Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Жуковская, Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 3, 402–409

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2043>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 07:26:05

© 2006 г.

Л. В. Жуковская*

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ РОЛЛИНГОВЫЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ СТРУН

Рассмотрено нелинейное интегральное уравнение с бесконечным числом производных, возникающее при исследовании системы взаимодействующих открытой и замкнутой струн, если пренебречь нелокальностью в секторе замкнутой струны. Исследованы свойства этого уравнения, построен итерационный метод его решения и доказана сходимость метода.

Ключевые слова: теории струн, нелинейное интегральное уравнение, итерационный метод.

Недавно в обычной и p -адической теориях струн стали исследоваться нелинейные уравнения с бесконечным числом производных [1]–[8]. В работе [1] было проведено систематическое математическое исследование свойств некоторых из них. В настоящей работе как продолжение исследования нелинейных уравнений с бесконечным числом производных будет рассмотрено следующее уравнение, возникающее в теории струн:

$$a\Phi^3(t) + (1-a)\Phi(t) = \exp\left(a\frac{d^2}{dt^2}\right)\Phi(t), \quad (1)$$

где $a \in (0, 1]$ – константа.

Далее уравнению (1) будет придан точный смысл. Отметим, что в случае $a = 1$ это уравнение принимает вид уравнения p -адической струны для $p = 3$, которое было исследовано в работах [1], [2].

Уравнение (1) возникает при исследовании системы взаимодействующих открытой и замкнутой струн, если пренебречь нелокальностью во взаимодействии замкнутой струны [3], [4]. В рамках этой модели ведется исследование существования роллинговых решений соответствующих уравнений движения. Интересно отметить, что в механическом приближении [4], [5] данное уравнение может быть переписано в виде

$$\Phi^3(t) - \Phi(t) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi(t).$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: ljoukov@mi.ras.ru

Оно имеет хорошо известное решение в виде кинка:

$$\Phi(t) = \operatorname{th}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Отметим, что обычно кинк описывает решение, зависящее от пространственных координат.

В данной работе будут исследованы свойства уравнения (1) и рассмотрены краевые задачи для ограниченных решений, в частности, будут построены роллинговые решения, интерполирующие между двумя вакуумами.

Уравнение (1) является псевдодифференциальным уравнением с символом $e^{-a\xi^2}$, которое для положительных a можно представить в форме нелинейного интегрального уравнения (аналогично уравнениям, рассмотренным в [1], [6], [7])

$$C_a[\Phi](t) = a\Phi^3(t) + (1-a)\Phi(t), \quad (2)$$

где $a \in (0, 1)$ – константа, оператор C_a задается равенством

$$C_a[\psi](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{C}_a[(t-\tau)^2]\psi(\tau) d\tau \quad (3)$$

с ядром

$$\mathcal{C}_a[(t-\tau)^2] = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-(t-\tau)^2/(4a)}.$$

Решения уравнения (2) будем искать в классе вещественных измеримых функций.

ТЕОРЕМА 1. Если решение $\Phi(t)$ уравнения (2) ограничено, то оно удовлетворяет оценке

$$|\Phi(t)| \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\sup_t |\Phi(t)| = M, \quad 0 < M < \infty. \quad (5)$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\begin{aligned} |a\Phi^3(t) + (1-a)\Phi(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) \mathcal{C}_a[(t-\tau)^2] d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\tau)| \mathcal{C}_a[(t-\tau)^2] d\tau \leq \\ &\leq \sup_{\tau} |\Phi(\tau)| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}_a[(t-\tau)^2] d\tau = M, \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда

$$\sup_t |a\Phi^3(t) + (1-a)\Phi(t)| = aM^3 + (1-a)M \leq M,$$

т.е. $M \leq 1$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 1, а также доказанные ниже теоремы 4 и 5 аналогичны соответствующим теоремам из работ [1], [6], однако приведенные доказательства используют специфику уравнения (2).

ЛЕММА 1. Если функция $\Phi(t)$ ограничена, то функция $C_a[\Phi](t)$ непрерывна по t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, как и ранее, $\sup_t |\Phi(t)| = M$. Рассмотрим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} & |C_a[\Phi](t + \delta) - C_a[\Phi](t)| \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\frac{((t+\delta)-\tau)^2}{4a}} - e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4a}}) \Phi(\tau) d\tau \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-\frac{((t+\delta)-\tau)^2}{4a}} - e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4a}} \right| \cdot |\Phi(\tau)| d\tau \leq \\ & \leq \sup_{\tau} |\Phi(\tau)| \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-\frac{((t+\delta)-\tau)^2}{4a}} - e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4a}} \right| d\tau = \\ & = \frac{M}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-\frac{(y+\delta)^2}{4a}} - e^{-\frac{y^2}{4a}} \right| dy. \end{aligned}$$

Раскрывая модуль в подынтегральном выражении, получаем

$$\begin{aligned} & |C_a[\Phi](t + \delta) - C_a[\Phi](t)| \leq \\ & \leq \frac{M}{\sqrt{4\pi a}} \left[\int_{-\infty}^{\delta/2} (e^{-\frac{(y+\delta)^2}{4a}} - e^{-\frac{y^2}{4a}}) dy - \int_{\delta/2}^{+\infty} (e^{-\frac{(y+\delta)^2}{4a}} - e^{-\frac{y^2}{4a}}) dy \right] = \\ & = -M \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{4\sqrt{a}}\right) + e^{-\frac{3\delta^2}{16a}} M \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{2\sqrt{a}}\right) \leq \\ & \leq -M \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{4\sqrt{a}}\right) + M \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{2\sqrt{a}}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau \quad (8)$$

– функция ошибок. Из оценки (7) с учетом (8) следует непрерывность функции $C_a[\Phi](t)$.

ТЕОРЕМА 2. Всякое ограниченное решение $\Phi(t)$ уравнения (2) непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 функция $C_a[\Phi](t)$ непрерывна. Докажем, что функция $\Phi(t)$ непрерывна. Предположим обратное: будем считать, что функция $\Phi(t)$ не является непрерывной. Тогда функции $a\Phi^3(t)$ и $(1-a)\Phi(t)$ не являются непрерывными. Поскольку $a \in [0, 1]$, функция $a\Phi^3(t) + (1-a)\Phi(t)$ также не является непрерывной, что противоречит непрерывности $C_a\Phi(t)$ и тому, что функция $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению (2).

ТЕОРЕМА 3. Если решение $\Phi(t)$ уравнения (2) положительно и ограничено, то оператор C_a действует понижающе, т.е. $C_a[\Phi](t) \leq \Phi(t)$. Если решение $\Phi(t)$ уравнения (2) отрицательно и ограничено, то оператор C_a действует повышающе, т.е. $C_a[\Phi](t) \geq \Phi(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение теоремы. Поскольку по предположению решение $\Phi(t)$ уравнения (2) положительно и ограничено, то по теореме 1 $0 \leq \Phi(t) \leq 1$, следовательно,

$$C_a[\Phi](t) = a\Phi^3(t) + (1-a)\Phi(t) \leq \Phi(t).$$

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

ТЕОРЕМА 4. Если решение $\Phi(t)$ уравнения (2) имеет предел при $t \rightarrow +\infty$, то он принимает одно из возможных значений: $-1, 0, 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = b$, найдем предел функции $C_a[\Phi(t)]$. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} C_a[\Phi(t)] &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4a}} \Phi(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4a}} \Phi(\tau) d\tau + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4a}} \Phi(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Делая в первом интеграле замену $\tau \rightarrow t-u$, а во втором интеграле – замену $\tau \rightarrow t+u$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} C_a[\Phi(t)] &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4a}} \Phi(t-u) du + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4a}} \Phi(t+u) du \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \left[\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4a}} b du + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4a}} b du \right] = \frac{b}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{4a}} du, \end{aligned}$$

таким образом, $\lim_{t \rightarrow +\infty} C_a[\Phi(t)] = b$.

Переходя почленно к пределу при $t \rightarrow +\infty$ в уравнении (2), получаем уравнение

$$ab^3 + (1-a)b = b,$$

имеющее три корня $b = 0, b = \pm 1$.

ТЕОРЕМА 5. Существует единственное неотрицательное ограниченное непрерывное решение $\Phi(t) \equiv 1$ уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = 1. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\Phi(t) \equiv 1$ – решение краевой задачи (2), (9). Пусть $\Phi^*(t)$, $0 \leq \Phi^*(t) \neq 1$, есть другое ограниченное непрерывное решение этой задачи. Тогда $0 \leq \Phi^*(t) \leq 1$, и в силу (9) существует t_0 такое, что

$$0 \leq \Phi^*(t_0) = \min_t \Phi^*(t) \leq 1. \quad (10)$$

Из уравнения (2) имеем оценку

$$a\Phi^*{}^3(t_0) + (1-a)\Phi^*(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^*(\tau) \mathcal{C}_a[(t_0 - \tau)^2] d\tau \geq \Phi^*(t_0). \quad (11)$$

Это неравенство справедливо, если $\Phi^*(t_0) \geq 1$ или $\Phi^*(t_0) = 0$. Учитывая, что $|\Phi^*(t)| \leq 1$, получаем, что $\Phi^*(t_0) = 0$ или $\Phi^*(t_0) = 1$. Значение $\Phi^*(t_0) = 0$ не удовлетворяет краевым условиям (9), поскольку в этом случае $C_a[\Phi^*](t_0) = 0$. Учитывая, что $\Phi^*(t) \geq 0$, получаем $\Phi^*(t) \equiv 0$. Таким образом, существует единственное неотрицательное решение $\Phi^*(t) \equiv \Phi(t) \equiv 1$ краевой задачи (2), (9).

ТЕОРЕМА 6. *Существует непрерывное решение уравнения (2), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = 1, \quad (12)$$

к которому сходится следующая итерационная процедура:

$$C_a \Phi_n = a \Phi_{n+1}^3 + (1-a) \Phi_{n+1}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду инвариантности уравнения относительно замены $\Phi(t) \rightarrow -\Phi(-t)$ будем искать нечетные решения, для них краевая задача на положительной полуоси $t \geq 0$ может быть переписана в виде

$$K_a[\phi](t) = a \phi^3(t) + (1-a) \phi(t), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 1, \quad (14)$$

где оператор K_a задается равенством

$$K_a[\phi](t) = \int_0^\infty \mathcal{K}_a(t, \tau) \phi(\tau) d\tau$$

при

$$\mathcal{K}_a(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \left[e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4a}} - e^{-\frac{(t+\tau)^2}{4a}} \right].$$

Решение $\Phi(t)$ исходной задачи получается из $\phi(t)$ нечетным продолжением: $\Phi(t) = \text{sign}(t) \phi(|t|)$. Будем искать решение уравнения (14), используя итерационную процедуру, аналогичную (13), которая на полуоси $t \geq 0$ примет вид

$$K_a \phi_n = a \phi_{n+1}^3 + (1-a) \phi_{n+1}. \quad (15)$$

Решая данное кубическое уравнение относительно ϕ_{n+1} , получаем

$$\phi_{n+1} = -v_n(1-a) + \frac{1}{3av_n}, \quad (16)$$

где

$$v_n = \left(\frac{2}{27a^2 B_n + \sqrt{108(1-a)^3 a^3 + 729a^4 B_n^2}} \right)^{1/3}, \quad (17)$$

$$B_n = K_a \phi_n. \quad (18)$$

В качестве нулевой итерации возьмем следующую функцию:

$$\phi_0 = \frac{1 - e^{-(at)^2}}{2}.$$

Рис. 1. а) Графики итераций ϕ_n при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 50, 150$, итерации ϕ_{50} и ϕ_{150} графически неразличимы; б) разность $\phi_{150} - \phi_{50}$.

После действия оператора K_a имеем

$$K_a \phi_0 = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{(at)^2}{\sqrt{1+a^2}}} \right).$$

Вычисляя $a\phi_0^3 + (1-a)\phi_0$, получаем, что

$$a\phi_0^3 + (1-a)\phi_0 \leq K_a \phi_0,$$

отсюда

$$a\phi_0^3 + (1-a)\phi_0 \leq a\phi_1^3 + (1-a)\phi_1,$$

следовательно $\phi_0 \leq \phi_1$. Поскольку ядро неотрицательно, после интегрирования получаем, что $K_a \phi_0 \leq K_a \phi_1$, т.е. $B_0 \leq B_1$.

Используя явные выражения (17) и (16) для функций v_n и ϕ_{n+1} , заключаем, что из неравенства $B_0 \leq B_1$ следуют неравенства $v_0 \geq v_1$ и $\phi_1 \leq \phi_2$. Повторяя проделанные рассуждения $(n-1)$ раз, получаем, что

$$\phi_0 \leq \phi_1 \leq \dots \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}.$$

На рис. 1 приведены результаты вычислений итераций.

Докажем неравенство $\phi_n \leq 1$. Легко видеть, что начальная итерация ϕ_0 ограничена, $\phi_0 < 1$. Тогда в силу (15) $K_a \phi_0 \leq \phi_0 < 1$, следовательно, $a\phi_1^3 + (1-a)\phi_1 < 1$. Предположим, что существует $t_1 \geq 0$ такое, что $\phi_1(t_1) > 1$, тогда $a\phi_1^3(t_1) + (1-a)\phi_1(t_1) > \phi_1(t_1) > 1$, что противоречит полученной выше оценке, следовательно $\phi_1 \leq 1$. Повторяя проделанные рассуждения n раз, получаем, что все функции ϕ_{n+1} ограничены, $\phi_{n+1} \leq 1$.

Докажем, что функции ϕ_{n+1} монотонны. Покажем, что $d(K_a[\phi_n](t))/dt \geq 0$, предполагая, что $\phi_n(t)$ – неотрицательная монотонно возрастающая функция. Имеем

$$\frac{d}{dt}(K_a[\phi_n](t)) = \int_0^\infty \mathcal{K}'_a(t, \tau) \phi_n(\tau) d\tau = \int_0^\infty (\mathcal{K}'_1(t, \tau) + \mathcal{K}'_2(t, \tau)) \phi_n(\tau) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'_1(t, \tau) &= \frac{1}{2a\sqrt{4\pi a}}(\tau - t)e^{-\frac{(t-\tau)^2}{4a}}, \\ \mathcal{K}'_2(t, \tau) &= \frac{1}{2a\sqrt{4\pi a}}(\tau + t)e^{-\frac{(t+\tau)^2}{4a}}. \end{aligned}$$

Поскольку для всех $t, \tau \geq 0$ ядро $\mathcal{K}'_2(t, \tau) \geq 0$, а функция $\phi_n(\tau) \geq 0$ и возрастает, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(K_a[\phi_n](t)) &\geq \int_0^\infty \mathcal{K}'_1(t, \tau) \phi_n(\tau) d\tau = \int_0^t \mathcal{K}'_1(t, \tau) \phi_n(\tau) d\tau + \int_t^\infty \mathcal{K}'_1(t, \tau) \phi_n(\tau) d\tau \geq \\ &\geq \int_0^t \mathcal{K}'_1(t, \tau) \phi_n(t) d\tau + \int_t^\infty \mathcal{K}'_1(t, \tau) \phi_n(t) d\tau = \phi_n(t) \int_0^\infty \mathcal{K}'_1(t, \tau) d\tau \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\phi_0(t)$ – неотрицательная монотонно возрастающая функция,

$$K_a[\phi_0](t_0) \leq K_a[\phi_0](t_1), \quad t_0 \leq t_1,$$

или

$$a\phi_1^3(t_0) + (1-a)\phi_1(t_0) \leq a\phi_1^3(t_1) + (1-a)\phi_1(t_1).$$

Из этого неравенства следует, что $\phi_1(t_0) \leq \phi_1(t_1)$ при $t_0 \leq t_1$. Повторяя проделанные рассуждения n раз, получаем, что $\phi_{n+1}(t_0) \leq \phi_{n+1}(t_1)$ при $t_0 \leq t_1$. Таким образом, мы показали, что последовательность итераций $\{\phi_{n+1}\}$ представляет собой последовательность монотонно возрастающих ограниченных функций, следовательно, она имеет предел [9],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = f(t). \quad (19)$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (15) и используя теорему Лебега [10], получаем уравнение

$$af^3 + (1-a)f - K_af = 0, \quad (20)$$

где $f \in L_\infty[0, \infty]$. Таким образом, функция f является решением уравнения (14). Функция f ограничена, поскольку $\phi_n \leq 1$, следовательно, непрерывна (см. теорему 2). Итак, мы доказали, что итерационная процедура (15) сходится к непрерывному решению f уравнения (14). Функция f монотонно возрастает (так как все ϕ_n монотонно возрастают) и ограничена, $0 \leq f(t) \leq 1$, следовательно, существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Поскольку $\phi_0 \leq f \leq 1$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_0 = 1/2$, то, учитывая теорему 4, получаем, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 1$, и функция $f(t)$ является решением задачи (14).

Таким образом, мы доказали, что итерационный процесс (13) сходится к непрерывному решению краевой задачи (2), (12).

Подведем итог. В данной работе были исследованы свойства интегрального уравнения (1) с бесконечным числом производных, построен итерационный метод его решения и доказана сходимость этого метода.

Благодарности. Автор выражает благодарность И. Я. Арефьевой и М. И. Греку за плодотворные обсуждения и ценные замечания. Работа финансово поддержана Фондом “Династия” и Международным центром фундаментальной физики, Фондом содействия отечественной науке, РФФИ (грант № 05-01-00578) и INTAS (грант № 03-51-6346).

Список литературы

- [1] *В. С. Владимиров, Я. И. Волович.* ТМФ. 2004. Т. 138. № 3. С. 355.
- [2] *Ya. Volovich.* J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 8685; *L. Brekke, P. G. O. Freund, M. Olson, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 302. P. 365.
- [3] *Kazuki Ohmori.* Phys. Rev. D. 2004. V. 69. P. 026008; *Л. В. Жуковская.* Труды МИРАН. 2004. Т. 245. С. 107.
- [4] *L. Joukovskaya, Ya. Volovich.* Energy flow from open to closed strings in a toy model of rolling tachyon. math-ph/0308034.
- [5] *I. Ya. Aref'eva, L. V. Joukovskaya, A. S. Koshelev.* JHEP. 2003. V. 0309. P. 012; *I. Ya. Aref'eva.* Fortschr. Phys. 2003. V. 51. P. 652; Nonlocal string tachyon as a model for cosmological dark energy. astro-ph/0410443.
- [6] *N. Moeller, B. Zwiebach.* JHEP. 2002. V. 0210. P. 034.
- [7] *В. С. Владимиров.* Изв. РАН. Сер. матем. 2005. Т. 69. № 3. С. 55.
- [8] *A. Sen.* JHEP. 2002. V. 0204. P. 048; V. 0210. P. 003; *Nicolas Moeller, Martin Schnabl.* JHEP. 2004. V. 0401. P. 011; *P. H. Frampton, Y. Okada.* Phys. Rev. D. 1988. V. 37. № 10. P. 3077; *L. Brekke, P. G. O. Freund.* Phys. Rep. (Rev. Sci. Phys. Lett.). 1993. V. 233. № 1. P. 1.
- [9] *Г. М. Фихтенгольц.* Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2002.
- [10] *В. С. Владимиров.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988; *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 21.VI.2005 г.,
после доработки 17.VIII.2005 г.