Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Маханова, В. Б. Приезжев, Нестационарные вероятности и временные корреляционные функции для асимметричного процесса с исключенным объемом, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 3, 499–508

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2050>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 06:08:51

© 2006 г. М. В. Маханова*, В. Б. Приезжев*

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И ВРЕМЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ АСИММЕТРИЧНОГО ПРОЦЕССА С ИСКЛЮЧЕННЫМ ОБЪЕМОМ

Представлено полное решение основного кинетического уравнения системы взаимодействующих частиц с конечной плотностью. Решение получено с помощью новой формы подстановки Бете для простого асимметричного процесса с исключенным объемом на кольце. Для дискретного случая процесса впервые найдена одноточечная временная корреляционная функция.

Ключевые слова: одномерные модели взаимодействующих частиц, подстановка Бете, условная вероятность, корреляционная функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

В неравновесной статистической механике состояние системы взаимодействующих частиц дается решением основного кинетического уравнения

$$\frac{dP(\alpha; t)}{dt} = \sum_{\gamma} [W_{\gamma\alpha} P(\gamma; t) - W_{\alpha\gamma} P(\alpha; t)], \quad (1)$$

где α, γ – состояния системы, $W_{\alpha\gamma}$ – скорость перехода из состояния α в состояние γ , $P(\alpha; t)$ – вероятность того, что система находится в состоянии α в момент времени t при условии, что известно состояние α_0 системы в момент времени $t = 0$. Из-за экспоненциального роста числа состояний с увеличением размера системы эта задача никогда не была решена полностью не только для реальных систем, но даже для упрощенных одномерных моделей взаимодействующих частиц в конечном объеме.

Среди простых одномерных моделей наиболее перспективным кандидатом для точного решения уравнения (1) является простой асимметричный процесс с исключенным объемом (ASEP) [1], [2]. В течение последнего десятилетия было точно вычислено множество асимптотических свойств ASEP в пределе больших интервалов времени (см., например, [3]–[6]) и получено нестационарное решение уравнения (1)

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: mvmakhan@thsun1.jinr.ru, priezzvb@thsun1.jinr.ru

для конечного числа частиц на бесконечной решетке [7]. Очевидным недостатком такого решения является то, что в асимптотическом пределе плотность частиц стремится к нулю, а динамика приближается к тривиальному случаю невзаимодействующих частиц. Поэтому остается актуальной проблема решения уравнения (1) для систем с конечной плотностью частиц. Первая цель этой статьи – представить полное решение уравнения (1) для ASEP на кольце, содержащем L узлов и P частиц. Вторая цель – найти простейшую временную корреляционную функцию для дискретного процесса.

Для непрерывного времени ASEP описывается уравнением (1), где скорости переходов определяются согласно правилу исключения: в течение бесконечно малого интервала времени dt каждая частица с вероятностью dt совершает прыжок на один узел вправо, если он свободен. Если этот узел занят, то движение запрещено. Кроме непрерывной формулировки процесса существует также дискретная, которая удобна для иллюстрации и численных расчетов.

Введем квадратную решетку Λ и обозначим положение частицы целочисленными координатами (x, t) . Вертикальная ось времени направлена вниз, горизонтальная пространственная ось направлена вправо. Мы рассматриваем движение частиц на кольце, а их траектории на периодической решетке Λ , с периодом, равным размеру кольца. Траектория каждой частицы представляет собой последовательность единичных вертикальных и диагональных отрезков, соединяющих узлы решетки. Каждый диагональный отрезок соответствует прыжку частицы вправо за единицу времени и имеет вес z . Вертикальный отрезок имеет вес y и соответствует тому, что частица за единицу времени не изменила своего положения.

Дискретный ASEP генерирует траектории P частиц, начинающиеся в точках кольца $0 \leq x_1^0 < x_2^0 < \dots < x_P^0 < L$ и заканчивающиеся в точках $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_P < L$ после произвольного числа обходов вокруг кольца в течение времени t . Согласно правилу исключения траектории частиц не пересекаются, а в случае, когда два вертикальных единичных отрезка расположены в соседних узлах, вес левого изменяется с y на 1 (частица с вероятностью 1 остается на месте, пока соседний справа узел занят).

Производящая функция всех траекторий свободно движущейся частицы за время t , с весом каждого шага z или y , есть полином $(z + y)^t$, а для системы из P свободных частиц – соответственно $(z + y)^{tP}$. Если производящая функция взаимодействующих частиц G_P будет учитывать только те траектории, которые удовлетворяют начальным и конечным условиям, а также правилу исключения ASEP, то при выполнении равенства $z + y = 1$ ($z < 1$) функция G_P есть условная вероятность $P(x_1, \dots, x_P; t \mid x_1^0, \dots, x_P^0; 0)$, причем z – вероятность скачка частицы на свободный узел, а y – вероятность остаться на месте, если соседний узел справа свободен.

Напишем для примера полином G_P для случая движения двух частиц ($P = 2$) в течение времени $t = 6$ по простейшему кольцу из трех звеньев, $L = 3$. Начальные и конечные координаты равны соответственно $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 2$ и $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Если бы частицы двигались по бесконечной цепочке ($L \rightarrow \infty$), то они имели бы лишь одну возможность попасть из (x_1^0, x_2^0) в (x_1, x_2) – оставаться на месте в течение

Рис. 1. Траектории частиц на периодической решетке: $L = 3$, $P = 2$, $t = 6$. Под каждым примером приведено слагаемое, которое данный набор траекторий вносит в величину G_2 .

ние всего времени t . В этом случае $G_2 = P(1, 2; 0 \mid 1, 2; 6) = y^6$. Периодичность в пространственном направлении решетки дает нам 243 способа прийти из заданных начальных точек в конечные: $G_2 = z^{12} + 30z^9y^2 + 20z^9y^3 + z^6y^6 + 30z^6y^5 + 90z^6y^4 + 20z^6y^3 + 20z^3y^6 + 30z^3y^5 + y^6$. Несколько примеров возможных конфигураций траекторий представлены на рис. 1.

Главным результатом, представленным в статье, является полное решение уравнения (1) для асимметричного процесса с исключениями на кольце, содержащем L узлов и P частиц. В разделе 2 сформулирован обобщенный анзац Бете, учитывающий периодические граничные условия, и получено точное выражение для условной вероятности $P(x_1, \dots, x_P; t \mid x_1^0, \dots, x_P^0; 0)$ обнаружить частицы в заданных точках $(x_1, \dots, x_P)$ после эволюции в течение времени t из начального состояния $(x_1^0, \dots, x_P^0)$. В разделе 3 приведен расчет для временной одноточечной корреляционной функции дискретного процесса.

2. ТОЧНОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ УСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Обозначим через $B(N, t)$ вероятность для свободной частицы прийти из точки $(x^0, 0)$ в точку (x, t) за t дискретных шагов: $B(N, t) = \binom{t}{N} z^N y^{t-N}$, где $N = x - x^0$ – расстояние, пройденное частицей. В непрерывном пределе $z \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ мы имеем $B(N, t) = e^{-t} t^N / N!$, где t – непрерывное время, перемасштабированное так, что $tz \rightarrow t$. Для $N < 0$ мы принимаем $B(N, t) = 0$.

Следуя [7], введем функцию F_m для любого целого m такую, что

$$F_m(x_i^0, x_j \mid t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-1}{m-1} F_0(x_i^0 - k, x_j \mid t), \quad (2)$$

если $m > 0$,

$$F_m(x_i^0, x_j \mid t) = \sum_{k=0}^{-m} (-1)^k \binom{-m}{k} F_0(x_i^0 - k, x_j \mid t), \quad (3)$$

если $m < 0$, и

$$F_0(x_i^0, x_j | t) = B(x_j - x_i^0, t), \quad (4)$$

если $m = 0$.

Определим матрицу M размером $P \times P$, элементы которой задаются функцией F_m :

$$M_{ij} = F_{s_{ij}}(x_i^0, x_j + n_j L | t), \quad (5)$$

где

$$s_{ij} = (P - 1)n_j - \sum_{k \neq j} n_k + j - i. \quad (6)$$

Тогда справедлива следующая теорема [8].

ТЕОРЕМА. *Для любых целых чисел L, P таких, что $L > 1$, $0 < P < L$, производящая функция G_P есть*

$$G_P = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_P=-\infty}^{\infty} (-1)^{\sum_{i < j} |n_i - n_j|} \det M. \quad (7)$$

Получение этого результата основано на новой форме анзаца Бете, которая позволяет нам учитывать геометрические свойства траекторий частиц, движущихся по кольцу. Общим свойством интегрируемых моделей, допускающих двумерное пространственно-временное представление, является неизбежное пересечение двух траекторий при перестановке их конечных точек. Идея анзаца Бете состоит в том, чтобы представить взаимодействующие траектории частиц как набор свободных траекторий. Далее, используя однозначное соответствие между пересечениями траекторий и перестановками их концов, мы можем свести проблему перечисления всех взаимодействующих траекторий к правильному выбору знаков перестановок.

Начнем с двухчастичного случая, $P = 2$. Удобно ввести на периодической оси x новые координаты $X_i = x_i + n_i L$, где n_i – целое число, учитывающее количество обходов по кольцу, x_i – координата на кольце, $0 \leq x_i < L$. Вероятность $P(\alpha; t | \alpha_0; 0)$ того, что за время t система перейдет из состояния α_0 в состояние α , можно написать в виде

$$P(x_1, x_2; t | x_1^0, x_2^0; 0) = \sum_{X_1, X_2} \psi(X_1, X_2; t), \quad (8)$$

где суммирование происходит по всем X_1, X_2 , которые удовлетворяют условиям $X_1 = x_1 + n_1^* L$, $X_2 = x_2 + n_2^* L$ или $X_1 = x_2 + n_2^* L$, $X_2 = x_1 + n_1^* L$, где n_1^*, n_2^* – целые числа. Функция $\psi(X_1, X_2; t)$ есть вероятность того, что первая частица придет в точку X_1 , выйдя из начальной точки x_1^0 , а вторая частица придет в X_2 из x_2^0 , при условии, что траектории частиц подчиняются правилам ASEP.

Так же как $P(x_1, x_2; t)$, функция $\psi(X_1, X_2; t)$ удовлетворяет основному уравнению (1), которое для двух частиц записывается в виде

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi(X_1 - 1, X_2; t) + \psi(X_1, X_2 - 1; t) - 2\psi(X_1, X_2; t). \quad (9)$$

Это уравнение необходимо дополнить граничными условиями [8]

$$\begin{aligned}\psi(X, X; t) &= \psi(X, X + 1; t), \\ \psi(X, X + L; t) &= \psi(X + 1, X + L; t) \quad \forall X, t \geq 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Первое из них ставит запрет на ситуацию, когда первая частица обгоняет вторую (при этом частицы в некоторый момент времени оказались бы в одном узле решетки, что невозможно), второе запрещает второй частице, сделав дополнительный оборот по кольцу, обгонять первую.

Прежде всего перейдем к задаче о собственных значениях с помощью подстановки $\psi(X_1, X_2; t) = e^{\lambda t} \psi(X_1, X_2)$ (по аналогии с $P(x_1, x_2; t) = e^{\lambda t} P(x_1, x_2)$), тогда уравнение (9) запишется в виде

$$\lambda \psi = \psi(X_1 - 1, X_2) + \psi(X_1, X_2 - 1) - 2\psi(X_1, X_2),\tag{11}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}\psi(X, X) &= \psi(X, X + 1), \\ \psi(X, X + L) &= \psi(X + 1, X + L) \quad \forall X \geq 0.\end{aligned}\tag{12}$$

По методу Бете для нахождения собственной функции используется подстановка

$$P(x_1, x_2) = A_{12} z_1^{x_1} z_2^{x_2} + A_{21} z_1^{x_2} z_2^{x_1},\tag{13}$$

где параметры z_i и A_{ij} неизвестны. Они определяются из граничных и начальных условий. Вместо этой стандартной формы мы используем модифицированную подстановку:

$$\psi(X_1, X_2) = \sum_{n_1, n_2} (A_{12}^{n_1, n_2} z_1^{x_1 + n_1 L} z_2^{x_2 + n_2 L} + A_{21}^{n_2, n_1} z_1^{x_2 + n_2 L} z_2^{x_1 + n_1 L}),\tag{14}$$

где суммирование происходит по всем n_1, n_2 , удовлетворяющим правилу $n_1 + n_2 = n_1^* + n_2^*$, и параметры A_{ij} зависят от порядка расположения траекторий.

Из уравнения (11) мы получаем $\lambda = -2 + z_1^{-1} + z_2^{-1}$. Условия (12) будут удовлетворены, если

$$\frac{A_{12}^{(n_1, n_2)}}{A_{21}^{(n_1, n_2)}} = -\frac{1 - z_1}{1 - z_2}\tag{15}$$

и

$$\frac{A_{12}^{(n_1, n_2)}}{A_{21}^{(n_1 - 1, n_2 + 1)}} = -\frac{1 - z_2}{1 - z_1}.\tag{16}$$

Тогда параметры $A_{ij}^{(n_1, n_2)}$ можно найти с помощью рекурсии:

$$A_{ij}^{(n_1, n_2)} = \text{sign}(\pi) (-1)^{|n_1 - n_2|} \frac{f(z_1, z_2)}{(1 - z_1)^{s_{1j}} (1 - z_2)^{s_{2j}}},\tag{17}$$

где s_{ij} определено соотношением (6), $f(z_1, z_2)$ – неизвестная функция и знак перестановки $\text{sign}(\pi)$ положителен для $\{i, j\} = \{1, 2\}$ и отрицателен для $\{i, j\} = \{2, 1\}$.

Используя обозначение $z_j = e^{ip_j}$, мы можем написать общее решение

$$\psi(X_1, X_2; t) = \int_0^{2\pi} dp_1 \int_0^{2\pi} dp_2 e^{\lambda t} \psi(X_1, X_2) \quad (18)$$

и определить функцию $f(z_1, z_2)$ из начальных условий. В случае бесконечной решетки выбор

$$f(z_1, z_2) = e^{-ip_1 x_1^0 - ip_2 x_2^0} \quad (19)$$

и определение полюсов в выражении (17) как $p_j \rightarrow p_j + i0$ дает нам верные начальные условия

$$P(x_1, x_2; 0 \mid x_1^0, x_2^0; 0) = \delta_{x_1, x_1^0} \delta_{x_2, x_2^0}. \quad (20)$$

Произведя интегрирование в формуле (18), получаем

$$\psi(X_1, X_2; t) = \sum_{n_1 + n_2 = n_1^* + n_2^*} (-1)^{|n_1 - n_2|} \det M, \quad (21)$$

где M – матрица размера 2×2 , элементы которой определяются функцией (5). Суммирование по всем n_1^*, n_2^* приводит к выражению (7) для $P = 2$.

Для P частиц вероятность $P(\alpha; t \mid \alpha; 0)$ принимает вид

$$P(x_1, \dots, x_P; t) = \sum_{\{X\}} \psi(X_1, \dots, X_P; t), \quad (22)$$

где все X_i такие, что $X_i = x_{\pi(i)} + n_{\pi(i)}^*$, а π – перестановки чисел $1, 2, \dots, P$. Функция $\psi(X_1, \dots, X_P; t)$ есть вероятность того, что i -я частица достигнет точки X_i , выйдя из точки x_i^0 , $i = 1, 2, \dots, P$, при условии, что траектории частиц удовлетворяют правилам ASEP. Мы снова используем подстановку $\psi(X_1, \dots, X_P; t) = e^{\lambda t} \psi(X_1, \dots, X_P)$. Задачу на собственные значения для P частиц мы получаем прямым обобщением (9), и ее необходимо дополнить граничными условиями, соответствующими P возможным обгонам:

$$\begin{aligned} \psi(\dots, X_i, X_i, \dots) &= \psi(\dots, X_i, X_i + 1, \dots), \\ \psi(X_1, X_2, \dots, X_1 + L) &= \psi(X_1 + 1, X_2, \dots, X_1 + L). \end{aligned} \quad (23)$$

Аназ Бете принимает форму

$$\psi(X_1, \dots, X_P) = \sum_{\pi} \sum_{\{n\}} A_{\pi(1) \dots \pi(P)}^{(n_{\pi(1)}, \dots, n_{\pi(P)})} \times \prod_{j=1}^P z_j^{x_{\pi(j)} + n_{\pi(j)} L}, \quad (24)$$

где первое суммирование производится по всем перестановкам π , а во втором выполняется правило $n_1 + \dots + n_P = n_1^* + \dots + n_P^*$. Собственное значение для P частиц равно

$$\lambda = -P + \sum_{i=1}^P \frac{1}{z_i}. \quad (25)$$

Чтобы найти параметры A из граничных условий (23), полезно ввести геометрическое объяснение. Заметим, что две пересекающиеся траектории неэквивалентны:

одна из них принадлежит обгоняющей частице, и мы можем назвать ее *активной*, а вторая, наоборот, может быть названа *пассивной*. В случае бесконечной решетки активная и пассивная траектории расположены по порядку: для каждой пары частиц траектория i -й частицы по отношению к $(i+1)$ -й частице всегда активна. На кольце любая из двух траекторий может быть активной или пассивной независимо от начальных условий. Более того, одна траектория может пересекать другую m раз, если количество оборотов двух частиц отличается на m .

Из условий (23) следует, что

$$\frac{A_{\dots ij \dots}^{(\dots, n_i, n_j, \dots)}}{A_{\dots ji \dots}^{(\dots, n_i, n_j, \dots)}} = -\frac{1 - z_i}{1 - z_j} \quad (26)$$

и

$$\frac{A_{\pi(1) \dots \pi(P)}^{(n_{\pi(1)}, \dots, n_{\pi(P)})}}{A_{\pi(P) \dots \pi(1)}^{(n_{\pi(1)}-1, \dots, n_{\pi(P)}+1)}} = -\frac{1 - z_{\pi(P)}}{1 - z_{\pi(1)}}. \quad (27)$$

Отношения параметров A в (26), (27) подобны отношениям (15), (16), и их можно рассматривать как коэффициенты рассеяния, соответствующие пересечению двух частиц, что приводит к перестановке их конечных точек. Траектории частиц i и $\pi(P)$ в выражениях (26), (27) активные, а траектории j и $\pi(1)$ пассивные. Можно заключить, что каждое пересечение активной траектории i добавляет множитель $(1 - z_i)^{-1}$ в параметр $A_{\dots ji \dots}^{(\dots, n_i, n_j, \dots)}$, тогда как каждое пересечение пассивной траектории j дает множитель $1 - z_j$. Таким образом, показатель степени множителя $1 - z_i$ для частицы, выходящей из x_i^0 и приходящей в X_j , определяется разностью между количеством активных и пассивных пересечений. Суммируя все вышесказанное, получим

$$A_{\pi(1) \dots \pi(P)}^{(n_{\pi(1)}, \dots, n_{\pi(P)})} = \frac{\text{sign}(\pi)(-1)^{\sum_{i < j} |n_i - n_j|} f(z_1, \dots, z_P)}{(1 - z_1)^{s_{1\pi(1)}} \dots (1 - z_P)^{s_{P\pi(P)}}}, \quad (28)$$

где знак правой части определяется количеством перестановок, а $f(z_1, \dots, z_P)$ находим из начальных условий.

Условия (26), (27) принимают во внимание парное взаимодействие между частицами, когда две частицы находятся в соседних узлах кольца. Конфигурации, содержащие “плотно упакованные” интервалы из трех и более узлов, не дают новых ограничений, потому что граничные условия для любой пары не зависят от координат остальных частиц.

Как было указано выше, выбор

$$f(z_1, \dots, z_P) = \prod_{i=1}^P z_i^{-x_i^0} \quad (29)$$

гарантирует выполнение начальных условий

$$P(x_1, \dots, x_P; 0 \mid x_1^0, \dots, x_P^0; 0) = \delta_{x_1, x_1^0} \dots \delta_{x_P, x_P^0}. \quad (30)$$

Интегрируя $e^{\lambda t} \psi(X_1, \dots, X_P)$ по $p_j = -i \ln z_j$ с параметрами A , которые даются соотношением (28), мы получаем функцию $\psi(X_1, \dots, X_P; t)$ в виде

$$\psi(X_1, \dots, X_P; t) = \sum_{\{n\}} (-1)^{\sum_{i < j} |n_i - n_j|} \det M, \quad (31)$$

где суммирование ограничено теми же условиями, что и в (24). Продолжая суммирование в (22), мы получаем неограниченную сумму по всем $n_1, \dots, n_P$, что дает нам формулу (7).

Приведенный выше вывод для непрерывного времени легко обобщается на дискретный случай. Комбинаторная трактовка дискретного случая дана в работе [9].

Решение (2)–(6) основного кинетического уравнения (1) дает полное описание полностью несимметричного простого процесса с динамикой исключения для любых начальных условий. Значит, оно может служить отправной точкой для вычисления корреляционных функций многих частиц, а также как основа для более широких прикладных приближений.

3. ОДНОТОЧЕЧНАЯ ВРЕМЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Для процесса движения частиц по кольцу с соблюдением правил ASEP в асимптотическом пределе существует стационарное состояние, в котором все конфигурации частиц равновероятны [5]. Пусть по кольцу длины L движутся P частиц, тогда вероятность любой конфигурации равна

$$P_{\text{st}} = \frac{P! (L - P)!}{L!}. \quad (32)$$

Теперь, имея решение кинетического уравнения (1), мы можем изучать динамику системы. В частности, мы можем проследить эволюцию системы к стационарному состоянию.

Для примера рассмотрим кольцо длины $L = 7$ с тремя частицами. На рис. 2 по оси абсцисс отложено дискретное время эволюции системы T , по оси ординат – вероятность $P(x_1, x_2, x_3; T | x_1^0, x_2^0, x_3^0; 0)$, вычисленная по формулам (2)–(7) для значений $\{x_1 = x_1^0 = 1, x_2 = x_2^0 = 2, x_3 = x_3^0 = 3\}$. Штриховой линией показано асимптотическое значение вероятности в соответствии с формулой (32).

Зафиксируем начальное положение одной из трех частиц: $x^0 = 1$. Остальные две частицы могут произвольно располагаться на кольце. Вычисляя вероятность того, что через время T какая-либо из частиц снова окажется в точке $x = 1$, получим одноточечную временную корреляционную функцию $P(x; T | x; 0)$. Для $L = 7$ эта функция представлена на рис. 3. Штриховой линией показано значение $P = 3/7$ – вероятность найти какую-либо из трех частиц в узле решетки с координатами $(1, T)$ при $T \rightarrow \infty$. Функция на рис. 3 в колебательном режиме стремится к асимптотическому пределу. Положение экстремумов зависит от средней скорости частиц на кольце, которая в стационарном состоянии имеет точное выражение: $v = (L - P)/(L - 1)$ [5]. Этот результат есть прямое следствие того факта, что все конфигурации частиц в асимптотическом пределе имеют одинаковую вероятность.

Рис. 2. Условная вероятность $P(\alpha; T | \alpha_0; 0)$ с течением времени стремится к стационарному значению P_{st} .

Рис. 3. Одноточечная временная корреляционная функция $P(x; T|x; 0)$ для $L = 7$, $P = 3$.

Все значения функции $P(x; T | x; 0)$ в интервале $[1, 60]$ приведены в таблице.

1	0.66666667	16	0.42525535	31	0.42841195	46	0.42859134
2	0.53020833	17	0.42750734	32	0.42836381	47	0.42858862
3	0.47942708	18	0.42906556	33	0.42835006	48	0.42858524
4	0.45652669	19	0.43006409	34	0.4283606	49	0.42858173
5	0.44108276	20	0.43061827	35	0.42838656	50	0.42857843
6	0.42887395	21	0.43082684	36	0.42842062	51	0.42857559
7	0.41945044	22	0.43077798	37	0.42845712	52	0.4285733
8	0.41242345	23	0.4305519	38	0.42849201	53	0.42857159
9	0.40769234	24	0.43022032	39	0.42852266	54	0.42857043
10	0.40562123	25	0.4298446	40	0.42854769	55	0.42856974
11	0.40639317	26	0.42947323	41	0.42856667	56	0.42856942
12	0.40948239	27	0.42914006	42	0.42857985	57	0.42856939
13	0.4138095	28	0.42886449	43	0.42858795	58	0.42856956
14	0.41828038	29	0.42865352	44	0.4285919	59	0.42856984
15	0.42218506	30	0.42850516	45	0.42859271	60	0.42857017

Таким образом, решение основного кинетического уравнения на кольце дает полное описание процесса релаксации системы взаимодействующих частиц из начального состояния в конечное стационарное состояние.

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (грант № 03-01-00780-а).

Список литературы

- [1] *T. M. Liggett.* Interacting Particle Systems. N.Y.: Springer, 1985.
- [2] *H. Spohn.* Large Scale Dynamics of Interacting Particles. N.Y.: Springer, 1991.
- [3] *D. Dhar.* Phase Trans. 1987. V. 9. P. 51.
- [4] *L. H. Gwa, H. Spohn.* Phys. Rev. Lett. 1992. V. 68. P. 725.
- [5] *B. Derrida.* Phys. Rep. 1998. V. 301. P. 65.
- [6] *S. A. Janovsky, J. L. Lebowitz.* Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 618.
- [7] *G. M. Schütz.* J. Stat. Phys. 1997. V. 88. P. 427.
- [8] *V. B. Priezhev.* Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 050601.
- [9] *V. B. Priezhev.* Exact non-stationary probabilities in the asymmetric exclusion process on a ring. cond-mat/0211052.

Поступила в редакцию 14.VI.2005 г.