Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Григорьев, В. Б. Приезжев, Случайное блуждание аннигилирующих частиц по кольцу, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 3, 488–498

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2049>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:10:38

© 2006 г. С. Ю. Григорьев^{*,†}, В. Б. Приезжев^{*}

СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ АННИГИЛИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ ПО КОЛЬЦУ

Получена формула для вероятности перехода произвольного числа аннигилирующих частиц, блуждающих по одномерной решетке в форме кольца, из начальных координат в конечные за произвольное число шагов дискретного времени.

Ключевые слова: случайное блуждание, аннигилирующие частицы, свободные фермионы, вероятность выживания, вероятность встречи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Случайное блуждание аннигилирующих частиц по одномерной решетке – хорошо известная задача математической физики и комбинаторики. Впервые она подробно была рассмотрена Фишером [1], который назвал ее проблемой “vicious walkers”, поскольку процесс заканчивается при первой же встрече любой пары блуждающих частиц. Фишер нашел выражение для вероятности достижения конечного состояния p частиц за M шагов на бесконечной прямой, если известно начальное расположение частиц. Решение оказалось полезным для математической интерпретации явлений смачивания, плавления и фазового перехода из соизмеримой в несоизмеримую фазу [2].

Практически одновременно и независимо эта задача возникла в математической литературе после появления статьи Гесселя и Вьенно [3] о детерминантном представлении числа непересекающихся траекторий и его связи с числом таблиц Юнга [4]. Вероятностные и комбинаторные исследования задачи об аннигилирующих частицах продолжались независимо вплоть до 1999 г., когда Брак, Овчарек и Эссам [5] объединили оба подхода в рамках свободнофермионного сектора шестивершинной решеточной модели.

Все перечисленные работы касались случайного блуждания аннигилирующих частиц на бесконечной прямой или полупрямой. В то же время представляет интерес

^{*}Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: grigor@theor.jinr.ru; priezzvb@thsun1.jinr.ru

[†]Московский физико-технический институт, Москва, Россия

система частиц на замкнутом кольце, так как в этом случае плотность числа частиц не равна нулю и частицы продолжают взаимодействовать друг с другом даже в пределе больших времен. В терминах теории интегрируемых моделей [6] эта задача относится к классу “свободных фермионов”, поэтому ее трансфер-матрица легко диагонализируется, после чего переходная вероятность из любого начального в любое конечное состояние на кольце может быть вычислена в принципе с помощью спектральной теоремы [7] или метода дефектных матриц [8]. Однако эти вычисления никогда не были проведены из-за исключительно громоздких выкладок. Цель данной работы – показать, что эти трудности можно обойти с помощью довольно простого приема и получить замкнутое детерминантное выражение для произвольных начальных и конечных состояний p частиц на кольце конечного размера.

2. СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ ПО ПРЯМОЙ

Рассмотрим одномерную решетку в виде кольца. Припишем каждому из L узлов решетки координаты от 0 до $L - 1$. Поместим на решетку p ($p < L$) частиц так, что в один узел попадет не более одной частицы. В течение фиксированного интервала времени каждая частица движется с вероятностью ω_{+1} направо и с вероятностью ω_{-1} налево. Если частицы встречаются в одном узле, они аннигилируют. Чтобы избежать встречи частиц между узлами (когда две частицы на соседних узлах делают шаг навстречу друг другу), будем считать, что в начальный момент времени все частицы находятся в узлах с координатами одинаковой четности. Полное число узлов L должно быть тоже четным. Нас интересует выражение для вероятности того, что частицы перейдут из начальных координат $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$ в конечные координаты $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, не встретившись ни разу.

Для удобства изложения мы начнем с вывода известного результата Фишера [1], затем перенесем рассуждения на кольцо. Рассмотрим p частиц на прямой. Пусть начальные координаты частиц четные и равны $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$, и пусть частицы делают M шагов каждая, переходя в координаты $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ – все четные либо все нечетные в зависимости от M . Вероятность того, что одна частица на прямой сделает M шагов, из них n шагов направо, дается формулой биномиального распределения [9]:

$$Q_M(x | x_0) = \binom{M}{n} \omega_{-1}^{M-n} \omega_{+1}^n. \quad (1)$$

Если x_0 – начальная координата частицы, а x – конечная, то число шагов вправо равно

$$n = \frac{x - x_0 + M}{2}. \quad (2)$$

Доопределим функцию $Q_M(x | x_0)$ для всех x :

$$Q_M(x | x_0) = 0 \quad (3)$$

при $|x - x_0| > M$. Для p частиц справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1 (Фишер, 1984 г.). Вероятность того, что частицы на прямой перейдут из состояния $\vec{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0)$ в $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, ни разу не встретившись, выражается формулой

$$P_M(x_1, \dots, x_p | x_1^0, \dots, x_p^0) = \det \mathbf{Q}_M, \quad (4)$$

где $\mathbf{Q}_M$ – $(p \times p)$ -матрица с элементами $[\mathbf{Q}_M]_{ij} = Q_M(x_i | x_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим первый шаг всех частиц, $M = 1$. Условие (3) запишем в виде

$$Q_1(x_j | x_i^0) = 0 \quad (5)$$

при $|x_i^0 - x_j| > M = 1$.

Так как в начальный момент времени все частицы находятся в четных узлах и разность координат двух частиц больше единицы, то вследствие условия (5) либо $Q_1(x_{i+1} | x_i^0) = 0$, либо $Q_1(x_i | x_{i+1}^0) = 0$ для любых $i = 1, \dots, p-1$. Следовательно, детерминантное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} \det \mathbf{Q}_M = & \begin{vmatrix} Q_1(x_1 | x_1^0) & Q_1(x_2 | x_1^0) & 0 & \dots & 0 \\ Q_1(x_1 | x_2^0) & Q_1(x_2 | x_2^0) & Q_1(x_3 | x_2^0) & \dots & 0 \\ 0 & Q_1(x_2 | x_3^0) & Q_1(x_3 | x_3^0) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Q_1(x_3 | x_3^0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_1(x_p | x_{p-1}^0) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_1(x_p | x_p^0) \end{vmatrix} = \\ & = \prod_{k=1}^{k=p} Q_1(x_k | x_k^0) = P_1(x_1, \dots, x_p | x_1^0, \dots, x_p^0). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, формула (4) верна для первого шага. Пусть она верна для первых M шагов; докажем, что эта формула выполняется и для $(M+1)$ -го шага. Для одной частицы имеем

$$Q_{M+1}(x_j | x_i^0) = \sum_{s_j=x_j-1, x_j+1} Q_M(s_j | x_i^0) Q_1(x_j | s_j), \quad (7)$$

для p частиц –

$$P_{M+1}(\vec{x} | \vec{x}_0) = \sum_{\vec{s}} P_M(\vec{s} | \vec{x}_0) P_1(\vec{x} | \vec{s}), \quad (8)$$

где $\vec{s}$ – все возможные координаты p частиц после M шагов.

Используя свойства (7), (8), найдем вероятность $P_{M+1}(\vec{x} | \vec{x}_0)$ для $(M+1)$ -го шага:

$$\begin{aligned} P_{M+1}(\vec{x} | \vec{x}_0) &= \sum_{s_1} \dots \sum_{s_p} P_M(\vec{s} | \vec{x}_0) P_1(\vec{x} | \vec{s}) = \\ &= \sum_{s_1=x_1 \pm 1} \dots \sum_{s_p=x_p \pm 1} \det \begin{pmatrix} Q_M(s_1 | x_1^0) & \dots & Q_M(s_p | x_1^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_M(s_1 | x_p^0) & \dots & Q_M(s_p | x_p^0) \end{pmatrix} P_1(\vec{x} | \vec{s}). \end{aligned} \quad (9)$$

При переходе к последнему равенству мы учли тот факт, что $\det \mathbf{Q}_M$ обращается в нуль при совпадении координат s_i и s_j двух любых частиц.

Продолжая равенство (9), получим

$$P_{M+1}(\vec{x} | \vec{x}_0) = \sum_{s_1=x_1 \pm 1} \cdots \sum_{s_p=x_p \pm 1} \det \begin{pmatrix} Q_M(s_1 | x_1^0) & \cdots & Q_M(x_p | s_1^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_M(x_1 | s_p^0) & \cdots & Q_M(x_p | s_p^0) \end{pmatrix} Q_1(x_1 | s_1^0) \cdots Q_1(x_p | x_p^0).$$

Последнее выражение легко преобразуется к детерминантному виду:

$$\begin{aligned} & \sum_{s_1=x_1 \pm 1} \cdots \sum_{s_p=x_p \pm 1} \det \begin{pmatrix} Q_M(s_1 | x_1^0)Q_1(x_1 | s_1) & \cdots & Q_M(s_p | x_1^0)Q_1(x_p | s_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_M(s_1 | x_p^0)Q_1(x_1 | s_1) & \cdots & Q_M(s_p | x_p^0)Q_1(x_p | s_p) \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} \sum_{s_1=x_1 \pm 1} Q_M(s_1 | x_1^0)Q_1(x_1 | s_1) & \cdots & \sum_{s_p=x_p \pm 1} Q_M(s_p | x_1^0)Q_1(x_p | s_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{s_1=x_1 \pm 1} Q_M(s_1 | x_p^0)Q_1(x_1 | s_1) & \cdots & \sum_{s_p=x_p \pm 1} Q_M(s_p | x_p^0)Q_1(x_p | s_p) \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} Q_{M+1}(x_1 | x_1^0) & \cdots & Q_{M+1}(x_p | x_1^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M+1}(x_1 | x_p^0) & \cdots & Q_{M+1}(x_p | x_p^0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Итак, мы видим, что выражение (4) верно для $(M+1)$ -го шага. Теорема 1 доказана.

3. СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ ПО КОЛЬЦУ

Идея нахождения выражения для искомой вероятности на кольце заключается в сведении задачи к рассмотренной выше задаче на прямой. Пусть кольцо имеет координаты от 0 до $L-1$. Разрежем кольцо между координатами 0 и $L-1$, превратив его в отрезок, и размножим эти отрезки. Изначально частицы находятся на одном отрезке, которому мы припишем индекс $\eta = 0$. Слева будем последовательно присоединять другие отрезки, приписывая им индексы $\eta = -1, \eta = -2, \dots$. Аналогично справа будем последовательно присоединять отрезки с индексами $\eta = +1, \eta = +2, \dots$. Далее сопоставим координаты “склеенных” отрезков координатам прямой:

$$x = a + L\eta, \quad (11)$$

где x – целочисленная координата на прямой, a – целочисленная координата на кольце, η – индекс отрезка (сектора), L – период кольца. Пусть изначально все частицы находятся в точках кольца с координатами $(a_1^0, a_2^0, \dots, a_p^0)$, и нас интересует $P_M(\vec{a} | \vec{a}_0)$ – условная вероятность того, что они перейдут за M шагов в точки кольца $(a_1, a_2, \dots, a_p)$, ни разу не встретившись. В задаче на кольце нужно учесть следующие отличия от задачи на прямой: во-первых, то, что при смене секторов

происходит переупорядочение частиц (например, если первая частица сменила сектор, двигаясь влево, то она в итоге стала последней, вторая частица стала первой, и т.д. до последней частицы, которая стала предпоследней); во-вторых, нужно учесть появление дополнительных непересекающихся траекторий частиц; в-третьих, появляются дополнительные возможности встречи частиц. В первом случае делается поправка на знак в разложении детерминанта, а во втором и в третьем случаях происходит суммирование по секторам. Итак, сформулируем сказанное выше более формально.

ТЕОРЕМА 2. *Вероятность того, что частицы на кольце перейдут из состояния $\vec{a}_0 = (a_1^0, a_2^0, \dots, a_p^0)$ в состояние $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p)$ за M шагов и при этом ни разу не встретятся, выражается формулой*

$$P_M(\vec{a} | \vec{a}_0) = \sum_{\eta_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{\eta_p=-\infty}^{+\infty} (-1)^{(p-1) \sum_{i=1}^p \eta_i} \det \Lambda_M(a_i^0 \rightarrow a_j + L\eta_j), \quad (12)$$

где

$$\Lambda_M(a_i^0 \rightarrow a_j + L\eta_j) = \begin{pmatrix} Q_M(a_1 + L\eta_1 | a_1^0) & \dots & Q_M(a_p + L\eta_p | a_1^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_M(a_1 + L\eta_1 | a_p^0) & \dots & Q_M(a_p + L\eta_p | a_p^0) \end{pmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем строить доказательство аналогично доказательству теоремы 1 – методом индукции. Пусть частицы делают первый шаг из начальных координат $(a_1^0 = x_1^0 < a_2^0 = x_2^0 < \dots < a_p^0 = x_p^0)$ в конечные координаты $(a_1 < a_2 < \dots < a_p)$. Заметим, что нас интересуют фиксированные конечные координаты $(a_1, a_2, \dots, a_p)$, нумерация которых не обязательно соответствует начальной нумерации частиц. В исходном состоянии все частицы имеют координаты с одинаковой четностью. Поскольку максимальная координата кольца, равная $L - 1$, является нечетной, то за один шаг сменить сектор может либо первая частица (когда все координаты частиц четные), либо последняя (когда все координаты частиц нечетные).

Случай $\eta_1 = \dots = \eta_{p-1} = 0, \eta_p = -1$, когда частицы за один шаг переходят из координат $(a_1^0, a_2^0, \dots, a_p^0)$ в координаты $(a_p - L, a_1, \dots, a_{p-1})$, характеризуется матрицей $\Lambda^{(1)}$:

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} Q_M(a_1 | x_1^0) & 0 & \dots & 0 & Q_M(a_p - L | x_1^0) \\ Q_M(a_1 | x_2^0) & Q_M(a_2 | x_2^0) & \dots & 0 & 0 \\ Q_M(a_1 | x_3^0) & Q_M(a_2 | x_3^0) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Q_M(a_2 | x_4^0) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & Q_M(a_{p-1} | x_{p-1}^0) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & Q_M(a_{p-1} | x_p^0) & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для $\eta_1 = \dots = \eta_p = 0$ частицы за один шаг переходят из координат $(a_1^0, \dots, a_p^0)$ в координаты $(a_1, \dots, a_p)$, что дает

$$\Lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} Q_M(a_1 | x_1^0) & Q_M(a_2 | x_1^0) & \dots & 0 & 0 \\ Q_M(a_1 | x_2^0) & Q_M(a_2 | x_2^0) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Q_M(x_3^0 \rightarrow a_2) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & Q_M(a_{p-1} | x_{p-2}^0) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & Q_M(a_{p-1} | x_{p-1}^0) & Q_M(a_p | x_{p-1}^0) \\ 0 & 0 & \dots & Q_M(a_{p-1} | x_p^0) & Q_M(a_p | x_p^0) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Для $\eta_1 = +1$, $\eta_2 = \dots = \eta_p = 0$ частицы за один шаг переходят из координат $(a_1^0, \dots, a_{p-1}^0, a_p^0)$ в координаты $(a_2, \dots, a_{p-1}, a_1 + L)$, поэтому

$$\Lambda^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & Q_M(a_2 | x_1^0) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & Q_M(a_2 | x_2^0) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & Q_M(a_{p-1} | x_{p-3}^0) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & Q_M(a_{p-1} | x_{p-2}^0) & Q_M(a_p | x_{p-2}^0) \\ 0 & 0 & \dots & Q_M(a_{p-1} | x_{p-1}^0) & Q_M(a_p | x_{p-1}^0) \\ Q_M(a_1 + L | x_p^0) & 0 & \dots & 0 & Q_M(a_p | x_p^0) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Следующее выражение показывает справедливость формулы (12) для первого шага:

$$\begin{aligned} & \sum_{\eta_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{\eta_p=-\infty}^{+\infty} (-1)^{(p-1)\sum_{i=1}^p \eta_i} \det \begin{pmatrix} Q_1(a_1 + L\eta_1 | a_1^0) & \dots & Q_1(a_p + L\eta_p | a_1^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_1(a_1 + L\eta_1 | a_p^0) & \dots & Q_1(a_p + L\eta_p | a_p^0) \end{pmatrix} = \\ & = (-1)^{p-1} \det(\Lambda^{(1)}) + \det(\Lambda^{(2)}) + (-1)^{p-1} \det(\Lambda^{(3)}) = \\ & = Q_1(a_p - L | x_1^0) \prod_{i=2}^p Q_1(a_{i-1} | x_i^0) + \prod_{i=1}^p Q_1(a_i | x_i^0) + \\ & + Q_1(a_1 + L | x_p^0) \prod_{i=1}^{p-1} Q_1(a_{i+1} | x_i^0) = P_1(\vec{a} | \vec{a}_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Второе равенство в выражении (16) является следствием тридиагональной формы матриц $\Lambda^{(1)}$, $\Lambda^{(2)}$, $\Lambda^{(3)}$.

Пусть выражение (12) верно для M шагов; покажем, что оно верно и для $(M+1)$ -го шага. Для этого нам понадобятся следующие свойства:

$$Q_M(a_j | a_i) = Q_M(a_j + L\eta | a_i + L\eta) \quad (17)$$

для любых η ;

$$P_{M+1}(\vec{a} | \vec{a}_0) = \sum_{\vec{a}_s} P_M(\vec{a}_s | \vec{a}_0) P_1(\vec{a} | \vec{a}_s), \quad (18)$$

где суммирование проводится по всем возможным состояниям системы после M шагов.

Для сокращения записи введем обозначения

$$\widetilde{\sum}_{\eta} = \sum_{\eta_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\eta_p=-\infty}^{\infty} (-1)^{(p-1) \sum_{i=1}^p \eta_i}. \quad (19)$$

Итак, мы предполагаем, что выражение (12) верно для M шагов, и нам необходимо прибавить один дополнительный шаг. Выделим три случая.

1. Частицы на $(M+1)$ -м шаге находятся в координатах $(1 \leq a_1 < \cdots < a_p \leq L-2)$. Это означает, что на $(M+1)$ -м шаге все частицы остаются в том же секторе, что и на M -м. В этом случае промежуточные координаты на M -м шаге связаны с координатами на $(M+1)$ -м шаге: $a_1^s = a_1 \pm 1, \dots, a_p^s = a_p \pm 1$. Тогда выражение (18) для данного случая запишется следующим образом:

$$P_{M+1}(\vec{a} | \vec{a}_0) = \sum_{a_1^s=a_1 \pm 1} \cdots \sum_{a_p^s=a_p \pm 1} P_M(\vec{a}_s | \vec{a}_0) \prod_{i=1}^p Q_1(a_i | a_i^s), \quad (20)$$

где, как и в равенстве (9), мы учитываем, что $P_M(\vec{a}_s | \vec{a}_0)$ обращается в нуль при совпадении любых координат вектора $\vec{a}_s$.

Поскольку для M -го шага мы предположили, что выражение (12) верно, то соотношение (20) можно продолжить:

$$\begin{aligned} & \sum_{a_1^s=a_1 \pm 1} \cdots \sum_{a_p^s=a_p \pm 1} \widetilde{\sum}_{\eta_s} \det(\Lambda_M(a_i^0 \rightarrow a_j^s + L\eta_j^s)) \prod_{i=1}^p Q_1(a_i | a_i^s) = \\ &= \widetilde{\sum}_{\eta_s} \sum_{a_1^s=a_1 \pm 1} \cdots \sum_{a_p^s=a_p \pm 1} \det(\Lambda_M(a_i^0 \rightarrow a_j^s + L\eta_j^s)) \prod_{i=1}^p Q_1(a_i + L\eta_i^s | a_i^s + L\eta_i^s) = \\ &= \widetilde{\sum}_{\eta_s} \det \begin{pmatrix} \sum_{a_1^s=a_1 \pm 1} Q_M(a_1^s + L\eta_1^s | a_1^0) Q_1(a_1 + L\eta_1^s | a_1^s + L\eta_1^s) & \cdots \\ \vdots & \ddots \\ \sum_{a_1^s=a_1 \pm 1} Q_M(a_1^s + L\eta_1^s | a_p^0) Q_1(a_1 + L\eta_1^s | a_1^s + L\eta_1^s) & \cdots \\ \cdots & \sum_{a_p^s=a_p \pm 1} Q_M(a_p^s + L\eta_p^s | a_1^0) Q_1(a_p + L\eta_p^s | a_p^s + L\eta_p^s) \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & \sum_{a_p^s=a_p \pm 1} Q_M(a_p^s + L\eta_p^s | a_p^0) Q_1(a_p + L\eta_p^s | a_p^s + L\eta_p^s) \end{pmatrix} = \\ &= \widetilde{\sum}_{\eta_s} \det(\Lambda_M(a_i^0 \rightarrow a_j^s + L\eta_j^s)). \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно, в первом случае для $(M+1)$ -го шага утверждение (12) верно.

2. Рассмотрим случай, когда частицы на $(M+1)$ -м шаге находятся в координатах $(1 \leq a_1 < \dots < a_p = L-1)$. Это состояние может быть достигнуто из координат на M -м шаге, которые равны либо $a_1^s = a_1 \pm 1, \dots, a_{p-1}^s = a_{p-1} \pm 1, a_p^s = a_p - 1 = L-2$ (и тогда частицы на M -м шаге остаются в том же секторе, что и на $(M+1)$ -м), либо $a_1^s = 0, a_2^s = a_1 \pm 1, \dots, a_p^s = a_{p-1} \pm 1$ (при этом самая правая частица на M -м шаге становится самой левой частицей на $(M+1)$ -м шаге и меняет приписанный ей сектор с η_1^s на $\eta_1^s - 1$). Выражение (18) для данного случая запишется следующим образом:

$$P_{M+1}(\vec{a} | \vec{a}_0) = P_{M+1}^{(1)}(\vec{a} | \vec{a}_0) + P_{M+1}^{(2)}(\vec{a} | \vec{a}_0) \quad (22)$$

где $P_{M+1}^{(1)}(\vec{a} | \vec{a}_0)$ описывает переход

$$(a_1^0, \dots, a_p^0) \rightarrow (a_1^s = a_1 \pm 1, \dots, a_{p-1}^s = a_{p-1} \pm 1, a_p^s = a_p - 1 = L-2) \rightarrow (a_1, \dots, a_p),$$

и равно

$$\begin{aligned} P_{M+1}^{(1)}(\vec{a} | \vec{a}_0) &= \sum_{a_1^s = a_1 \pm 1} \dots \sum_{a_{p-1}^s = a_{p-1} \pm 1} P_M(\vec{a}_s | \vec{a}_0) \prod_{i=1}^p Q_1(a_i | a_i^s) = \\ &= \sum_{\eta_s} \widetilde{\det} \begin{pmatrix} \sum_{a_1^s = a_1 \pm 1} Q_M(a_1^s + L\eta_1^s | a_1^0) Q_1(a_1 | a_1^s) & \dots \\ \vdots & \ddots \\ \sum_{a_1^s = a_1 \pm 1} Q_M(a_1^s + L\eta_1^s | a_p^0) Q_1(a_1 | a_1^s) & \dots \\ \dots & \sum_{a_{p-1}^s = a_{p-1} \pm 1} Q_M(a_{p-1}^s + L\eta_{p-1}^s | a_1^0) Q_1(a_1 | a_{p-1}^s) & Q_M(a_p^s + L\eta_p^s | a_1^0) Q_1(a_p | a_p^s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \sum_{a_{p-1}^s = a_{p-1} \pm 1} Q_M(a_{p-1}^s + L\eta_{p-1}^s | a_p^0) Q_1(a_1 | a_{p-1}^s) & Q_M(a_p^s + L\eta_p^s | a_p^0) Q_1(a_p | a_p^s) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя выражение (17) для первых $p-1$ столбцов, запишем

$$\begin{aligned} \sum_{a_i^s = a_i \pm 1} Q_M(a_i^s + L\eta_i^s | a_j^0) Q_1(a_i | a_i^s) &= \\ &= \sum_{a_i^s = a_i \pm 1} Q_M(a_i^s + L\eta_i^s | a_j^0) Q_1(a_i + L\eta_i^s | a_i^s + L\eta_i^s) = \\ &= Q_{M+1}(a_i + L\eta_i^s | a_j^0) \end{aligned} \quad (24)$$

для $i = 1, \dots, p-1$ и $j = 1, \dots, p$.

Учитывая соотношение (24) и осуществляя замену $\eta_i^s \rightarrow \eta_i$ для $i = 1, \dots, p$, пере-

пишем выражение (23) для $P_{M+1}^{(1)}(\vec{a} | \vec{a}_0)$:

$$\sum_{\eta} \widetilde{\det} \begin{pmatrix} Q_{M+1}(a_1 + L\eta_1 | a_1^0) & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M+1}(a_1 + L\eta_1 | a_p^0) & \dots & \dots \\ \dots & Q_{M+1}(a_{p-1} + L\eta_{p-1} | a_1^0) & Q_M(a_p^s + L\eta_p | a_1^0) Q_1(a_p | a_p^s) \\ \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & Q_{M+1}(a_{p-1} + L\eta_{p-1} | a_p^0) & Q_M(a_p^s + L\eta_p | a_p^0) Q_1(a_p | a_p^s) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Рассмотрим далее вероятность $P_{M+1}^{(2)}(\vec{a} | \vec{a}_0)$, которая описывает переход

$$(a_1^0, \dots, a_p^0) \rightarrow (a_1^s = 0, a_2^s = a_1 \pm 1, \dots, a_p^s = a_{p-1} \pm 1) \rightarrow (a_p, a_1, \dots, a_{p-1} = L - 1)$$

и равна

$$P_{M+1}^{(2)}(\vec{a} | \vec{a}_0) = \sum_{a_2^s = a_1 \pm 1} \dots \sum_{a_p^s = a_{p-1} \pm 1} P_M(\vec{a}_s | \vec{a}_0) \prod_{i=1}^{p-1} Q_1(a_i | a_{i+1}^s) Q_1(a_p - L = -1 | a_1^s = 0).$$

Здесь мы учли, что вероятность перехода одной частицы из координаты $a_1^s = 0$ в координату $a_p = L - 1$ равна $Q_1(a_p - L = -1 | a_1^s = 0) = w_{-1}$ вследствие распределения (1). Так как мы полагаем справедливость формулы (12) на M -м шаге, последнее выражение равно

$$\sum_{a_2^s \dots a_p^s} \widetilde{\det}_{\eta_s} \begin{pmatrix} Q_M(a_1^s + L\eta_1^s | a_1^0) & \dots & Q_M(a_p^s + L\eta_p^s | a_1^0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_M(a_1^s + L\eta_1^s | a_p^0) & \dots & Q_M(a_p^s + L\eta_p^s | a_p^0) \end{pmatrix} \times \\ \times \prod_{i=1}^{p-1} Q_1(a_i | a_{i+1}^s) Q_1(a_p - L | a_1^s). \quad (26)$$

Используя соотношение (17) для $i = 1, \dots, p$ и $j = 1, \dots, p - 1$, запишем

$$\sum_{a_{j+1}^s = a_j \pm 1} Q_M(a_{j+1}^s + L\eta_{j+1}^s | a_i^0) Q_1(a_j | a_{j+1}^s) = \\ = \sum_{a_{j+1}^s} Q_M(a_{j+1}^s + L\eta_{j+1}^s | a_i^0) Q_1(a_j + L\eta_{j+1}^s | a_{j+1}^s + L\eta_{j+1}^s) = \\ = Q_{M+1}(a_j + L\eta_{j+1}^s | a_i^0). \quad (27)$$

Учитывая (27), перепишем выражение (26):

$$\begin{aligned}
& \widetilde{\sum_{\eta_s}} \det \begin{pmatrix} Q_M(a_1^s + L\eta_1^s | a_1^0) Q_1(a_p - L | a_1^s) & Q_{M+1}(a_1 + L\eta_2^s | a_1^0) & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_M(a_1^s + L\eta_1^s | a_p^0) Q_1(a_p - L | a_p^s) & Q_{M+1}(a_1 + L\eta_2^s | a_p^0) & \dots \\ \dots & Q_{M+1}(a_{p-1} + L\eta_p^s | a_1^0) \\ \vdots & \vdots \\ \dots & Q_{M+1}(a_{p-1} + L\eta_p^s | a_p^0) \end{pmatrix} = \\
& = \widetilde{\sum_{\eta_s}} (-1)^{p-1} \det \begin{pmatrix} Q_{M+1}(a_1 + L\eta_2^s | a_1^0) & \dots \\ \vdots & \ddots \\ Q_{M+1}(a_1 + L\eta_2^s | a_p^0) & \dots \\ \dots & Q_{M+1}(a_{p-1} + L\eta_p^s | a_1^0) & Q_M(a_1^s + L\eta_1^s | a_1^0) Q_1(a_p - L | a_1^s) \\ \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & Q_{M+1}(a_{p-1} + L\eta_p^s | a_p^0) & Q_M(a_1^s + L\eta_1^s | a_p^0) Q_1(a_p - L | a_p^s) \end{pmatrix}. \quad (28)
\end{aligned}$$

После замены $\eta_{i+1}^s \rightarrow \eta_i$ для $i = 2, \dots, p$ и $\eta_p^s \rightarrow \eta_1 + 1$ и, следовательно, замены

$$\widetilde{\sum_{\eta_s}} (-1)^{p-1} \rightarrow \widetilde{\sum_{\eta}}$$

становится очевидно, что при подстановке выражений (25) и (28) в соотношение (22) получается выражение (12) для $(M+1)$ -го шага. Таким образом, (12) доказано для второго случая.

3. Третий случай, когда самая левая частица на M -м шаге может поменять сектор и стать самой правой частицей на $(M+1)$ -м шаге, а остальные частицы сектор не меняют, аналогичен второму случаю. Теорема 2 доказана.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели вероятность того, что частицы переходят из заданных начальных координат в заданные конечные, ни разу не встретившись. Просуммировав эту вероятность по конечным координатам, можно получить вероятность того, что частицы ни разу не встретятся, вне зависимости от того, в какие конечные координаты они переходят. Поскольку при встрече частицы аннигилируют, то эта вероятность называется *вероятностью выживания*. Для задачи о p частицах, сделавших большое число шагов ($M \gg 1$) на прямой, асимптотическое выражение для вероятности выживания имеет следующий вид [1]:

$$S_M = \sum_{\vec{x}} P_M(\vec{x} | \vec{x}_0) \sim M^{-p(p-1)/4}. \quad (29)$$

В работе [1] получено также асимптотическое выражение для *вероятности встречи в данном месте*, т.е. вероятности того, что все частицы встретятся в одном месте (точнее, сойдутся в соседних узлах, но при большом числе шагов и на большой решетке это событие можно рассматривать как встречу в одной точке). Просуммированная по конечным координатам этой точки вероятность встречи в данном месте дает вероятность встречи всех частиц в одной точке, при этом не важно, в какой именно:

$$R_M \sim M^{-(p^2-1)/2}. \quad (30)$$

Можно ожидать, что асимптотики для вероятностей встречи и выживания на кольце имеют дополнительную экспоненциально убывающую зависимость от размера решетки L (когда период решетки стремится к бесконечности, экспоненциальное выражение дает единицу). Полученное выражение (12) для вероятности перехода на кольце позволяет получить эту зависимость, но ввиду громоздких выкладок при суммировании вычисление асимптотик вероятностей выживания и встречи требует дополнительной работы.

Благодарности. Работа частично поддержана РФФИ (грант № 03-01-00780). В. Б. Приезжев выражает благодарность профессору Е. Шпиру (Rutgers University) за полезные советы.

Список литературы

- [1] *M. E. Fisher.* J. Stat. Phys. 1984. V. 34. P. 667.
- [2] *D. A. Huse, M. E. Fisher.* Phys. Rev. B. 1984. V. 29. P. 239; *P. G. de Gennes.* J. Chem. Phys. 1968. V. 48. P. 2257; *J. W. Essam, A. J. Guttmann.* Phys. Rev. E. 1995. V. 52. P. 5849; *A. L. Owczarek, J. W. Essam, R. Brak.* J. Stat. Phys. 2001. V. 102. P. 997.
- [3] *I. Gessel, G. Viennot.* Adv. Math. 1985. V. 58. P. 300.
- [4] *C. Krattenthaler, A. J. Guttmann, X. G. Viennot.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 8123; 2000. V. 33. P. 8835.
- [5] *R. Brak, J. W. Essam, A. L. Owczarek.* Ann. Combin. 1999. V. 3. P. 251; *R. Brak, A. L. Owczarek.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 3497.
- [6] *Р. Бэкстер.* Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [7] *Ф. Спизер.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.
- [8] *Э. Беккенбах.* Прикладная комбинаторная математика. М.: Мир, 1968.
- [9] *В. Феллер.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.

Поступила в редакцию 14.VI.2005 г.