Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Ц. Аджемян, С. В. Новиков, Аномальный скейлинг в модели турбулентного переноса векторного поля, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 3, 467–487

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2048>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:55:56

© 2006 г.

Л. Ц. Аджемян*, С. В. Новиков*

АНОМАЛЬНЫЙ СКЕЙЛИНГ В МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Рассмотрена модель турбулентного переноса пассивного векторного поля φ двумерным случайным полем скорости, некоррелированным во времени и имеющим гауссову статистику с коррелятором степенного вида. Методами ренормализационной группы и операторного разложения показано, что асимптотика структурных функций поля φ в инерционном интервале определяется флуктуациями диссипации энергии. Зависимость асимптотики от внешнего масштаба турбулентности является существенной и имеет степенной вид (аномальный скейлинг). Соответствующие показатели определяются спектром матриц аномальных размерностей семейств операторов, составленных из градиентов φ . Найден базис, построенный из степеней операторов диссипации и энстрофии, в котором эти матрицы имеют треугольный вид во всех порядках теории возмущений. В двухпетлевом приближении вычислены показатели аномального скейлинга структурных функций произвольного порядка.

Ключевые слова: турбулентность, пассивная примесь, аномальный скейлинг, ренормализационная группа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание аномального скейлинга – одна из важных нерешенных задач теории развитой однородной изотропной турбулентности. Термином “аномальный скейлинг” обозначают отклонения от предсказаний теории Колмогорова. Он проявляется, в частности, в экспериментально наблюдаемом поведении структурных функций $S_n(r)$ турбулентных пульсаций скорости $\mathbf{v}$ в инерционном интервале $l \ll r \ll L$, где L и l – внешний и диссипативный масштабы турбулентности. Структурными функциями векторного поля φ называют величины

$$S_n(r) \equiv \langle [\varphi_r(t, \mathbf{x} + \mathbf{r}) - \varphi_r(t, \mathbf{x})]^n \rangle, \quad \varphi_r \equiv \frac{\varphi_i r_i}{r}. \quad (1)$$

Для поля $\mathbf{v}$ теория Колмогорова предсказывает $S_n(r) \sim r^{n/3}$, в то время как эксперимент дает $S_n(r) \sim r^{n/3 - \xi_n}$, где $\xi_n > 0$ – так называемые аномальные показатели.

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: snov@mail.ru; Loran.Adzhemyan@pobox.spbu.ru

Согласно теории Колмогорова статистика турбулентных пульсаций в инерционном интервале определяется единственным размерным параметром – средней скоростью диссипации пульсационной энергии на единицу массы $\bar{\varepsilon} = \nu \langle \Phi_{\text{dis}} \rangle$, где ν – кинематическая вязкость, $\Phi_{\text{dis}} \equiv (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2/2$ – оператор локальной диссипации энергии. В стационарном состоянии $\bar{\varepsilon} = W$, где W – мощность накачки энергии в систему. Для структурных функций (1) гипотеза Колмогорова находит отражение в том, что, записав их из соображений размерности в виде $S_n(r, \nu, W, L) = (Wr)^{n/3} R_n(r/l, r/L)$, где $l \equiv (\nu^3/W)^{1/4}$, для функции R_n будем иметь конечный предел в инерционном интервале: $R_n(\infty, 0) = \text{const} \neq 0$. Общеизвестной в настоящее время считается возможность предельного перехода в функции $R_n(r/l, r/L)$ по первому аргументу, т.е. конечность величины $R_n(r/L) \equiv R_n(\infty, r/L)$, что означает независимость структурных функций от вязкости в инфракрасной (ИК) области $r \gg l$. Аномальный скейлинг возникает при нарушении гипотезы Колмогорова о конечности функции $R_n(r/L)$ при $r/L \rightarrow 0$ и отвечает предположению о ее степенной асимптотике $R_n(r/L) \sim (r/L)^{-\xi_n}$.

В рамках феноменологических обобщений теории Колмогорова аномальный скейлинг связывают обычно с флуктуациями скорости локальной диссипации энергии [1]. При рассмотрении задачи как теоретико-полевой со случайным полем прежде всего напрашивается проведение аналогии с теорией критического поведения. Нередко высказывалось мнение, что такая аналогия будет наиболее полной, если поменять местами ИК и ультрафиолетовую (УФ) области [2], [3]. Именно с таким подходом была связана одна из первых попыток применения в теории турбулентности метода ренормализационной группы (РГ) [2]. Однако необходимая на этом пути ИК-ренормировка теории сталкивается с непреодолимыми в общем случае трудностями: имеется бесконечное число существенных операторов; лишь в некоторых специальных случаях (см. ниже) эти трудности удается преодолеть.

Другой путь – проведение прямой аналогии с теорией критического поведения – дает возможность использовать хорошо разработанный аппарат УФ-ренормировок. Это позволяет обосновать первую гипотезу Колмогорова о независимости структурных функций в инерционном интервале от вязкости. Необходимая для обоснования аномального скейлинга асимптотика $r/L \rightarrow 0$ функции $R_n(r/L)$ непосредственно РГ не определяется, для ее нахождения естественно воспользоваться операторным разложением (ОР), приводящим к асимптотическому представлению

$$S_n(r) \propto r^{n/3} \sum_F \left(\frac{r}{L} \right)^{\Delta_F} A_F, \quad (2)$$

где суммирование ведется по всевозможным скалярным составным операторам F (локальным произведениям полей $v_i(t, \mathbf{x})$ и их производных), Δ_F – критические размерности этих операторов [4], [5]. Если бы для всех F выполнялось $\Delta_F > 0$ (как в теории фазовых переходов), члены суммы в представлении (2) определяли бы в инерционном интервале поправки к колмогоровскому скейлингу. Если же в (2) присутствует хотя бы один оператор с $\Delta_F < 0$ – “опасный оператор”, предел $r/L \rightarrow 0$ перестает существовать, что и приводит к аномальному скейлингу. Реализация этого сценария сталкивается, однако, с большими трудностями как технического характе-

ра (расчет размерностей Δ_F), так и принципиальными: можно показать, что если в теории есть хотя бы один опасный оператор, то их с необходимостью бесконечно много, причем спектр их значений не ограничен снизу (нет “самого опасного”); тем самым разложение (2) будет полезным только в двух случаях: если его удастся каким-то образом просуммировать или если, в силу специфики модели, вклад в (2) дает лишь конечное число слагаемых.

Заметный прогресс в изучении аномального скейлинга достигнут в последнее время в родственной задаче – описании турбулентного переноса пассивной примеси. Данные как прямых экспериментальных измерений, так и компьютерного моделирования показывают, что аномальный скейлинг проявляется не только для самих турбулентных пульсаций скорости, но и в еще большей степени для пассивной примеси, переносимой турбулентной системой (которой может быть поле $\theta(t, \mathbf{x})$ примесных частиц или температуры). Перенос пассивной примеси турбулентным полем скорости $v_i(t, \mathbf{x})$ описывается уравнением

$$\partial_t \theta + (v_j \partial_j) \theta = \nu_0 \partial^2 \theta + f, \quad (3)$$

где ν_0 – коэффициент диффузии (температуропроводности), f – источник поля θ . Достигнутый прогресс в описании аномального скейлинга поля примеси связан с использованием относительно простой модели Крейчнана–Казанцева [6], в которой статистика турбулентных пульсаций в уравнении (3) моделируется некоррелированным во времени гауссовым распределением с парным коррелятором

$$\langle v_i(t, \mathbf{x}) v_j(t', \mathbf{x}') \rangle = D_0 \delta(t - t') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} P_{ij}(\mathbf{k}) N(k) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}', \quad (4)$$

где $P_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ – поперечный проектор (следствие поперечности $v_i(t, \mathbf{x})$), а функция $N(k)$ в d -мерном пространстве моделируется степенным выражением

$$N(k) \equiv k^{-d-\varepsilon}. \quad (5)$$

Физическим значением параметра ε считается $\varepsilon = 4/3$, при котором амплитуда D_0 имеет размерность мощности накачки энергии на единицу массы. В ИК-области функция накачки (5) предполагается каким-либо образом регуляризованной на масштабе $k \sim L^{-1}$. Конкретный вид регуляризации несуществен, в дальнейшем мы будем предполагать простое обрезание функции (5) при $k < L^{-1}$.

В модели (3)–(5) удалось обосновать аномальный скейлинг и рассчитать показатели структурных функций ξ_n [7], [8]. Первые результаты были получены на основе использования уравнения Хопфа для функции распределения одновременных флуктуаций поля примеси. Линейность уравнения (3) по θ приводит к тому, что удастся получить замкнутые уравнения для одновременных корреляционных функций (обычно это цепочка уравнений). Анализ так называемых “нулевых мод” этих уравнений позволяет обосновать аномальный скейлинг и рассчитать аномальные показатели. Парная функция находится точно, аномальный скейлинг для нее отсутствует ($\xi_2 = 0$). Показатели для старших функций были рассчитаны приближенно с использованием в качестве малых параметров величин ε [7] и $1/d$ [8]:

$$\xi_n = \frac{n(n-2)\varepsilon}{2(d+2)} + O(\varepsilon^2), \quad \xi_n = \frac{n(n-2)\varepsilon}{2d} + O\left(\frac{1}{d^2}\right). \quad (6)$$

Анализ нулевых мод дал также некоторые интересные результаты в другом предельном случае – так называемом бэтчелоровском пределе $\varepsilon = 2$ [9].

Технические трудности не позволили до настоящего времени вычислить методом нулевых мод старшие члены разложений (6). Для нахождения асимптотики малых ε более эффективными оказались методы РГ и ОР. Таким образом в работах [4], [5] был вычислен вклад $\sim \varepsilon^2$, затем в работе [10] – вклад $\sim \varepsilon^3$. Существенно, что в модели Крейчнана вклад в операторное разложение (2) структурной функции S_{2n} дает конечное число слагаемых – степени оператора диссипации примесного поля Φ_{dis}^k с $1 \leq k \leq n$. Сшивание асимптотики показателей ξ_n при малых ε (с учетом трех членов разложения) с их бэтчелоровской асимптотикой $\varepsilon \rightarrow 2$ приводит для $\xi_n(\varepsilon)$ к результатам, совпадающим с данными численного эксперимента (в пределах его погрешности) во всем диапазоне $0 < \varepsilon < 2$, в том числе при физическом значении $\varepsilon = 4/3$ [10].

Специфика модели Крейчнана, как утверждается в работах [11], позволяет также использовать в ней упомянутую выше “инфракрасную ренормгруппу”, в рамках которой показатели ξ_n были рассчитаны в порядке ε^2 .

Помимо технической эффективности, метод РГ оказался выгодным для исследования аномального скейлинга ввиду его универсальности. В работе [12] этим методом в порядке ε^2 рассчитаны аномальные показатели в модели сжимаемой жидкости, модель переноса гауссовским полем скорости с конечным временем корреляции рассмотрена в работах [13], модель Казанцева магнитной гидродинамики – в статье [12].

В настоящей работе рассматривается модель векторной пассивной примеси, предложенная в работах [14]–[17]. Она является прямым обобщением уравнения (3) и описывается уравнением

$$\partial_t \varphi_i + (v_j \partial_j) \varphi_i = \nu_0 \partial^2 \varphi_i - \partial_i P + f_i, \quad (7)$$

которое получается из (3) заменой скалярного поля θ на векторное поперечное поле φ_i и добавлением в левую часть градиента давления P , призванного обеспечить выполнение условия поперечности $\partial_i \varphi_i = 0$ (несжимаемость). Случайная сила f_i в уравнении (7) описывается гауссовым распределением с нулевым средним и коррелятором

$$\langle f_i(t, \mathbf{x}) f_j(t', \mathbf{x}') \rangle = \delta(t - t') C_{ij} \left(\frac{\mathbf{r}}{L} \right). \quad (8)$$

Точный вид функции $C_{ij}(\mathbf{r}/L)$ не важен, она лишь моделирует поставку энергии от взаимодействия с крупными вихрями для компенсации диссипативных потерь.

Модель (4), (7), (8) может служить грубым приближением для описания самого турбулентного поля пульсаций скорости, если под φ понимать “жесткую” составляющую поля, а под v – “мягкую”, и в уравнении Навье–Стокса (НС) для жесткого поля учитывать только его конвективный перенос мягкой компонентой, а для последней принимать модель гауссовой статистики с коррелятором (4). Такие допущения не нарушают галилеевой инвариантности модели. Поскольку этим же свойством обладают структурные функции (1), то в операторное разложение (2) вклад дают лишь

галилеево-инвариантные операторы, как это происходит и в модели стохастической гидродинамики на основе уравнения НС.

В работе [15] модель (4), (7), (8) была рассмотрена с помощью уравнения Хопфа для парной корреляционной функции. Аномальный скейлинг для нее обнаружен не был ($\xi_2 = 0$), нетривиальные результаты получены при учете анизотропии. В работе [14] эта модель была рассмотрена методами РГ и ОР. Показано, что главный вклад в операторное разложение S_{2n} дает семейство $\Phi^{(n)}$ скалярных операторов вида $(\partial\varphi)^{2n}$; эти операторы ренормируются немультимпликативно, со смешиванием, что резко усложняет вычисление их аномальных размерностей, так что даже в однопетлевом приближении не удастся получить результат для произвольного n . В работе [14] проведен однопетлевой расчет для семейства с $n = 4$ и в линейном по ε приближении получен набор показателей, среди которых присутствует отрицательный; таким образом, доказано существование аномального скейлинга для векторной модели со смешиванием. Для структурных функций произвольного порядка n расчет аномальных показателей в модели (4), (7), (8) удалось осуществить в работе [17] для плоских течений ($d = 2$). Оказалось, что в этом случае модель векторной примеси в однопетлевом приближении имеет аномальные показатели, совпадающие с показателями (6) для скалярной примеси, а “наиболее опасные” операторы, определяющие эти показатели, как и в скалярной задаче, представляют собой степени оператора диссипации.

В настоящей работе мы продолжим исследование модели двумерной векторной примеси, преследуя двоякую цель. Во-первых, выяснить, сохраняется ли в старших порядках полученное в однопетлевом приближении утверждение об определяющей роли флуктуаций диссипации энергии в явлении аномального скейлинга, и, во-вторых, продвинуться в старшие порядки ε -разложения аномальных показателей, так как опыт их расчета в скалярной модели показывает, что только проведение многопетлевых вычислений показателей может дать надежду на их определение при реальном (не малом) ε . Первая из этих задач решена в настоящей работе в общем виде, а индексы рассчитаны в двухпетлевом приближении.

2. ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ, РЕНОРМИРОВКА

Стохастическая задача (4), (7), (8) эквивалентна полевой модели с функционалом

$$S(\varphi', \varphi, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \varphi' D_\varphi \varphi' + \varphi' [-\partial_t - (\mathbf{v}\partial) + \nu_0 \partial^2] \varphi - \frac{1}{2} \mathbf{v} D_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{v}. \quad (9)$$

Два первых слагаемых представляют собой действие типа Мартина–Сиджи–Роуза для стохастической задачи (7), (8) при фиксированном $\mathbf{v}$, последнее слагаемое описывает гауссово распределение по $\mathbf{v}$; D_φ и $D_{\mathbf{v}}$ – корреляторы (8) и (4), соответственно; φ' – вспомогательное поперечное векторное поле. Необходимые интегрирования по t и $\mathbf{x}$, а также суммирования по индексам подразумеваются.

Полевая формулировка позволяет отождествить статистическое усреднение $\langle \dots \rangle$ с функциональным усреднением с весом e^S . Объектом изучения в настоящей работе являются структурные функции (1) в инерционном интервале. Инвариантность

действия (9) относительно отражения $\varphi \rightarrow -\varphi$, $\varphi' \rightarrow -\varphi'$ приводит к тому, что отличными от нуля оказываются только функции $S_n(r)$ с четными n .

Параметром теории возмущений модели (9) является заряд $g_0 \equiv D_0/\nu_0 \equiv \Lambda^\varepsilon$; последнее равенство определяет характерный УФ-масштаб Λ . Действию (9) соответствует стандартная фейнмановская диаграммная техника с тройной вершиной $-\varphi'(\mathbf{v}\partial)\varphi \equiv \varphi'_\alpha \varphi_\beta v_\gamma V_{\alpha\beta\gamma}$ и вершинным множителем $V_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) = -i\delta_{\alpha\beta}k_\gamma$, где $\mathbf{k}$ – волновой вектор поля φ' . Необходимые для расчета констант ренормировки затравочные корреляторы модели (9) в импульсно-временном представлении имеют вид

$$\langle \varphi_i(t) \varphi'_j(t') \rangle_0 = \langle \varphi'_j(t') \varphi_i(t) \rangle_0^* = \Theta(t-t') P_{ij}(\mathbf{k}) e^{-\nu_0 k^2(t-t')}, \quad (10)$$

где $\Theta(t)$ – функция Хевисайда.

Анализ УФ-расходимостей и ренормировка модели (9) не отличаются от проведенных в работе [14], поэтому приведем лишь необходимые результаты. Модель логарифмична, т.е. заряд g_0 безразмерен, при $\varepsilon = 0$. УФ-расходимости диаграмм проявляются в виде полюсов по ε . Поверхностная расходимость присутствует в единственной 1-неприводимой функции $\langle \varphi' \varphi \rangle_{1-ir}$; она устраняется введением в действие контрчлена вида $\varphi' \partial^2 \varphi$, что эквивалентно мультипликативной ренормировке параметров g_0 , ν_0 в выражении (9) с единственной независимой константой ренормировки Z_ν :

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g, \quad Z_g = Z_\nu^{-1}, \quad D_0 = g_0 \nu_0 = D = g \nu \mu^\varepsilon. \quad (11)$$

Здесь μ – ренормировочная масса в используемой в дальнейшем схеме минимальных вычитаний (МВ), g и ν – ренормированные аналоги затравочных параметров g_0 и ν_0 , $Z = Z(g, \varepsilon, d)$ – константы ренормировки. Связь Z_g и Z_ν в (11) – следствие отсутствия ренормировки величины D_0 ; не требуется также ренормировка полей, т.е. $Z_\varphi = Z_{\varphi'} = 1$. Ренормированный функционал действия имеет вид

$$\mathcal{S}_R(\varphi', \varphi, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \varphi' D_\varphi \varphi' + \varphi' [-\partial_t - (\mathbf{v}\partial) + \nu Z_\nu \partial^2] \varphi - \frac{1}{2} \mathbf{v} D_\mathbf{v}^{-1} \mathbf{v}, \quad (12)$$

где в корреляторе $D_\mathbf{v}$ амплитуда D_0 предполагается выраженной через ренормированные параметры согласно (11). В схеме МВ в качестве контрчленов используются чисто полюсные по ε вклады, поэтому константы ренормировки имеют вид

$$Z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) \varepsilon^{-n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n a_{nk} g^k \varepsilon^{-n}. \quad (13)$$

В этой схеме они не зависят от способа ИК-регуляризации диаграмм; в качестве таковой мы будем использовать обрезание функции $N(k)$ из выражения (5) при $k < L^{-1}$.

Константа ренормировки Z_ν определяется из условия УФ-конечности 1-неприводимой функции $\langle \varphi' \varphi \rangle_{1-ir} = \mathcal{G}_{ij}^{-1}$. Полная функция $\mathcal{G}_{ij} \equiv \langle \varphi_i \varphi'_j \rangle$, как и затравочная $\langle \varphi \varphi' \rangle_0$ (10), кратна поперечному проектору $\mathcal{G}_{ij}(\omega, \mathbf{p}) = P_{ij}(\mathbf{p}) \mathcal{G}(\omega, p)$; для скалярной

функции $\mathcal{G}(\omega, p)$ справедливо уравнение Дайсона–Уайльда

$$\mathcal{G}^{-1}(\omega, p) = [-i\omega + \nu_0 p^2] - \Sigma^{\varphi'\varphi}(\omega, p), \quad (14)$$

$$\Sigma^{\varphi'\varphi}(\omega, p) \equiv \frac{\Sigma_{ij}^{\varphi'\varphi}(\omega, \mathbf{p}) P_{ij}(\mathbf{p})}{d-1}. \quad (15)$$

Однопетлевое приближение для оператора $\Sigma_{ij}^{\varphi'\varphi}$ дается диаграммой

$$\Sigma_{cd}^{\varphi'\varphi} = \frac{c}{\mathbf{p}} \overset{a}{\text{---}} \overset{\mathbf{k}}{\text{---}} \overset{b}{\text{---}} \frac{d}{\mathbf{p}-\mathbf{k}}. \quad (16)$$

Здесь сплошная линия обозначает пропагатор $\langle \varphi \varphi' \rangle_0$ (10), ее перечеркнутый конец соответствует полю φ' , неперечеркнутый – полю φ ; пунктирная линия обозначает коррелятор скорости (4); вершинам сопоставляется множитель $V_{\alpha\beta\gamma}$; индексы a и b соответствуют полям $\mathbf{v}$, индексы c и d – полям φ' . Аналитическое выражение, соответствующее диаграмме (16), в импульсно-временном представлении имеет вид

$$\Sigma_{cd}^{\varphi'\varphi}(t, p) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} i(p_a - k_a) \langle \varphi_c \varphi'_d \rangle_0(t, \mathbf{p} - \mathbf{k}) \langle v_a v_b \rangle(t, \mathbf{k}) i p_b, \quad (17)$$

где $t = t_1 - t_2$ – разность времен внешних концов диаграммы. Согласно (4) и (10) зависимость от t в выражении (17) определяется произведением $\delta(t)\Theta(t)e^{-\nu_0|\mathbf{p}-\mathbf{k}|^2 t} = \delta(t)\Theta(t) = \delta(t)/2$. Здесь Θ -функция доопределена 1/2 при $t = 0$, так как коррелятор скорости $\langle v_a(t_1) v_b(t_2) \rangle$ – четная функция $t = t_1 - t_2$, поэтому $\delta(t_1 - t_2)$ в выражении (4) должна пониматься как предел последовательности четных функций.

Дальнейшее изложение относится к случаю $d = 2$. Следует отметить, что рассматриваемая модель заведомо не претендует на описание реальных двумерных систем, поскольку в ней отсутствует характерный для последних инверсный поток энергии, обусловленный законом сохранения энтропии, не выполняющимся в модели (4), (7), (8). Мы рассматриваем эту модель как полигон для отработки технических приемов исследования аномального скейлинга для векторного поля со смешиванием в трехмерных системах; с этой точки зрения отсутствие указанной специфики двумерной системы является скорее положительным фактором.

Подставляя (4) и (10) в (17) и переходя к скалярному оператору (15), находим

$$\Sigma^{\varphi'\varphi}(t, p) = -\frac{D_0 \delta(t)}{2} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} N(k) \left[1 - \frac{(\mathbf{p}\mathbf{k})^2}{p^2 k^2} \right] \left[p^2 - \frac{p^2 k^2 - (\mathbf{p}\mathbf{k})^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}|^2} \right],$$

откуда следует, что в частотном представлении величина $\Sigma^{\varphi'\varphi}(\omega, p)$ не зависит от частоты. Для нахождения константы ренормировки Z_ν достаточно определить полюсную по ε часть $\Sigma^{\varphi'\varphi}(\omega, p)$, однако при вычислении двухпетлевых диаграмм удобно будет иметь точный результат интегрирования. Подставляя $N(k) = k^{-2-\varepsilon}\Theta(kL-1)$ и интегрируя, получаем

$$\Sigma^{\varphi'\varphi}(t, p) = \frac{1}{4\pi} p^2 D_0 L^\varepsilon \sigma(pL) \delta(t), \quad \Sigma^{\varphi'\varphi}(\omega, p) = \frac{1}{4\pi} p^2 D_0 L^\varepsilon \sigma(pL), \quad (18)$$

$$\sigma(x) = \frac{6x^{-\varepsilon}}{(4-\varepsilon)(4-\varepsilon^2)\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{x^{-4}}{8(4-\varepsilon)} - \frac{3x^{-2}}{8(2-\varepsilon)}, \quad x \geq 1. \quad (19)$$

Переходя в формулах (18) к ренормированным переменным согласно (11) и выделяя расходящуюся часть, находим

$$\text{Div. p.}[\Sigma^{\varphi'\varphi}(\omega, p)] = -\frac{1}{\varepsilon}\nu p^2 u, \quad u \equiv \frac{g}{32\pi}, \quad (20)$$

где $\text{Div. p.}[\dots]$ обозначает операцию выделения вкладов, расходящихся при $\varepsilon \rightarrow 0$. В выражении (20) и далее используется безразмерный заряд u , удобный для сокращения записи.

Из требования конечности функции отклика (14), выраженной в ренормированных переменных $\text{Div. p.}[\nu Z_\nu p^2 - \Sigma^{\varphi'\varphi}(\omega, p)] = 0$, с учетом (20) получаем $Z_\nu = 1 - u/\varepsilon$. Этот однопетлевой результат на самом деле оказывается точным [14], так как многопетлевые диаграммы для $\Sigma^{\varphi'\varphi}$ содержат замкнутые циклы запаздывающего пропагатора (10) и поэтому равны нулю (следствие некоррелированности во времени поля $\mathbf{v}$ в (4)).

По константам ренормировки Z_ν, Z_g определяются РГ-функции γ_i и β :

$$\gamma_i(g) \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_i, \quad \gamma_g = -\gamma_\nu, \quad \beta(g) \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = -g[\varepsilon + \gamma_g], \quad (21)$$

где $\tilde{\mathcal{D}}_\mu \equiv \mu \partial_\mu$ – дифференциальный оператор при постоянных g_0 и ν_0 . Связь γ_g с γ_ν в (21) – следствие связи Z_ν с Z_g в (11), а соотношение между β и γ_g – следствие определения (21) и формулы ренормировки для g в (11). Конечность РГ-функций γ позволяет выразить их через вычет $a_1(g)$ при первом полюсе по ε в разложении (13):

$$\gamma \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z = \beta \partial_g \ln Z = -g \partial_g a_1 = -u \partial_u a_1. \quad (22)$$

С учетом $Z_\nu = 1 - u/\varepsilon$ отсюда находим $\gamma_\nu = u$. Тогда из (21) следует, что в модели (12) существует ИК-устойчивая неподвижная точка $\beta(u_*) = 0$, $\beta'(u_*) > 0$ с координатой $u_* = \varepsilon$, значение которой, как и вытекающее из (21) значение $\gamma_\nu(u)$ в неподвижной точке $\gamma_\nu^* \equiv \gamma_\nu(u_*) = \varepsilon$, определено точно, т.е. не имеет поправок $\sim \varepsilon^2, \varepsilon^3$ и т.д.

Критическая размерность Δ_F любой мультипликативно ренормируемой величины (составного оператора или корреляционной функции) $F = Z_F F_R$ с константой ренормировки Z_F определяется соотношением (см. [18])

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad \Delta_\omega = 2 - \gamma_\nu^* = 2 - \varepsilon, \quad (23)$$

где d_F^k и d_F^ω – импульсная и частотная размерности F (канонические размерности), $\gamma_F^* \equiv \gamma_F(g_*)$ – значение аномальной размерности $\gamma_F = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F$ в неподвижной точке. Поле φ имеет размерности $d_\varphi^k = 0$, $d_\varphi^\omega = -1/2$, $\gamma_\varphi = 0$, и в силу (23) его критическая размерность равна $\Delta_\varphi = -1 + \varepsilon/2$. Для структурных функций (1) имеем соответственно $d_{S_{2n}}^k = 0$, $d_{S_{2n}}^\omega = -n$ и тривиальную аномальную размерность $\gamma_{S_{2n}}^* = 0$, так как $Z_{S_{2n}} = 1$ из-за отсутствия ренормировки поля φ и всех его степеней φ^n [14]. Таким образом, согласно соотношению (23), критическая размерность структурных функций равна $\Delta_{S_{2n}} = 2n\Delta_\varphi = -2n + n\varepsilon$, и в ИК-асимптотике они имеют вид $S_{2n}(r) = D_0^{-n} r^{-2n\Delta_\varphi} R_n(r/L) = D_0^{-n} r^{n(2-\varepsilon)} R_n(r/L)$. В интересующей

нас области $r/L \rightarrow 0$ (инерционный интервал) асимптотический вид скейлинговой функции $R_n(r/L)$ может быть найден из операторного разложения

$$S_{2n}(r) = D_0^{-n} r^{n(2-\varepsilon)} \sum_F \left(\frac{r}{L}\right)^{\Delta_F} A_F, \quad (24)$$

совпадающего с представлением (2) при физическом $\varepsilon = 4/3$. В силу галилеевой инвариантности действия (12) и структурных функций (1) вклад в разложение (24) дают только галилеево-инвариантные скалярные составные операторы.

3. БАЗИС СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $(\partial\varphi)^{2n}$, РЕНОРМИРОВКА

Основная техническая проблема при нахождении аномальных размерностей структурных функций S_{2n} на основе разложения (24) состоит в ренормировке операторов, определяющих главные члены этого разложения. Как показано в работе [14], ими являются операторы с минимальными каноническими размерностями – семейство $\Phi^{(n)}$ скалярных операторов вида $(\partial\varphi)^{2n}$, точнее, всевозможные свертки тензоров $m_{ij} = \partial_i\varphi_j$ и $m_{ij}^T = m_{ji} = \partial_j\varphi_i$. Например, для $n = 2$ семейство состоит из семи операторов $\Phi^{(2)} = \{\text{tr}(m^2)^2, \text{tr}(mm^T)^2, \text{tr}(m^2)\text{tr}(mm^T), \text{tr}(m^2m^Tm^T), \text{tr}((mm^T)^2), \text{tr}(m^3m^T), \text{tr}(m^4)\}$. Операторы из $\Phi^{(n)}$ ренормируются немультпликативно, со смешиванием. Таким образом, для семейства $\Phi^{(2)}$ задача сводится к нахождению собственных чисел матрицы 7×7 критических размерностей, что для матрицы общего вида можно сделать только численно. Кроме того, число операторов в семействе $\Phi^{(n)}$ быстро растет с увеличением n . Так, $\Phi^{(3)}$ содержит 24 оператора, $\Phi^{(4)}$ – 81, $\Phi^{(5)}$ – 278, а $\Phi^{(9)}$ – уже 47246 операторов. В пространствах достаточно высокой размерности d все эти операторы независимы, однако с уменьшением d между ними появляются связи. Исключение зависимых операторов при реальных размерностях $d = 3$ и $d = 2$ позволяет радикально уменьшить размеры матрицы критических размерностей, а в двумерном случае, благодаря выбору специального базиса, еще и привести ее к треугольному виду при произвольном n во всех порядках теории возмущений (см. раздел 4).

Связи между операторами можно выявить, воспользовавшись тождеством Гамильтона–Кэли, которое для произвольной (2×2) -матрицы M запишем в виде

$$\chi_2(M) \equiv M^2 - M\text{tr}(M) + \frac{I(\text{tr}(M)^2 - \text{tr}(M^2))}{2} = 0. \quad (25)$$

Как мы увидим, искомые базисные операторы естественно выражаются через антисимметричную A и симметричную S части матрицы $m_{ij} \equiv \partial_i\varphi_j$:

$$(A)_{ij} = a_{ij} \equiv \frac{1}{2}(m_{ij} - m_{ji}), \quad (S)_{ij} = s_{ij} \equiv \frac{1}{2}(m_{ij} + m_{ji}), \quad m_{ij} \equiv \partial_i\varphi_j = a_{ij} + s_{ij}. \quad (26)$$

Выбирая в формуле (25) в качестве M линейную комбинацию $\alpha A + \beta S$ и приравнявая нулю коэффициенты при α^2 , $\alpha\beta$ и β^2 в выражении $\chi_2(\alpha A + \beta S) = 0$, получим

$$A^2 = \frac{I\text{tr}(A^2)}{2}, \quad S^2 = \frac{I\text{tr}(S^2)}{2}, \quad SA = -AS, \quad (27)$$

где учтено, что $\text{tr}(A) = \text{tr}(S) = 0$ в силу условия поперечности $\partial_i \varphi_i = 0$. Первую из формул (27) можно также считать следствием того, что любая антисимметричная матрица 2×2 кратна единичному антисимметричному тензору ε_{ij} , что позволяет записать полезное для дальнейшего обобщение этой формулы в виде

$$a_{12}a_{34} = -\frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{34}\text{tr}(A^2)}{2} = \frac{(-\delta_{13}\delta_{24} + \delta_{14}\delta_{23})\text{tr}(A^2)}{2}, \quad (28)$$

где использовано тождество

$$\varepsilon_{12}\varepsilon_{34} = \delta_{13}\delta_{24} - \delta_{14}\delta_{23}. \quad (29)$$

Выразив операторы семейства $\Phi^{(n)} = (\partial\varphi)^{2n}$ через матрицы A , S из (26) и применив тождества (27), получим, что любой оператор семейства представим в виде линейной комбинации базисных операторов

$$\mathcal{F}_q \equiv \Phi_q^{(n)} = \text{tr}(S^2)^q \text{tr}(A^2)^{\bar{q}}, \quad 0 \leq q \leq n, \quad q + \bar{q} = n. \quad (30)$$

Таким образом, количество линейно независимых операторов в двумерной задаче свелось к $n+1$. Отметим, что операторы $\text{tr}(S^2)$ и $\text{tr}(A^2)$, на основе которых построен базис (30), имеют простой физический смысл: первый из них кратен оператору локальной диссипации $\text{tr}(S^2) = \Phi_{\text{dis}}/2$, второй – оператору локальной энтропии $\text{tr}(A^2) = -|\Omega|^2/4$.

Операторы $\mathcal{F}_q(x)$ ренормируются немультимпликативно, со смешиванием. Их ренормированные аналоги $\mathcal{F}_k^{\text{R}}$ определяются соотношением $\mathcal{F}_q = (Z)_{qk} \mathcal{F}_k^{\text{R}}$. Матрица констант ренормировки Z находится из следующего требования: ренормированные 1-неприводимые функции

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}_q^{\text{R}}(x) \varphi_{j_1}(x_1) \dots \varphi_{j_{2n}}(x_{2n}) \rangle_{1-ir} &= (Z^{-1})_{qk} \langle \mathcal{F}_k(x) \varphi_{j_1}(x_1) \dots \varphi_{j_{2n}}(x_{2n}) \rangle_{1-ir} \equiv \\ &\equiv (Z^{-1})_{qk} \Gamma_k^{j_1 \dots j_{2n}}(x; x_1, \dots, x_{2n}) \end{aligned} \quad (31)$$

должны быть УФ-конечными в ренормированной теории (12). Здесь и далее $x \equiv \{t, \mathbf{x}\}$. Это условие эквивалентно УФ-конечности произведения $(Z^{-1})_{kq} \Gamma_q^{(2n)}(x; \varphi)$ с функционалом

$$\Gamma_q^{(2n)}(x; \varphi) = \frac{1}{(2n)!} \int dx_1 \dots \int dx_{2n} \Gamma_q^{j_1 \dots j_{2n}}(x; x_1, \dots, x_{2n}) \varphi_{j_1}(x_1) \dots \varphi_{j_{2n}}(x_{2n}), \quad (32)$$

имеющим в двухпетлевом приближении диаграммное представление

$$\Gamma_q^{(2n)} = \mathcal{F}_q + \Gamma_1(\mathcal{F}_q) + \Gamma_2(\mathcal{F}_q), \quad (33)$$

$$\Gamma_1(\mathcal{F}_q) = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array}, \quad (34)$$

$D1$

$$\Gamma_2(\mathcal{F}_q) = \frac{1}{8} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \end{array}. \quad (35)$$

$D2 \quad D3 \quad D4 \quad D5$

Первое слагаемое в представлении (33) соответствует беспетлевому приближению. В петлевых вкладах (34) и (35) черному кружку сопоставляется оператор $\mathcal{F}_q$ (подробнее см. ниже), явно выделены симметричные множители, соответствующие диаграммам.

Из анализа диаграмм в (34), (35) следует, что для любого аргумента x_s в формуле (32) производная по этой координате выделяется как внешний множитель. Интегрированием по частям эта производная переносится на поле $\varphi_{j_s}(x_s)$. Таким образом, величину $\Gamma_q^{(2n)}(x; \varphi)$ в (32) можно представить как функционал тензорного поля $\partial_i \varphi_j$:

$$\Gamma_q^{(2n)}(x; \varphi) = \frac{1}{(2n)!} \int dx_1 \dots \int dx_{2n} \tilde{\Gamma}_q^{i_1 j_1 \dots i_{2n} j_{2n}}(x; x_1, \dots, x_{2n}) \times \\ \times \partial_{i_1} \varphi_{j_1}(x_1) \dots \partial_{i_{2n}} \varphi_{j_{2n}}(x_{2n}). \quad (36)$$

Диаграммы, определяющие ядро $\tilde{\Gamma}$ в формуле (36), содержат только логарифмические УФ-расходимости. Следовательно, для нахождения матрицы Z^{-1} достаточно вычислить функционал (36), сведя аргументы x_s тензорных полей $\partial_{i_s} \varphi_{j_s}(x_s)$ в одну точку x . Вводя обозначение $\partial_{i_s} \varphi_{j_s}(x_s)|_{x_s=x} \equiv m_{i_s j_s}$, с точностью до УФ-конечных вкладов получим

$$\Gamma_q^{(2n)}(x; \varphi) \simeq \frac{1}{(2n)!} \int dx_1 \dots \int dx_{2n} \tilde{\Gamma}_q^{i_1 j_1 \dots i_{2n} j_{2n}}(x; x_1, \dots, x_{2n}) m_{i_1 j_1} \dots m_{i_{2n} j_{2n}}. \quad (37)$$

Здесь интегрирование по $x_1, \dots, x_{2n}$ эквивалентно тому, что в фурье-представлении корреляционная функция вычисляется при нулевых значениях внешних импульсов.

Черный кружок с присоединенными линиями в диаграммах (34), (35) обозначает вариационную производную (см., например, [18])

$$V_{j_1 \dots j_p}(x; x_1, \dots, x_p) \equiv \frac{\delta^p \mathcal{F}_q(x)}{\delta \varphi_{j_1}(x_1) \dots \delta \varphi_{j_p}(x_p)}, \quad (38)$$

которая сворачивается по аргументам $x_1, \dots, x_p$ с полями $\varphi(x_i)$ в p линиях $\varphi \varphi'$, присоединенных к кружку. Для локальных операторов (30) величина (38) содержит произведение вида $\partial_{i_1} \delta_{ab}(x - x_1) \dots \partial_{i_p} \delta_{cd}(x - x_p)$, где использовано обозначение $\delta_{ij}(x - x') \equiv \delta(t - t') \int d\mathbf{k} P_{ij}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} / (2\pi)^2$ для дельта-функции в поперечном подпространстве. Благодаря этой дельта-функции интегрирование по $x_1, \dots, x_p$ легко производится, а производные переносятся на поля φ соответствующих присоединенных линий $\varphi \varphi'$. Включив эти производные в диаграмму, оставшийся вершинный множитель, соответствующий оператору $\mathcal{F}_q$, можно представить в виде

$$V_{i_1 j_1 \dots i_p j_p}(x) \equiv \frac{\partial^p \mathcal{F}_q(x)}{\partial m_{i_1 j_1} \dots \partial m_{i_p j_p}}. \quad (39)$$

Далее для упрощения записи мы будем опускать аргумент x и в некоторых случаях использовать числовые индексы $1, \dots, n$ вместо буквенных (например, 1 вместо i_1). При этом для индексов производных и импульсов будут использоваться нечетные

числа, а для индексов полей – четные. С помощью вершинного множителя (39) выражения для диаграмм, дающих вклад в (37), можно записать в виде

$$= V_{123456} D_{123456}^{abcdef} m_{ab} m_{cd} m_{ef} \equiv V_{123456} D_{123456}, \quad (40)$$

где для примера приведен общий вид трехлучевых диаграмм.

Обратимся теперь к получению формул для вычисления матрицы констант ренормировки Z по диаграммам. Определим матрицу $\bar{\Gamma}$ соотношением

$$\Gamma_q^{(2n)}(x; \varphi) \equiv (\Gamma)_q \equiv (\bar{\Gamma})_{qk} \mathcal{F}_k, \quad (41)$$

тогда условие УФ-конечности выражения (31) запишется в виде $\text{Div. p.}[Z^{-1} \bar{\Gamma} \mathcal{F}] = 0$, или, поскольку операторы $\mathcal{F}_q$ не зависят от ε ,

$$\text{Div. p.}[Z^{-1} \bar{\Gamma}] = 0. \quad (42)$$

В схеме МВ матрица Z имеет вид, аналогичный (13), соответствующее представление справедливо и для обратной матрицы Z^{-1} :

$$Z^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(u) \varepsilon^{-n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n c_{nk} u^k \varepsilon^{-n}. \quad (43)$$

Задача состоит в нахождении Z^{-1} из уравнения (42) в виде ряда теории возмущений

$$Z^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u^k Z_{[k]}^{-1}, \quad Z_{[k]}^{-1} \equiv \sum_{n=1}^k c_{nk} \varepsilon^{-n}, \quad (44)$$

из вычисляемого по диаграммам ряда для величины $\bar{\Gamma} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} u^k \bar{\Gamma}_{[k]}$. Подставляя этот ряд в (42) и учитывая, что в схеме МВ $\text{Div. p.}[Z^{-1}] = Z^{-1} - 1$, получим $Z^{-1} = 1 - \text{Div. p.}[Z^{-1} \sum_{l=1}^{\infty} u^l \bar{\Gamma}_{[l]}]$. Это соотношение позволяет рекуррентным образом выражать $Z_{[l]}^{-1}$ через $\bar{\Gamma}_{[l]}$. Рассматриваемому далее двухпетлевому приближению соответствуют две итерации $Z_{[1]}^{-1} = -\text{Div. p.}[\bar{\Gamma}_{[1]}]$, $Z_{[2]}^{-1} = -\text{Div. p.}[\bar{\Gamma}_{[2]} + Z_{[1]}^{-1} \bar{\Gamma}_{[1]}]$.

Матрица Z определяет матрицу аномальных размерностей γ_{Φ} семейства операторов (30): $\gamma_{\Phi} = Z^{-1} \hat{\mathcal{D}}_{\mu} Z$ (см., например, [18]). Конечность матрицы γ_{Φ} позволяет выразить ее через вычет a_1 при первом полюсе по ε в Z с помощью соотношения, совпадающего с формулой (22) для скалярного случая, или через соответствующий вычет $c_1 = -a_1$ в обратной матрице (43): $\gamma_{\Phi} = u \partial_u c_1$. По матрице аномальных размерностей в неподвижной точке γ_{Φ}^* и критической размерности поля $\Delta_{\varphi} = -1 + \varepsilon/2$ находится матрица критических размерностей Δ_{Φ} семейства операторов (30):

$$\Delta_{\Phi} = n \varepsilon I + \gamma_{\Phi}^*. \quad (45)$$

Искомые критические размерности являются собственными числами этой матрицы.

4. СТРУКТУРА МАТРИЦЫ КРИТИЧЕСКИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В этом разделе будет показано, что матрица констант ренормировки Z является треугольной на базисных операторах (30) во всех порядках теории возмущений. Таким образом, базис (30) решает проблему смешивания операторов при вычислении критических размерностей, так как в этом случае матрица критических размерностей (45) также является треугольной и ее спектр совпадает с диагональными элементами.

Величины типа D_{123456}^{abcdef} в выражении (40), вычисляемые при нулевых внешних импульсах, не зависят от координат, поэтому их зависимость от тензорных значков в рассматриваемом изотропном случае выражается в виде произведения δ -символов Кронекера. Свертка этих величин с V и m в (40) приводит с учетом формул (27) к линейным комбинациям скалярных операторов вида $\Phi_q^{(n)}$ (30) с фиксированным суммарным количеством $2n$ множителей a и s , которое совпадает с их числом в составном операторе в вершине (40). Действительно, p -кратное дифференцирование в вершинном множителе V (39) уменьшает на p число сомножителей, но оно восстанавливается за счет множителей m , свернутых с нижними хвостами диаграммы в выражении (40). Покажем, что структура хвостов такова, что в этих множителях $m = a + s$ выживает только их симметричная часть s . Рассмотрим для этого один из хвостов. С учетом того, что внешние импульсы в (40) положены равными нулю, он имеет вид

$$\propto \langle \varphi_i \varphi'_b \rangle(\mathbf{k}) m_{ab} \langle v_a v_j \rangle(\mathbf{k}), \quad (46)$$

где $\mathbf{k}$ – импульс, протекающий по линиям $\varphi\varphi'$ и vv . Поскольку обе эти линии кратны поперечным проекторам $P(\mathbf{k})$, значковая структура в (46) определяется выражением $P_{ib}(\mathbf{k}) m_{ab} P_{aj}(\mathbf{k})$, которое можно привести к виду

$$P_{ib}(\mathbf{k}) m_{ab} P_{aj}(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}) m_{ab} P_{ab}(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}) \text{tr}(SP(\mathbf{k})) = -(\hat{\mathbf{k}} S \hat{\mathbf{k}}) P_{ij}(\mathbf{k}), \quad (47)$$

если воспользоваться справедливым для двумерной системы равенством

$$P_{ib}(\mathbf{k}) P_{aj}(\mathbf{k}) = P_{ij}(\mathbf{k}) P_{ab}(\mathbf{k}) \quad (48)$$

и условием поперечности $\text{tr}(m) = \text{tr}(s) = 0$. Соотношение (47) доказывает сделанное утверждение: в рассмотренной вершине сохранилась лишь симметричная часть m ; это соотношение оказывается полезным и при конкретных расчетах. Использованное при доказательстве равенство (48) является следствием того, что в двумерной системе поперечный проектор $P(\mathbf{k})$ является в то же время продольным проектором $Q(\mathbf{k}')$ на вектор $\mathbf{k}'$, ортогональный $\mathbf{k}$. Чтобы в этом убедиться, определим вектор $\mathbf{k}'$ соотношением $k_i = \varepsilon_{ij} k'_j$. Используя тождество (29), нетрудно проверить, что

$$\hat{k}_i = \varepsilon_{ij} \hat{k}'_j, \quad \hat{k}'_i = -\varepsilon_{ij} \hat{k}_j, \quad P_{ij}(\hat{\mathbf{k}}) = \hat{k}'_i \hat{k}'_j, \quad \hat{k}_i \hat{k}_j = P_{ij}(\hat{\mathbf{k}}'), \quad \hat{k}_i \equiv \frac{k_i}{k}. \quad (49)$$

Подставив $P(\mathbf{k})$ из (49) в соотношение (48), убеждаемся в справедливости последнего.

Таким образом, в p -лучевой диаграмме каждый из p множителей m (в формуле (40)) можно заменить на его симметричную часть s . Рассмотрим теперь подробнее структуру входящего в эту формулу вершинного множителя V (39). Используя при дифференцировании базисных операторов (30) соотношения

$$\frac{\partial \text{tr}(A^2)}{\partial m_{12}} = -2a_{12}, \quad \frac{\partial \text{tr}(S^2)}{\partial m_{12}} = 2s_{12}, \quad (50)$$

закключаем, что количество симметричных (антисимметричных) множителей в вершинном множителе V (39) не превосходит их количества в исходном операторе. Как следствие, при свертке V с содержащей только симметричные множители величиной $D s \dots s$ в (40) возникает линейная комбинация операторов $\Phi_{\tilde{q}}^{(n)}$, в которой число симметричных множителей $\tilde{q} \geq q$, т.е. может только возрастать по сравнению с их числом q в исходном операторе (не превышая, конечно, полного числа сомножителей n), а именно $\tilde{q} = \{q, q+1, \dots, m\}$, где $m = \min\{n, q + \lfloor p/2 \rfloor\}$, а $\lfloor p/2 \rfloor = p/2$ для четных p и $\lfloor p/2 \rfloor = (p-1)/2$ для нечетных. При $q = n$ эта линейная комбинация состоит из единственного оператора $\Phi_n^{(n)}$ – n -й степени оператора диссипации.

Таким образом, матрица констант ренормировки Z семейства операторов $\Phi_q^{(n)}$ имеет треугольный вид во всех порядках теории возмущения, так как проведенное рассмотрение определялось количеством лучей в диаграмме, а не числом петель. Диагональные элементы Z зависят только от q – количества симметричных вкладов в операторе (но не от n). Операторы $\Phi_n^{(n)}$ – все степени оператора диссипации – ренормируются мультипликативно.

5. ОДНОПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Как показано в предыдущем разделе, однопетлевой вклад (34) представим в виде

$$\Gamma_1(\mathcal{F}_q) = D1_{1234}^{5678} s_{56} s_{78} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_q}{\partial m_{12} \partial m_{34}} \equiv D1_{1234} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_q}{\partial m_{12} \partial m_{34}}. \quad (51)$$

Здесь и далее при дифференцировании оператора $\mathcal{F}_q$ (30) с использованием соотношений (50) можно опускать слагаемые, содержащие нечетное число антисимметричных множителей a_{ij} , так как их свертка в формуле (51) обращается в нуль (напомним, что величина $D1_{1234}^{5678}$ построена из δ -символов Кронекера). Учитывая также соотношение (28), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_q}{\partial m_{12} \partial m_{34}} = & 4q(q-1)\Phi_{q-2}^{(n-2)} s_{12} s_{34} + q\Phi_{q-1}^{(n-1)} (\delta_{13}\delta_{24} + \\ & + \delta_{14}\delta_{23}) + \bar{q}(2\bar{q}-1)\Phi_q^{(n-1)} (\delta_{14}\delta_{23} - \delta_{13}\delta_{24}). \end{aligned} \quad (52)$$

Однопетлевая диаграмма (34) в подробной записи имеет вид

$$\frac{1}{2} \times \begin{array}{c} \bullet \\ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \swarrow & \searrow \\ \mathbf{k} & \mathbf{k} \\ \swarrow & \searrow \\ 5 & 6 \quad 7 & 8 \\ \text{---} & \text{---} \\ & \mathbf{k} \end{array} \end{array}. \quad (53)$$

Здесь $\mathbf{k}$ – импульс интегрирования, стрелка показывает направление его протекания, числа у вершин нумеруют составляющие импульсов и полей, присоединенных к вершине. Множитель $D1_{1234}^{5678}$ в (51), соответствующий диаграмме (53), имеет вид

$$D1_{1234}^{5678} = \frac{1}{2} \int dy \int dz \langle \partial_1 \varphi_2(x) \varphi'_6(y) \rangle_0 \langle \partial_3 \varphi_4(x) \varphi'_8(z) \rangle_0 \langle v_5(y) v_7(z) \rangle.$$

Переходя к импульсно-временному представлению, подставляя (4), (10) и выполняя интегрирование по времени, находим

$$D1_{1234}^{5678} = \frac{D_0}{4\nu_0} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{k_1 k_3}{k^2} P_{26}(\mathbf{k}) P_{48}(\mathbf{k}) P_{57}(\mathbf{k}) N(k).$$

Интегрируя по модулю $\mathbf{k}$ в пределах $L^{-1} \leq k < \infty$ с учетом (5), получаем

$$D1_{1234}^{5678} = \frac{D_0}{8\pi\nu_0} \frac{L^\varepsilon}{\varepsilon} \langle \hat{k}_1 \hat{k}_3 P_{26}(\hat{\mathbf{k}}) P_{48}(\hat{\mathbf{k}}) P_{57}(\hat{\mathbf{k}}) \rangle_\sigma, \quad \hat{\mathbf{k}} \equiv \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad (54)$$

где интегрирование по направлениям единичного вектора $\hat{\mathbf{k}}$ заменено усреднением: $\int \dots d\hat{\mathbf{k}}/(2\pi) = \langle \dots \rangle_\sigma$. Используя (47), из формулы (54) находим

$$D1_{1234} = D1_{1234}^{5678} m_{56} m_{78} = \frac{D_0}{8\pi\nu_0} \frac{L^\varepsilon}{\varepsilon} \langle (\hat{\mathbf{k}} S \hat{\mathbf{k}})^2 \hat{k}_1 \hat{k}_3 P_{24}(\hat{\mathbf{k}}) \rangle_\sigma. \quad (55)$$

Вследствие изотропии задачи для угловых средних справедливо соотношение

$$\langle \hat{k}_{i_1} \dots \hat{k}_{i_m} \rangle_\sigma = \frac{(\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2m-1} i_{2m}} + \text{все возможные перестановки})}{2^m m!}, \quad (56)$$

позволяющее вычислить правую часть (55), а также средние от степеней $(\hat{\mathbf{k}} S \hat{\mathbf{k}})^n$:

$$64 \langle (\hat{\mathbf{k}} S \hat{\mathbf{k}})^2 \hat{k}_1 \hat{k}_3 P_{24}(\mathbf{k}) \rangle_\sigma = 3(3\delta_{13}\delta_{24} - \delta_{12}\delta_{34} - \delta_{14}\delta_{23}) \text{tr}(S^2) + \\ + 4(s_{13}s_{24} - s_{12}s_{34} - s_{14}s_{23}), \quad (57)$$

$$\langle (\hat{\mathbf{k}} S \hat{\mathbf{k}})^2 \rangle_\sigma = \frac{\text{tr}(S^2)}{4}, \quad \langle (\hat{\mathbf{k}} S \hat{\mathbf{k}})^4 \rangle_\sigma = \frac{3\text{tr}(S^2)^2}{32}, \quad \langle (\hat{\mathbf{k}} S \hat{\mathbf{k}})^6 \rangle_\sigma = \frac{5\text{tr}(S^2)^3}{128}. \quad (58)$$

Соотношение (57) будет использовано при расчете двухпетлевой диаграммы $D2$, для однопетлевого вклада (51) окончательный ответ легче получить, свернув величины (52), (55) и воспользовавшись соотношениями (58). Выражая результат через ренормированные параметры (11), имеем

$$\Gamma_1(\mathcal{F}_q) = \frac{u}{Z_\nu} \frac{(\mu L)^\varepsilon}{\varepsilon} (\mathcal{A}\mathcal{F})_q, \quad (\mathcal{A}\mathcal{F})_q = \mathcal{A}_{qk} \mathcal{F}_k = \frac{q(q+1)\mathcal{F}_q}{2} - \bar{q}(2\bar{q}-1)\mathcal{F}_{q+1}. \quad (59)$$

Подставляя $Z_\nu = 1 - u/\varepsilon$ и удерживая с необходимой для дальнейшего точностью вклады до u^2 включительно, приходим к окончательному однопетлевому результату:

$$\Gamma_1(\mathcal{F}_q) = u(\bar{\Gamma}_{[1]}\mathcal{F})_q + u^2(\delta\bar{\Gamma}_{[2]}\mathcal{F})_q + O(u^3), \quad (60)$$

$$\bar{\Gamma}_{[1]} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln(\mu L)\right)\mathcal{A} + O(\varepsilon), \quad \delta\bar{\Gamma}_{[2]} = \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\ln(\mu L)}{\varepsilon}\right)\mathcal{A} + O(\varepsilon^0), \quad (61)$$

где $\bar{\Gamma}_{[1]}$ – первый член разложения матрицы $\bar{\Gamma}$ из (41), $\delta\bar{\Gamma}_{[2]}$ – однопетлевой вклад во второй член этого разложения.

6. ДВУХПЕТЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Диаграмма $D2$ определяется сверткой двух диаграмм $D1$ из формулы (55) и четвертой производной составного оператора $\mathcal{F}_q$; с учетом симметричных множителей $1/2$ в $D1$ и $1/8$ в $D2$ имеем $D2(\mathcal{F}_q) = (1/2)D1_{1234}D1_{5678}\partial^4\mathcal{F}_q/\partial m_{12}\partial m_{34}\partial m_{56}\partial m_{78}$. Используя соотношения (30), (50), (55) и (57), нетрудно получить

$$D2(\mathcal{F}_q) = \frac{u^2(\mu L)^{2\varepsilon}}{\varepsilon^2} [q(q^3 + 2q - 3)\mathcal{F}_q + 4\bar{q}(2\bar{q} - 1)\{-q(q+1)\mathcal{F}_{q+1} + (2\bar{q}^2 - 5\bar{q} + 3)\mathcal{F}_{q+2}\}]. \quad (62)$$

Здесь и в дальнейшем окончательные ответы выражаются через ренормированные переменные (11), при этом константа Z_ν с необходимой точностью заменяется на единицу.

Диаграмма $D3$ в подробной записи имеет вид

(63)

Согласно тождеству (15) собственно-энергетическая вставка в линию кратна проектору $P(\mathbf{k})$, как и оба пропагатора в этой линии, так что в целом линия кратна проектору $P_{26}(\mathbf{k})$. Таким образом, значковая структура диаграммы (63) совпадает со значковой структурой однопетлевой диаграммы (53). Используя формулы (4), (10), (18) и выполняя интегрирование по времени, получаем $D3(\mathcal{F}_q) = D3_{1234}\partial^2\mathcal{F}_q/\partial m_{12}\partial m_{34}$, где

$$D3_{1234} = \frac{D_0^2 L^\varepsilon}{32\pi^2 \nu_0^2} \int dk N(k) \sigma(kL) \langle (\hat{\mathbf{k}} S \hat{\mathbf{k}})^2 \hat{k}_1 \hat{k}_3 P_{24}(\mathbf{k}) \rangle_\sigma.$$

Подстановка выражения (19) и выделение полюсных вкладов в интеграле по $k = |\mathbf{k}|$ дают

$$D3_{1234} = u^2(\mu L)^{2\varepsilon} \left(\frac{3}{2\varepsilon} - \frac{10}{\varepsilon^2} \right) \langle (\hat{\mathbf{k}} S \hat{\mathbf{k}})^2 \hat{k}_1 \hat{k}_3 P_{24}(\mathbf{k}) \rangle_\sigma.$$

Используя соотношение (57) и сворачивая результат с (52), окончательно получаем

$$D3(\mathcal{F}_q) = u^2(\mu L)^{2\varepsilon} \left(\frac{3}{2\varepsilon} - \frac{10}{\varepsilon^2} \right) \left[\frac{q(q+1)\mathcal{F}_q}{8} - \frac{\bar{q}(2\bar{q}-1)\mathcal{F}_{q+1}}{4} \right]. \quad (64)$$

Диаграмма $D4$ в подробной записи имеет вид

$$\frac{1}{2} \times \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathbf{k} + \mathbf{q} & & \mathbf{k} + \mathbf{q} \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 7 & 8 \\ \mathbf{k} & & \mathbf{q} & & \mathbf{k} \end{array} \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{ccc} 9 & 10 & 11 & 12 \\ & \mathbf{k} & & \end{array} \end{array} \end{array} \quad (65)$$

Интегрируя по времени выражение, соответствующее диаграмме (65), и используя соотношение (47), получаем

$$D4(\mathcal{F}_q) = D4_{1234} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_q}{\partial m_{12} \partial m_{34}}, \quad (66)$$

$$D4_{1234} = \frac{D_0^2}{8\nu_0^2(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} N(k)N(q) Q_{13}(\mathbf{p})P_{26}(\mathbf{p})P_{48}(\mathbf{p}) \times \\ \times Q_{57}(\mathbf{k})P_{57}(\mathbf{q})P_{68}(\mathbf{k})(\hat{\mathbf{k}}S\hat{\mathbf{k}})^2,$$

где $Q_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \hat{k}_i \hat{k}_j$, $\mathbf{p} \equiv \mathbf{k} + \mathbf{q}$. Сворачивая значки и вводя $\cos \theta \equiv (\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{q}})$, находим

$$D4_{1234} = \frac{D_0^2}{8\nu_0^2(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} N(k)N(q) Q_{13}(\mathbf{p})P_{24}(\mathbf{p})(\hat{\mathbf{k}}S\hat{\mathbf{k}})^2 \sin^2 \theta \frac{(k + q \cos \theta)^2}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2}.$$

Свертка $D4_{1234}$ со значковыми структурами из выражения (52) дает

$$D4_{1234}\delta_{14}\delta_{23} = 0, \quad D4_{1234}\delta_{13}\delta_{24} = I_1, \quad D4_{1234}s_{12}s_{34} = \frac{I_1 \text{tr}(S^2)}{2} - I_2, \quad (67)$$

где введены обозначения

$$I_1 = \frac{D_0^2}{8\nu_0^2(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} N(k)N(q) (\hat{\mathbf{k}}S\hat{\mathbf{k}})^2 \sin^2 \theta \frac{(k + q \cos \theta)^2}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2}, \quad (68)$$

$$I_2 = \frac{D_0^2}{8\nu_0^2(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{q} N(k)N(q) (\hat{\mathbf{k}}S\hat{\mathbf{k}})^2 \sin^2 \theta \frac{(k + q \cos \theta)^2}{|\mathbf{k} + \mathbf{q}|^2} \text{tr}(Q(\mathbf{k} + \mathbf{q})S)^2. \quad (69)$$

Величины (68) и (69) получаются в результате свертки четырех тензоров S с восьмизначковыми тензорами, составленными из δ -символов Кронекера; последние определяются соответствующими четырехкратными интегралами (в диаграмме $D5$ в аналогичных выражениях шесть тензоров S сворачиваются с 12-значковыми тензорами). В аналогичных расчетах многозначковых тензорных структур в работах [4], [10], посвященных нахождению аномальных показателей для скалярной примеси, использовалось разложение этих структур по системе базисных тензоров, и вычисления сводились к нахождению скалярных коэффициентов разложения. В изучаемой модели векторной примеси такая процедура становится очень громоздкой, поэтому мы применим другой технический прием, используя специфику двумерной задачи.

Подынтегральные выражения в формулах (68), (69), рассматриваемые как функции модулей k , q и ориентаций единичных векторов $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{q}}$, представимы в виде суммы слагаемых вида $\hat{k}_1 \hat{k}_2 \dots \hat{q}_3 \hat{q}_4 \dots F(k, q, \theta)$, свернутых с s_{ij} , где θ — угол между

$\hat{\mathbf{k}}$ и $\hat{\mathbf{q}}$. Раскладывая вектор $\mathbf{q}$ по ортонормированному базису $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}'$ из (49) как $\mathbf{q} = q \cos \theta \hat{\mathbf{k}} + q \sin \theta \hat{\mathbf{k}}'$, после замены $\hat{k}'_i = -\varepsilon_{ij} \hat{k}_j$ эти выражения можно переписать в виде суммы слагаемых вида $\hat{k}_1 \hat{k}_2 \hat{k}_3 \hat{k}_4 \dots \tilde{F}(k, q, \theta)$, свернутых с s_{ij} и ε_{ij} . В такой форме записи зависимость от $\hat{\mathbf{q}}$ сохраняется только в функции $\tilde{F}(k, q, \theta)$, а результат интегрирования $\int d\hat{\mathbf{q}} \tilde{F}(k, q, \theta)$ не зависит от ориентации вектора $\hat{\mathbf{k}}$, последующее усреднение по которой легко выполняется с помощью соотношения (56). Доказанная факторизация интегралов по $\hat{\mathbf{k}}$ и $\hat{\mathbf{q}}$ в переменных $(k, q, \hat{\mathbf{k}}, \theta)$ позволяет свести интегрирование в формулах (68), (69) к усреднению по $\hat{\mathbf{k}}$, которое можно выполнить с помощью соотношений (58), и последующему интегрированию по θ .

При расчете интеграла (68) ситуация облегчается из-за отсутствия в подынтегральном выражении множителей $\hat{q}_i$, поэтому можно сразу выполнить усреднение по $\hat{k}$, воспользовавшись (58):

$$I_1 = \frac{D_0^2 \text{tr}(S^2)}{32\nu_0^2(2\pi)^3} \int dk \int dq N(k)N(q) \int_0^{2\pi} d\theta \frac{(k + q \cos \theta)^2 \sin^2 \theta}{k^2 + 2kq \cos \theta + q^2}.$$

Интегрируя далее по θ и подставляя $N(k) = k^{-2-\varepsilon} \Theta(kL - 1)$, находим

$$I_1 = \frac{D_0^2 \text{tr}(S^2)}{32\nu_0^2(2\pi)^2} \int_{1/L}^{\infty} dk \int_{1/L}^{\infty} dq \frac{k^8 - 2k^6 q^2 + 10k^4 q^4 - 2k^2 q^6 + q^8 - |k^2 - q^2|^3 (k^2 + q^2)}{32k^{6+\varepsilon} q^{6+\varepsilon}}. \quad (70)$$

Выделяя полюсные по ε вклады и переходя к ренормированным переменным, получаем

$$I_1 = u^2(\mu L)^{2\varepsilon} \text{tr}(S^2) \left(\frac{5}{2\varepsilon^2} - \frac{3}{8\varepsilon} \right). \quad (71)$$

Для расчета интеграла (69) воспользуемся (49) и запишем $\mathbf{p} \equiv \mathbf{k} + \mathbf{q} = a\hat{\mathbf{k}} + a'\hat{\mathbf{k}}'$, где $a = k + q \cos \theta$, $a' = q \sin \theta$. Тогда выражение $\text{tr}(Q(\mathbf{p})S)^2 = (\mathbf{p}S\mathbf{p})^2/|\mathbf{p}|^4$ из (69) в переменных $(k, q, \theta, \hat{\mathbf{k}})$ примет вид

$$(\mathbf{p}S\mathbf{p})^2 = (a^4 + a'^4 - 6a^2 a'^2)(\hat{\mathbf{k}}S\hat{\mathbf{k}})^2 + 2a^2 a'^2 \text{tr}(S^2) + 4aa'(a^2 - a'^2)(\hat{\mathbf{k}}S\hat{\mathbf{k}})(\hat{\mathbf{k}}S\hat{\mathbf{k}}'), \quad (72)$$

где мы воспользовались определением $\hat{k}'$ (49) и соотношением (29). Интеграл по θ от последнего слагаемого равен нулю, так как содержит нечетную степень $\sin \theta$. Усреднение (69) по ориентациям $\hat{\mathbf{k}}$ с учетом выражения (72) дает

$$I_2 = \frac{\text{tr}(S^2)^2 D_0^2}{256\nu_0^2(2\pi)^3} \int dk \int dq N(k)N(q) \int d\theta (3a^4 + 3a'^4 - 2a^2 a'^2) \frac{(k + q \cos \theta)^2 \sin^2 \theta}{(k^2 + 2kq \cos \theta + q^2)^3}.$$

Подставляя в это выражение (5), выделяя при интегрировании полюсные вклады и переходя к ренормированным переменным, находим

$$I_2 = u^2(\mu L)^{2\varepsilon} \text{tr}(S^2)^2 \left(\frac{27}{32\varepsilon^2} - \frac{127}{256\varepsilon} \right). \quad (73)$$

Сворачивая в выражении (66) вершинный множитель (52) и $D4_{1234}$ при помощи (67), с учетом формул (71) и (73) получаем

$$D4(\mathcal{F}_q) = u^2(\mu L)^{2\varepsilon} \left[\left(\frac{13q^2 + 7q}{4\varepsilon^2} + \frac{79q^2 - 103q}{32\varepsilon} \right) \mathcal{F}_q + \bar{q}(2\bar{q} - 1) \left(\frac{3}{4\varepsilon} - \frac{5}{\varepsilon^2} \right) \mathcal{F}_{q+1} \right]. \quad (74)$$

Вычисление диаграммы $D5$ аналогично изложенному для $D4$, но более громоздко, поэтому приведем только окончательный результат:

$$D5(\mathcal{F}_q) = u^2(\mu L)^{2\varepsilon} \left[\left(\frac{q-2}{4\varepsilon^2} + \frac{\alpha_1 q + \alpha_2}{\varepsilon} \right) q(q-1)\mathcal{F}_q + \left(\frac{\alpha_3}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon^2} \right) q\bar{q}(2\bar{q}-1)\mathcal{F}_{q+1} \right], \quad (75)$$

где $\alpha_1 = [305 - 1092 \ln(4/3)]/32 \approx -0.285901$, $\alpha_2 = 20[1 - 6 \ln(4/3)]/32 \approx -0.453808$, $\alpha_3 = 5[71 - 270 \ln(4/3)]/24 \approx -1.39045$.

7. МАТРИЦА КРИТИЧЕСКИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Подставляя в формулу (35) результаты вычисления диаграмм в двухпетлевом приближении (62), (64), (74) и (75), получим

$$\Gamma_2(\mathcal{F}_q) = u^2(\mu L)^{2\varepsilon} \left(\frac{\mathcal{B}_1}{\varepsilon} + \frac{\mathcal{B}_2}{\varepsilon^2} \right)_{qk} \mathcal{F}_k + O(u^3), \quad (76)$$

$$(\mathcal{B}_1)_{qk} \mathcal{F}_k = (q-1)q \left(\alpha_1 q + \alpha_2 + \frac{91}{64} \right) \mathcal{F}_q + \alpha_3(2\bar{q}-1)\bar{q}q\mathcal{F}_{q+1}, \quad (77)$$

$$(\mathcal{B}_2)_{qk} \mathcal{F}_k = \frac{1}{8}(q-1)q(q+1)(q+2)\mathcal{F}_q - \frac{1}{2}(2\bar{q}-1)\bar{q}[q(q+2)\mathcal{F}_{q+1} + (2\bar{q}-3)(\bar{q}-1)\mathcal{F}_{q+2}], \quad (78)$$

где α_i те же, что и в выражении (75). Суммируя двухпетлевой (76) и однопетлевой (60) вклады, находим второй член разложения матрицы $\bar{\Gamma}$ из (41):

$$\bar{\Gamma}_{[2]} = \frac{\mathcal{B}_1}{\varepsilon} + \frac{(\mathcal{A} + \mathcal{B}_2)}{\varepsilon^2} + \frac{(\mathcal{A} + \mathcal{B}_2) \ln(\mu L)}{\varepsilon} + O(\varepsilon^0). \quad (79)$$

Из формул (61), (79) для коэффициентов разложения (44) получаем

$$c_{11} = -\mathcal{A}, \quad c_{21} = -\mathcal{B}_1, \quad c_{22} = -(\mathcal{A} + \mathcal{B}_2 - \mathcal{A}^2) = \mathcal{B}_2. \quad (80)$$

При выводе соотношений (80) вклады, содержащие $\ln(\mu L)$, в выражениях (61), (79) тождественно сократились ($2\mathcal{B}_2 + \mathcal{A} - \mathcal{A}^2 = 0$) – это следствие ренормируемости теории.

Для матрицы аномальных размерностей $\gamma_\Phi = u\partial_u c_1$ в неподвижной точке $u_* = \varepsilon$ из (80) приходим к выражению

$$\gamma_\Phi^* = -u_* c_{11} - 2u_*^2 c_{21} = \varepsilon \mathcal{A} + 2\varepsilon^2 \mathcal{B}_1. \quad (81)$$

Подставляя его в выражение (45), находим матрицу критических размерностей

$$\Delta_\Phi^{(n)} = n\varepsilon I + \varepsilon \mathcal{A} + 2\varepsilon^2 \mathcal{B}_1.$$

Вследствие треугольности этой матрицы искомые критические размерности – ее собственные числа $\Delta_q^{(n)}$ – равны соответствующим диагональным элементам:

$$\Delta_q^{(n)} = \varepsilon \left[n - \frac{q(q+1)}{2} \right] - \varepsilon^2 2(q-1)q \left(\alpha_1 q + \alpha_2 + \frac{91}{64} \right) + O(\varepsilon^3), \quad 0 \leq q \leq n. \quad (82)$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из известных в настоящее время упрощенных векторных моделей рассмотренная модель технически наиболее близка к модели НС реальной турбулентности. Отмеченные во введении сложности (ренормировка со смешиванием, отсутствие наиболее опасного оператора) не позволили до сих пор обосновать аномальный скейлинг в модели НС методами РГ и ОР и вычислить соответствующие аномальные показатели. В векторной модели Крейчнана это удастся сделать, используя найденные критические размерности (82).

Согласно разложению (24) главный вклад в асимптотику структурных функций $S_{2n}(r)$ определяется составным оператором с минимальной критической размерностью. Из формулы (82) следует, что в совокупности критических размерностей $\Delta_q^{(n)}$ семейства операторов $\Phi_q^{(n)}$ (30) минимальное значение отвечает случаю $q = n$, причем $\Delta_n^{(n)} < 0$, т.е. соответствующий оператор является опасным. Этим оператором является n -я степень оператора диссипации. Критические размерности $\Delta_n^{(n)}$ монотонно убывают с ростом n ; таким образом, в целом в теории нет самого опасного оператора. Решающим упрощением в модели Крейчнана, дающим возможность нахождения аномальных размерностей ξ_n , является то, что в разложение (24) структурной функции S_{2n} вклад дает лишь конечное число операторов – те, в которых число полей не превосходит $2n$ [7]. Среди них уже есть наиболее опасный, его размерность и определяет значение показателя аномального скейлинга $\xi_{2n} = -\Delta_n^{(n)}$. Таким образом, из формул (24), (82) для аномальных показателей в рассмотренной двумерной модели находим

$$S_{2n}(r) \sim r^{n(2-\varepsilon)} \left(\frac{r}{L} \right)^{-\xi_{2n}}, \quad (83)$$

$$\xi_{2n} = \frac{\varepsilon(n-1)n}{2} - \varepsilon^2(n-1)n(0.571801n - 1.93613) + O(\varepsilon^3). \quad (84)$$

Приведем для сравнения соответствующий показатель для модели переноса скалярной пассивной примеси при $d = 2$ [4], [5]:

$$\xi_{2n} = \frac{\varepsilon(n-1)n}{2} - \varepsilon^2(n-1)n(0.001624n - 0.11904) + O(\varepsilon^3). \quad (85)$$

Первые члены разложений (84) и (85) в векторной и скалярной моделях совпадают. В работе [17], где был вычислен первый вклад в (84), использовалась возможность сведения теории двумерного поперечного векторного поля к теории скалярного поля, поэтому могло создаться впечатление, что это совпадение не случайно. Для расчета второго порядка разложения технически более выгодной оказалась исходная векторная формулировка. Найденная двухпетлевая поправка (84) отличается от поправки в скалярном случае (85); коэффициенты в ней, в отличие от (85), не являются малыми.

Общей чертой моделей переноса скалярной и векторной примеси при $d = 2$ оказалось то, что аномальный скейлинг в них определяется оператором локальной диссипации энергии в согласии с представлениями феноменологических теорий [1]. Этот

факт, полученный в работе [17] в однопетлевом приближении, обоснован в настоящей работе во всех порядках теории возмущений. В то же время известно, что в трехмерных системах он не имеет места уже в низшем приближении [14]. В этом отношении предсказания модели Крейчнана переноса векторной примеси лучше всего отвечают взглядам феноменологических теорий именно в рассмотренном случае двумерных течений.

Благодарности. Благодарим за финансовую поддержку РФФИ (грант № 05-02-17524), правительство Санкт-Петербурга (гранты №№ PD05-1.2-78, PD04-1.2-154), а также Совет скандинавских стран (грант № FIN-20/2003).

Список литературы

- [1] А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Т. 2. СПб.: Гидрометеорологическое издательство, 1996; У. Фриш. Турбулентность. Наследие Колмогорова. М.: Фазис, 1998.
- [2] S. Grossman, E. Schnedler. Z. Phys. B. 1977. V. 26. P. 307.
- [3] E. Levich. Phys. Lett. A. 1980. V. 79. P. 171; G. Falkovich, K. Gawędzki, M. Vergassola. Rev. Mod. Phys. 2001. V. 73. P. 913.
- [4] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev. Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 1823.
- [5] Л. Ц. Аджемьян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев. ТМФ. 1999. Т. 120. С. 1074.
- [6] R. H. Kraichnan. Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 945; Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 1016; 1997. V. 78. P. 4922; А. П. Казанцев. ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 1806.
- [7] K. Gawędzki, A. Kupiainen. Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 3834; D. Bernard, K. Gawędzki, A. Kupiainen. Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 2564.
- [8] M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev. Phys. Rev. E. 1995. V. 52. P. 4924; M. Chertkov, G. Falkovich. Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 2706.
- [9] E. Balkovsky, M. Chertkov, I. Kolokolov, V. Lebedev. Письма в ЖЭТФ. 1995. Т. 61. № 11–12. С. 1012; *chao-dyn/9508002*; A. Pumir. Europhys. Lett. 1996. V. 34. P. 25; Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 2914; B. I. Shraiman, E. D. Siggia. Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 2463; A. Pumir, B. I. Shraiman, E. D. Siggia. Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. R1263.
- [10] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov, Yu. S. Kabrits, A. N. Vasil'ev. Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. R025303; V. 64. P. 019901.
- [11] K. Gawędzki. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 1997. V. 58. P. 123; Turbulence under a magnifying glass. In: Quantum Fields and Quantum Space Time (Summer School, Cargese, Corsica, France, July 22 – August 3, 1996). ASI Ser., Ser. B. Phys. V. 364. Eds. G. 't Hooft, A. Jaffe, G. Mack, P. K. Mitter, R. Stora. N.Y.: Plenum, 1997. P. 123; *chao-dyn/9610003*.
- [12] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov. Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 7381.
- [13] N. V. Antonov. Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 6691; L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, J. Honkonen. Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 036313.
- [14] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. V. Runov. Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 046310.
- [15] I. Arad, I. Procaccia. Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 056302.
- [16] K. Yoshida, Y. Kaneda. Phys. Rev. E. 2000. V. 63. P. 016308; С. В. Новиков. Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4. 2002. № 4 (25). С. 77.
- [17] С. В. Новиков. ТМФ. 2003. Т. 136. № 1. С. 52.
- [18] А. Н. Васильев. Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамики. С.-Пб.: Изд. ПИЯФ, 1998.

Поступила в редакцию 1.V.2005 г.