модель. Однако особенностью p -адической модели является то, что все графы G с двумя внешними линиями, составленные только из вершин степени 4, имеют вершинную часть $O(G) = 0$. Следовательно, в этом случае $O_0(n) = 0$, $w_0(u) = 0$, $\rho_0 = 0$, $\zeta(u) = 4 - d$. Поэтому аномальная размерность $\eta = 0$. Ответ для ν^{-1} имеет вид

$$\nu^{-1} = 2 - \frac{N+2}{N+8}\delta + 2\delta^2 \frac{(N+2)(7N+20)}{(N+8)^3} A_p(4) + O(\delta^3). \quad (35)$$

6. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Интересно сравнить ответы для индекса ν в обоих вариантах разложений. Рассмотрим случай p -адической модели. Пусть $d = 3$, $\alpha = 2 + d = 5$, $\varepsilon = \alpha - 3d/2 = 1/2$, $\delta = 1$. В этом случае ответы (34) и (35) совпадают с точностью до замены $A_p(3)$ на $A_p(4)$. Заметим, что $A_p(3) \sim A_p(4)$ при $p \rightarrow \infty$.

В случае евклидовой модели разложения для критического индекса ν задаются формулами (24) и (32). Заметим, что $(4 - d)$ -разложение описывает нетривиальную ветвь инвариантных относительно преобразования РГ гамильтонианов лишь при α , заданном формулой (31). В то же время $(\alpha - 3d/2)$ -разложение позволяет построить нетривиальный неподвижный гамильтониан при произвольном α в окрестности значения $3d/2$. Для того чтобы сравнить ответы, подставим в (24) значение

$\varepsilon = \alpha - 3d/2 = 2 + d - \eta - 3d/2 = \delta/2 - \eta$, где η определено в (33), и перепишем (24) как разложение по степеням δ . Используя равенство $A(4) = -1/2$, нетрудно показать, что после такой подстановки формула (24) совпадает с (32). Это говорит в пользу того, что оба разложения, по-видимому, описывают одну и ту же негауссовскую неподвижную точку РГ в размерности три. Но вопрос о том, как определить значение α , соответствующее этой неподвижной точке, оставаясь только в рамках $(\alpha - 3d/2)$ -разложения, остается открытым.

Аналогичное сравнение ответов для ν в p -адической модели дает тот же результат. Особенностью в данном случае является то, что аномальная размерность η , как было замечено ранее, равна нулю, поэтому для сопоставления (34) и (35) необходимо в (34) подставить значение $\varepsilon = \delta/2$.

Интересно также сравнить ответ для ν в евклидовой модели с ответом для ν в p -адической модели. Сопоставление (24) и (34) показывает любопытное сходство ответов. Формула (24) переходит в (34), если гамма-функцию $\Gamma(x)$ заменить на $f_p(x)$, а значение $-\gamma$ заменить на $\ln p$. Связь между функциями $\Gamma(x)$ и $f_p(x)$ хорошо известна в теории дзета-функции Римана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЛЕММА 3. Пусть G – связный фейнмановский граф. Пусть множество внешних линий $E(G)$ состоит из $2k$ линий $(\bar{v}_1, \bar{m}_1), \dots, (\bar{v}_{2k}, \bar{m}_{2k})$. Тогда для любого симметрического тензора $A_{i_1, \dots, i_{2k}}$, инвариантного относительно перестановок индексов $i_1, \dots, i_{2k}$, выполняется соотношение

$$\sum_{\substack{i_1^1, \dots, i_{2k_1}^1=1 \\ \dots \\ i_1^n, \dots, i_{2k_n}^n=1}}^N \prod_{v=1}^n F_{i_1^v, \dots, i_{2k_v}^v} \prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(G)} \delta_{i_{m_1}^{v_1}, i_{m_2}^{v_2}} A_{i_{\bar{m}_1}^{v_1}, \dots, i_{\bar{m}_{2k}}^{v_{2k}}} =$$

$$= S_N(G) \sum_{i_1, \dots, i_{2k}=1}^N F_{i_1, \dots, i_{2k}} A_{i_1, \dots, i_{2k}}, \quad (36)$$

где $S_N(G)$ – тензорный коэффициент графа G , определенный в (12).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Обозначим выражение, стоящее слева от знака равенства в (36) через Y . Используя представление (2), получаем

$$Y = \prod_{v=1}^n \frac{1}{(2k_v - 1)!!} \sum_{\substack{i_1^1, \dots, i_{2k_1}^1=1 \\ \dots \\ i_1^n, \dots, i_{2k_n}^n=1}}^N \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \prod_{\substack{(m_1^1, m_2^1) \in \gamma_1 \\ \dots \\ (m_1^n, m_2^n) \in \gamma_n}} \delta_{i_{m_1^1}^1 i_{m_1^1}^1} \dots \delta_{i_{m_1^n}^n i_{m_1^n}^n} \times$$

$$\times \prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(G)} \delta_{i_{m_1}^{v_1}, i_{m_2}^{v_2}} A_{i_{\bar{m}_1}^{v_1}, \dots, i_{\bar{m}_{2k}}^{v_{2k}}}. \quad (37)$$

Введем следующее определение. Полулинии (v', m') и (v'', m'') будем называть эквивалентными и писать $(v', m') \sim (v'', m'')$, если они либо совпадают, либо существует набор полулиний $(v_1, m_1), \dots, (v_p, m_p)$ такой, что $(v_1, m_1) = (v', m')$,

$(v_p, m_p) = (v'', m'')$ и для всех $q < p$ выполняется хотя бы одно из двух условий: $(v_q, m_q, v_{q+1}, m_{q+1}) \in L(G)$, $v_q = v_{q+1}$ или $(m_q, m_{q+1}) \in \gamma_{v_q}$. Легко видеть, что данное отношение обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Нерудно убедиться, что произведение

$$\prod_{\substack{(m_1^1, m_2^1) \in \gamma_1 \\ \dots \\ (m_1^n, m_2^n) \in \gamma_n}} \delta_{m_1^1}^{i_1^1} \delta_{m_1^1}^{i_1^1} \dots \delta_{m_1^n}^{i_1^n} \delta_{m_1^n}^{i_1^n} \prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(G)} \delta_{i_{m_1}^{v_1} i_{m_2}^{v_2}}$$

равно единице, если для всех (v', m') , (v'', m'') таких, что $(v', m') \sim (v'', m'')$, выполняется $i_{m'}^{v'} = i_{m''}^{v''}$, и равно нулю в обратном случае.

Отношение эквивалентности разбивает множество линий графа G на $M(G, \gamma)$ классов эквивалентности, где $M(G, \gamma)$ – некоторое натуральное число, зависящее от выбора $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$. Обозначим эти классы эквивалентности через $T_1, \dots, T_{M(G, \gamma)}$.

Заметим, что выражение

$$\sum_{j=1}^N \prod_{(v, m) \in T_s} \delta_{i_m^v, j}$$

равно единице, если для всех $(v, m) \in T_s$ индексы i_m^v совпадают между собой, и равно нулю в обратном случае. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \prod_{\substack{(m_1^1, m_2^1) \in \gamma_1 \\ \dots \\ (m_1^n, m_2^n) \in \gamma_n}} \delta_{m_1^1}^{i_1^1} \delta_{m_1^1}^{i_1^1} \dots \delta_{m_1^n}^{i_1^n} \delta_{m_1^n}^{i_1^n} \prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(G)} \delta_{i_{m_1}^{v_1} i_{m_2}^{v_2}} = \\ & = \prod_{s=1}^{M(G, \gamma)} \left(\sum_{j=1}^N \prod_{(v, m) \in T_s} \delta_{i_m^v, j} \right) = \sum_{j_1, \dots, j_{M(G, \gamma)}=1}^N \prod_{s=1}^{M(G, \gamma)} \prod_{(v, m) \in T_s} \delta_{i_m^v, j_s}. \end{aligned}$$

Можно показать, что в любом классе эквивалентности T_s либо не содержится внешних линий, либо содержится ровно две внешние линии (доказательство этого факта довольно громоздко, поэтому мы его здесь не приводим). Так как число внешних линий графа G равно $2k$, то отсюда следует, что среди множеств T_s существует ровно k множеств, содержащих две внешние линии, а остальные множества не содержат ни одной внешней линии. Пусть $T_1, \dots, T_k$ содержат две внешние линии, а множества $T_{k+1}, \dots, T_{M(G, \gamma)}$ не содержат внешних линий.

Тогда, используя симметричность тензора $A_{i_1, \dots, i_{2k}}$ относительно перестановок индексов, получим, что

$$\begin{aligned} Y &= \prod_{v=1}^n \frac{1}{(2k_v - 1)!!} \times \\ & \times \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \sum_{\substack{i_1^1, \dots, i_{2k_1}^1=1 \\ \dots \\ i_1^n, \dots, i_{2k_n}^n=1}}^N \sum_{j_1, \dots, j_{M(G, \gamma)}=1}^N \prod_{s=1}^{M(G, \gamma)} \prod_{(v, m) \in T_s} \delta_{i_m^v, j_s} A_{i_{m_1}^{v_1}, \dots, i_{m_{2k}}^{v_{2k}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{v=1}^n \frac{1}{(2k_v - 1)!!} \times \\
&\quad \times \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \sum_{\substack{i_1^1, \dots, i_{2k_1}^1=1 \\ \vdots \\ i_1^v, \dots, i_{2k_v}^v=1}}^N \sum_{j_1, \dots, j_{M(G, \gamma)}=1}^N \prod_{s=1}^{M(G, \gamma)} \prod_{(v, m) \in T_s} \delta_{i_m^v, j_s} A_{j_1, j_1, \dots, j_k, j_k} = \\
&= \prod_{v=1}^n \frac{1}{(2k_v - 1)!!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} \sum_{j_1, \dots, j_{M(G, \gamma)}=1}^N A_{j_1, j_1, \dots, j_k, j_k} = \\
&= \prod_{v=1}^n \frac{1}{(2k_v - 1)!!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} N^{M(G, \gamma) - k} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^N A_{j_1, j_1, \dots, j_k, j_k}.
\end{aligned}$$

Пусть

$$S_N(G) = \prod_{v=1}^n \frac{1}{(2k_v - 1)!!} \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_n} N^{M(G, \gamma) - k}. \quad (38)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
Y &= S_N(G) \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^N A_{j_1, j_1, \dots, j_k, j_k} = S_N(G) \sum_{i_1, \dots, i_{2k}} \delta_{i_1, i_2} \dots \delta_{i_{2k-1}, i_{2k}} A_{i_1, \dots, i_{2k}} = \\
&= S_N(G) \sum_{i_1, \dots, i_{2k}} F_{i_1, \dots, i_{2k}} A_{i_1, \dots, i_{2k}}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство следует из симметричности тензора $A_{i_1, \dots, i_{2k}}$. Таким образом, мы получили формулу (36). Формула (12) следует из (36) после подстановки тензора $A_{i_1, \dots, i_{2k}} = 1$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $k_1, \dots, k_n$ – натуральные числа, а гамильтонианы H_k определены в (4). Тогда

$$\text{A.R.} \langle H_{k_1} H_{k_2} \dots H_{k_n} \rangle_{\theta_1}^c = \sum_{r=1}^n \sum_{V_1, \dots, V_r} \left\langle \prod_{j=1}^r \sum_{s \geq 1} H_s O_s(V_j) \right\rangle_{\theta_1}^c,$$

где внутреннее суммирование ведется по неупорядоченным разбиениям множества n вершин (причем степень вершины с номером v равна $2k_v$, $v = \overline{1, n}$) на r непустых подмножеств $V_1, \dots, V_r$,

$$O_s(V) = \sum_{\substack{G: |E(G)|=2s, \\ V(G)=V}} O(G) S_N(G),$$

здесь суммирование ведется по фейнмановским графам G с $2s$ внешними линиями, построенным на множестве вершин V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношения (5) и (10), можем записать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned}
\text{A.R.} \langle H_{k_1} H_{k_2} \dots H_{k_n} \rangle_{\theta_1}^c &= \sum_G \sum_{\substack{i_1^1, \dots, i_{2k_1}^1=1 \\ \dots \\ i_1^n, \dots, i_{2k_n}^n=1}}^N \prod_{v=1}^n F_{i_1^v, \dots, i_{2k_v}^v} \times \\
&\times \prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(G)} \delta_{i_{m_1}^{v_1} i_{m_2}^{v_2}} \int \text{A.R.} \mathcal{F}_G(q) \prod_{(v, m) \in E(G)} \sigma_{i_m^v}(q_m^v) dq = \\
&= \sum_{r=1}^n \sum_{V_1, \dots, V_r} \sum_G \sum_{\substack{\{G_1, \dots, G_r\}: \\ \cup_j G_j \subseteq G, V(G_j) = V_j}} \sum_{\substack{i_1^1, \dots, i_{2k_1}^1=1 \\ \dots \\ i_1^n, \dots, i_{2k_n}^n=1}}^N \prod_{v=1}^n F_{i_1^v, \dots, i_{2k_v}^v} \times \\
&\times \prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(G)} \delta_{i_{m_1}^{v_1} i_{m_2}^{v_2}} \prod_{j=1}^r O(G_j) \int \mathcal{F}_{G|G_1, \dots, G_r}(q) \prod_{(v, m) \in E(G)} \sigma_{i_m^v}(q_m^v) dq = \\
&= \sum_{r=1}^n \sum_{V_1, \dots, V_r} \sum_{s_1, \dots, s_r \geq 1} \sum_{\substack{\{G_1, \dots, G_r\}: \\ V(G_j) = V_j, \\ |E(G_j)| = 2s_j}} \sum_{\substack{G: \cup_j G_j \subseteq G \\ i_1^1, \dots, i_{2k_1}^1=1 \\ \dots \\ i_1^n, \dots, i_{2k_n}^n=1}}^N \prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(G) \setminus \cup_j L(G_j)} \delta_{i_{m_1}^{v_1} i_{m_2}^{v_2}} \times \\
&\times \prod_{j=1}^r \left(O(G_j) \prod_{t \in V_j} F_{i_1^t, \dots, i_{2k_t}^t} \prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(G_j)} \delta_{i_{m_1}^{v_1} i_{m_2}^{v_2}} \right) \times \\
&\times \int \mathcal{F}_{G|G_1, \dots, G_r}(q) \prod_{(v, m) \in E(G)} \sigma_{i_m^v}(q_m^v) dq.
\end{aligned}$$

Применяя лемму 3 к подграфам $G_1, \dots, G_r$, можем записать равенство

$$\begin{aligned}
\text{A.R.} \langle H_{k_1} H_{k_2} \dots H_{k_n} \rangle_{\theta_1}^c &= \sum_{r=1}^n \sum_{V_1, \dots, V_r} \sum_{s_1, \dots, s_r \geq 1} \sum_{\substack{\{G_1, \dots, G_r\}: \\ V(G_j) = V_j, |E(G_j)| = 2s_j}} \prod_{j=1}^r O(G_j) S_N(G_j) \times \\
&\times \sum_{\substack{i_1^1, \dots, i_{2s_1}^1=1 \\ \dots \\ i_1^r, \dots, i_{2s_r}^r=1}}^N \prod_{j=1}^r F_{i_1^j, \dots, i_{2s_j}^j} \sum_{\overline{G}} \prod_{(v_1, m_1, v_2, m_2) \in L(\overline{G})} \delta_{i_{m_1}^{v_1} i_{m_2}^{v_2}} \times \\
&\times \int \mathcal{F}_{\overline{G}}(q) \prod_{(v, m) \in E(\overline{G})} \sigma_{i_m^v}(q_m^v) dq,
\end{aligned}$$

где суммирование по $\overline{G}$ выполняется по всем связным фейнмановским графам $\overline{G}$, построенным на r вершинах, причем количество линий, выходящих из вершины с номером i равно $2t_i$, $i = 1, \dots, r$.

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \text{A.R.} \langle H_{k_1} H_{k_2} \dots H_{k_n} \rangle_{\theta_1}^c &= \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{V_1, \dots, V_r} \sum_{s_1, \dots, s_r \geq 1} \prod_{j=1}^r \left(\sum_{\substack{G_j: V(G_j)=V_j \\ |E(G_j)|=2s_j}} O(G_j) S_N(G_j) \right) \langle H_{s_1} \dots H_{s_r} \rangle_{\theta_1}^c = \\ &= \sum_{r=1}^n \sum_{V_1, \dots, V_r} \left\langle \prod_{j=1}^r \sum_{s \geq 1} H_s O_s(V_j) \right\rangle_{\theta_1}^c, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1. Разложим $H_{\text{эфф}}(u_1, u_2)$ в ряд Тейлора по u_1, u_2 :

$$\begin{aligned} H_{\text{эфф}}(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} H_{0,\alpha} - \text{A.R.} \langle \exp(-u_1 H_2 - u_2 H_2) \rangle_{\theta_1}^c = \\ &= \frac{1}{2} H_{0,\alpha} - \sum_{m_1, m_2 \geq 0} \frac{(-u_1)^{m_1} (-u_2)^{m_2}}{m_1! m_2!} \text{A.R.} \langle H_1^{m_1} H_2^{m_2} \rangle_{\theta_1}^c. \end{aligned} \quad (39)$$

Используя лемму 4, можем установить, что

$$\begin{aligned} \text{A.R.} \langle H_1^{m_1} H_2^{m_2} \rangle_{\theta_1}^c &= \sum_{r=1}^{m_1+m_2} \frac{1}{r!} \sum_{\substack{n_1^1, \dots, n_1^r \geq 0, \sum_j n_1^j = m_1 \\ n_2^1, \dots, n_2^r \geq 0, \sum_j n_2^j = m_2, \\ n_1^j + n_2^j \geq 1}} \frac{m_1!}{n_1^1! \dots n_1^r!} \frac{m_2!}{n_2^1! \dots n_2^r!} \times \\ &\times \left\langle \prod_{j=1}^r \sum_{s \geq 1} H_s O_s(n_1^j, n_2^j) \right\rangle_{\theta_1}^c, \end{aligned}$$

где

$$O_s(n_1^j, n_2^j) = \sum_G O(G) S_N(G),$$

причем суммирование ведется по связным фейнмановским графам G с $2s$ внешними линиями, построенным на n_1^j вершинах с двумя линиями и n_2^j вершинах с четырьмя линиями.

Подставив полученное выражение для $\text{A.R.} \langle H_1^{m_1} H_2^{m_2} \rangle_{\theta_1}^c$ в (39), нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} H_{\text{эфф}}(u_1, u_2) &= \frac{1}{2} H_{0,\alpha} - \left\langle \exp \left(- \sum_{s \geq 1} v_s(u_1, u_2) H_s \right) \right\rangle_{\theta_1}^c, \\ v_s(u_1, u_2) &= - \sum_{\substack{n_1, n_2 \geq 0 \\ n_1 + n_2 \geq 1}} \frac{(-u_1)^{n_1} (-u_2)^{n_2}}{n_1! n_2!} O_s(n_1, n_2). \end{aligned}$$

Для рассматриваемой модели известны следующие свойства (см. замечания после формулы (10)):

- 1) если $n_1 \neq 1$, то $O_1(n_1, n_2) = 0$ для любого n_2 ;

2) если $n_1 \neq 0$, то $O_2(n_1, n_2) = 0$ для любого n_2 ;

3) если $t > 2$, то $O_t(n_1, n_2) = 0$ для любых n_1, n_2 .

Отсюда легко установить, что

$$v_1(u_1, u_2) = u_1 w_1(u_2), \quad v_2(u_1, u_2) = w_2(u_2), \quad v_s(u_1, u_2) = 0 \quad \text{при} \quad s > 2.$$

Теорема доказана.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-01-00610).

Список литературы

- [1] *J. Zinn-Justin.* Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Clarendon Press, 1996.
- [2] *К. Вильсон, Дж. Когут.* Ренормализационная группа и ε -разложение. М.: Мир, 1975.
- [3] *P. M. Bleher, M. D. Missarov.* Commun. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 235–272.
- [4] *M. D. Missarov.* J. Stat. Phys. 1985. V. 38. № 5/6. P. 851–860.
- [5] *П. М. Блехер, М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1988. Т. 74. № 2. С. 203–209.
- [6] *E. Yu. Lerner, M. D. Missarov.* J. Stat. Phys. 1994. V. 76. № 3/4. P. 805–817; *М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1996. Т. 109. № 1. С. 3–16; 1998. Т. 117. № 3. С. 471–488; *M. D. Missarov.* Renormalization group solution of fermionic Dyson model. In: Asymptotic Combinatorics with Application to Mathematical Physics. Proc. NATO Advanced Study Institute (St. Petersburg, Russia, July 9–22, 2001). NATO Sci. Ser. Math. Phys. Chem. V. 77. Eds. V. A. Malyshev, A. M. Vershik. Dordrecht: Kluwer, 2002. P. 151–166.
- [7] *М. Д. Миссаров, Р. Г. Степанов.* ТМФ. 2004. Т. 139. № 2. С. 268–275.
- [8] *Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров.* ТМФ. 1989. Т. 78. № 2. С. 248–257.
- [9] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов.* p -Адитический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [10] *M. Moshe, J. Zinn-Justin.* Phys. Rep. 2003. V. 385. P. 69–228; *И. Я. Арефьева.* Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1978. Т. 77. С. 24–32.
- [11] *I. Ya. Aref'eva, E. R. Nissimov, S. J. Pacheva.* Commun. Math. Phys. 1980. V. 71. P. 213–246; *А. Н. Васильев, М. Ю. Налимов.* ТМФ. 1983. Т. 55. № 2. С. 163–176.
- [12] *M. D. Missarov.* Renormalization group and renormalization theory in p -adic and adelic scalar models. In: Dynamical Systems and Statistical Mechanics. From the Seminar on Statistical Physics (Moscow State Univ., USSR). Adv. Sov. Math. V. 3. Ed. Ya. G. Sinai. Providence, R.I.: AMS, 1991. P. 143–164; *E. Yu. Lerner.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. № 1. P. 35–48.

Поступила в редакцию 7.IV.2005 г.,
после доработки 6.VI.2005 г.