Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Макаров, О потенциале Брейта, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 3, 443–446

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2046>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 04:03:44

© 2006 г.

В. П. Макаров*

О ПОТЕНЦИАЛЕ БРЕЙТА

Показано, что критика известного результата для спин-спиновой части потенциала Брейта (см. статью Л. С. Кузьменкова, С. Г. Максимова, В. В. Федосеева) ошибочна. Доказано, что формула для потенциала Брейта, приведенная в книге В. Б. Берестецкого, Е. М. Лифшица, Л. П. Питаевского, правильна.

Ключевые слова: частицы со спином $1/2$, спин-спиновое взаимодействие, потенциал Брейта.

Оператор $\hat{U}$ энергии взаимодействия между двумя частицами со спином $1/2$, записанный с точностью до членов порядка $(1/c)^2$, носит название потенциала Брейта [1]. Берестецкий и Ландау [2] получили правильное выражение для спиновой части оператора $\hat{U}$:

$$\hat{U}_{\text{spin}}(\vec{r}) = \frac{e^2 \hbar^2}{4m_1 m_2 c^2} \left\{ \left[\frac{(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) r^2 - 3(\hat{\sigma}_1 \vec{r})(\hat{\sigma}_2 \vec{r})}{r^5} \right]' - \frac{8\pi}{3} \hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \delta(\vec{r}) \right\}, \quad (1)$$

где m_i ($i = 1, 2$) – массы частиц, $e_1 = e_2 = e$ – заряд каждой частицы, r – расстояние между частицами и $\hat{\sigma}_i$ – спиновые матрицы Паули. Во всех работах, опубликованных до этого, отсутствует второе слагаемое в $\hat{U}_{\text{spin}}(\vec{r})$ (обзор работ, в которых исследуется потенциал Брейта, дан Бете и Солпитером в книге [3], с. 269–289). Обозначение $[\dots]'$ в (1) соответствует замечанию, имеющемуся в [2]: “в интегралах от $[\dots]'$ можно не обращать внимания на их кажущуюся расходимость и, например, проводить первым интегрирование по углам”. То же самое по существу замечание выражено в [3] следующим образом: “если член типа $[\dots]'$ встречается в любом интеграле по координатному пространству, его заменяют нулем при $r < \varepsilon$, берут интеграл и переходят к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ ”.

Как отмечается в [3], вычисление оператора энергии взаимодействия удобнее проводить сначала в импульсном представлении (см. также с. 378–381 в [4]):

$$\hat{U}_{\text{spin}}(\vec{q}) = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m_1 m_2 c^2 q^2} \{ (\hat{\sigma}_1 \vec{q})(\hat{\sigma}_2 \vec{q}) - q^2 (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) \}, \quad (2)$$

*Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН, Москва, Россия. E-mail: asam@ran.gpi.ru

где $\hbar\vec{q} = \vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = \vec{p}'_2 - \vec{p}_2$ – импульс, переданный при рассеянии первой частицей второй. Фурье-преобразование оператора (2) приводит к результату Берестецкого–Ландау (1):

$$\hat{U}_{\text{spin}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} \hat{U}_{\text{spin}}(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{r}}. \quad (3)$$

В 2001 г. была опубликована работа [5], результаты которой (в той ее части, которая касается потенциала Брейта) состоят в следующем: формула (2) для потенциала в импульсном представлении правильная, но формула для спин-спинового потенциала в координатном представлении (1) не корректна. Мы покажем сначала, что последнее утверждение ошибочно, а потом обсудим аргументацию авторов работы [5]. Для этого проведем Фурье-преобразование потенциала (1), который в [5] считается неправильным, и покажем, что в результате получается формула (2), которая и в [5] считается правильной. В интеграле

$$\hat{U}(\vec{q}) \equiv \int d\vec{r} \hat{U}_{\text{spin}}(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\vec{r}}, \quad (4)$$

где $\hat{U}_{\text{spin}}(\vec{r})$ задается формулой (1), вводим сферические координаты r, θ, φ с осью z вдоль вектора $\vec{q}$. После интегрирования по φ имеем

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\text{spin}}(\vec{q}) = & \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m_1 m_2 c^2 q^2} \{ q^2 (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) - 3 (\hat{\sigma}_1 \vec{q}) (\hat{\sigma}_2 \vec{q}) \} \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\pi d\theta \sin \theta (3 \cos^2 \theta - 1) e^{-iqr \cos \theta} - \frac{2\pi e^2 \hbar^2}{3m_1 m_2 c^2} (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2). \end{aligned} \quad (5)$$

После очевидной замены переменной $\eta = \cos \theta$ и элементарного интегрирования по η получим

$$\begin{aligned} \hat{U}(\vec{q}) = & \frac{\pi e^2 \hbar^2}{m_1 m_2 c^2 q^2} \{ q^2 (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2) - 3 (\hat{\sigma}_1 \vec{q}) (\hat{\sigma}_2 \vec{q}) \} \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} \left(\sin \rho + \frac{3 \cos \rho}{\rho} - \frac{3 \sin \rho}{\rho^2} \right) - \frac{2\pi e^2 \hbar^2}{3m_1 m_2 c^2} (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Легко проверить, что интеграл в (6) сходится. Поэтому нижний предел можно заменить на некоторую конечную величину $\varepsilon > 0$, вычислить интеграл от каждого из трех слагаемых по отдельности, а затем перейти к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Вычислим сначала интеграл, содержащий ρ^{-4} , затем интеграл, содержащий ρ^{-3} , и в результате получим, что интеграл в (6) равен $(-1/3)$, а $\hat{U}(\vec{q}) = \hat{U}_{\text{spin}}(\vec{q})$, как и должно быть, если формула (1) правильная.

Теперь перейдем к обсуждению того, как авторы [5] доказывают свое утверждение о некорректности потенциала (1). Из (2) и (3) следует формула (14) из [5]¹⁾, совпадающая с соответствующей формулой в [3]–[4]:

$$\hat{U}_{\text{spin}}(\vec{r}) = -\frac{e^2 \hbar^2}{4m_1 m_2 c^2} \hat{\sigma}_1^\alpha \hat{\sigma}_2^\beta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{r} + 4\pi \delta^{\alpha\beta} \delta(\vec{r}) \right). \quad (7)$$

¹⁾ В обозначениях мы следуем работе [5].

Следующий шаг, который согласно [5] нужно сделать, чтобы из (7) получить $\hat{U}_{\text{spin}}(\vec{r})$ в форме (1), состоит в использовании равенства

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{r} = \frac{\delta^{\alpha\beta}}{r^3} - \frac{3x^\alpha x^\beta}{r^5} + \frac{4\pi}{3} \delta^{\alpha\beta} \delta(\vec{r}). \quad (8)$$

Авторы [5] правы в том, что равенство (8) некорректно. Авторы, однако, ошибаются, полагая, что это равенство необходимо для перехода от (7) к потенциалу в форме (1). Дело в том, что решение любой физической задачи содержит оператор $\hat{U}_{\text{spin}}(\vec{r})$, как и полный оператор энергии взаимодействия $\hat{U}$, только в виде соответствующих интегралов: сами операторы получены в [2]–[5] при расчете амплитуды рассеяния двух частиц со спином 1/2.

Матричный элемент оператора (7), соответствующий переходу частиц из некоторого начального состояния в некоторое конечное состояние, после интегрирования по координатам центра масс содержит интегралы вида

$$I_{\alpha\beta} = \int d\vec{r} f(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{r} = \int d\vec{r} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f(\vec{r})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}; \quad (9)$$

здесь $f(\vec{r})$ – произведение волновой функции относительного движения частиц в начальном состоянии и функции, комплексно сопряженной волновой функции относительного движения частиц в конечном состоянии; мы полагаем, разумеется, что интегралы существуют (сходятся). Для перехода от оператора (7) к оператору (1) достаточно выполнения следующего равенства:

$$I_{\alpha\beta} = \int d\vec{r} \left[\frac{3x^\alpha x^\beta - \delta^{\alpha\beta} r^2}{r^5} \right]' f(\vec{r}) - \frac{4\pi}{3} \delta^{\alpha\beta} f(0) \quad (10)$$

или, поскольку функция $f(\vec{r})$ произвольна, равенства (ср. с (8))

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{r} = \left[\frac{\delta^{\alpha\beta}}{r^3} - \frac{3x^\alpha x^\beta}{r^5} \right]' + \frac{4\pi}{3} \delta^{\alpha\beta} \delta(\vec{r}), \quad (11)$$

которое, однако, можно и нужно понимать только в смысле (10). Из (7) и (11) следует формула (1).

Что касается формулы (11), то она представляет собой частный случай формулы, которая получается в теории обобщенных функций, определенных в n -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}_n$, состоящем из точек $x = (x^1, x^2, \dots, x^\alpha, \dots, x^n)$, (см. [6], § 11, задачи 14 и 13):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{1}{r^{n-2}} = (n-2) \left(\frac{n x^\alpha x^\beta - r^2 \delta^{\alpha\beta}}{r^{n+2}} \right)' - \frac{n-2}{n} \Omega_n \delta^{\alpha\beta} \delta(x), \quad (12)$$

где $r^2 = (x^\alpha)^2$, $\delta(x) = \delta(x^1) \dots \delta(x^n)$ и Ω_n – площадь сферы радиуса $r = 1$ в $\mathbb{R}_n$. Для случая трехмерного пространства ($n = 3$) формула (12) переходит в формулу (11).

Благодарности. Автор благодарен рецензенту, указавшему на возможность приведенного здесь обоснования формулы (11).

Список литературы

- [1] *G. Breit.* Phys. Rev. 1929. V. 34. P. 553; 1932. V. 39. P. 616.
- [2] *В.Б. Берестецкий, Л.Д. Ландау.* ЖЭТФ. 1949. Т. 19. С. 673.
- [3] *Г. Бете, Э. Солпитер.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: ГИФМЛ, 1960.
- [4] *В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
- [5] *Л.С. Кузьменков, С.Г. Максимов, В.В. Федосеев.* ТМФ. 2001. Т. 126. С. 136.
- [6] *Г.Е. Шилов.* Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.

Поступила в редакцию 17.III.2005 г.,
после доработки 6.IX.2005 г.