Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Василевич, Связи, калибровочные симметрии и
некоммутативная гравитация в размерности $D = 2$,
ТМФ, 2006, том 148, номер 1, 64–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2058>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 09:51:17

© 2006 г.

Д. В. Василевич*

СВЯЗИ, КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ И НЕКОММУТАТИВНАЯ ГРАВИТАЦИЯ В РАЗМЕРНОСТИ $D = 2$

После краткого введения показано, как в теориях с пространственно-временной некоммутативностью строится канонический формализм, позволяющий определить понятие связей первого рода и анализировать калибровочные симметрии. Этот формализм используется для построения некоммутативной деформации двумерной струнной гравитации (известной также как черная дыра Виттена).

Ключевые слова: некоммутативная геометрия, дилатонная гравитация, канонические скобки.

Посвящается Ю. В. Новожилову по случаю его восьмидесятилетия

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние десять лет был достигнут существенный прогресс в изучении некоммутативных теорий поля [1]. Эти теории определяются на многообразии с некоммутирующими координатами. Имеются два по существу эквивалентных способа описания некоммутативных координат: либо вводятся операторы вместо чисел, либо определяется новое произведение функций на многообразии. В настоящей работе мы будем использовать второй подход.

Некоммутативность не является чисто теоретическим изобретением. Некоммутативные координаты присущи многим физическим системам. В качестве примера можно рассмотреть электроны во внешнем магнитном поле. Если считать, что электроны расположены на нескольких низших уровнях Ландау, то мы получим связи второго рода. Скобки Дирака для координат при этом ненулевые. Такая ситуация реализуется в квантовом эффекте Холла. Другой важный пример дается теорией струн. Было показано, что координаты точек на концах открытой струны не коммутируют. Следовательно, теории поля на бранах Дирихле являются некоммутативными. Используя очень общие аргументы работы [2], можно уже в рамках

---

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; Institut für Theoretische Physik, Universität Leipzig, Leipzig, Germany.
E-mail: Dmitri.Vassilevich@itp.uni-leipzig.de

классической гравитации вывести некоммутативность координат на малых расстояниях.

Определим $\star$ -произведение функций, которое заменит обычное поточечное произведение. Рассмотрим пространственно-временное многообразие $\mathcal{M}$ размерности D . $\star$ -Произведение Моеля функций на $\mathcal{M}$ имеет вид

$$f \star g = f(x) \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu\right) g(x), \quad (1)$$

где θ – постоянная антисимметричная матрица. Это произведение ассоциативно, $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$. В таком виде $\star$ -произведение следует применять к плоским волнам, а затем расширить его до всех (квадратично интегрируемых) функций с помощью рядов Фурье. Очевидно,

$$x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i \theta^{\mu\nu}. \quad (2)$$

Мы не налагаем ограничений на θ .

Произведение Моеля замкнуто,

$$\int_{\mathcal{M}} d^D x f \star g = \int_{\mathcal{M}} d^D x f \times g, \quad (3)$$

где $\times$ обозначает обычное коммутативное умножение, оно удовлетворяет правилу Лейбница

$$\partial_\mu (f \star g) = (\partial_\mu f) \star g + f \star (\partial_\mu g) \quad (4)$$

и позволяет делать циклические перестановки под знаком интеграла:

$$\int_{\mathcal{M}} d^D x f \star g \star h = \int_{\mathcal{M}} d^D x h \star f \star g. \quad (5)$$

Произведение (1) – не единственный возможный выбор ассоциативного некоммутативного произведения. Правая часть уравнения (2) может в принципе зависеть от координат.

Чтобы построить некоммутативный вариант данной коммутативной теории поля, следует заменить все поточечные произведения $\star$ -произведениями. Конечно, результат не является единственным. Имеются некоторые естественные ограничения на некоммутативные деформации теорий поля. Например, обычно требуют, чтобы деформация сохраняла число калибровочных симметрий.

Среди всех некоммутативных теорий поля теории с пространственно-временной некоммутативностью имеют несколько более низкий статус, поскольку считается, что их нельзя как следует проквантовать из-за проблем, связанных с причинностью и унитарностью (см., например, [3]). Такие проблемы возникают из-за временной нелокальности этих теорий, обусловленной присутствием бесконечного числа производных по времени в $\star$ -произведении Моеля. Однако позднее было показано, что унитарность в теориях с пространственно-временной некоммутативностью можно

восстановить [4]¹⁾ (см. также [6]) и что можно выполнить квантование с помощью интеграла по траекториям [7]. Этот результат наводит на мысль, что теории с пространственно-временной некоммутативностью могут быть включены в общий формализм канонического квантования [8]. Действительно, канонический подход был предложен в работе [9].

Кроме квантования имеется другой контекст, в котором канонический подход оказывается очень полезным. Это канонический анализ связей и соответствующих калибровочных симметрий [8]. В некоммутативных теориях проблема симметрий становится исключительно сложной. Уже на уровне глобальных симметрий мы обнаруживаем явления, которые никогда не возникают в коммутативных теориях. Например, тензор энергии-импульса в трансляционно-инвариантных некоммутативных теориях не сохраняется локально (см. замечания в работе [10]). В то же время перенормируемая во всех порядках некоммутативная ϕ^4 -теория не является трансляционно-инвариантной [11]. Лоренц-инвариантная интерпретация некоммутативного пространства-времени ведет к твистованной симметрии Пуанкаре [12]. Неясно, как эту глобальную симметрию можно (и можно ли вообще) связать с преобразованиями локальных диффеоморфизмов, проанализированными, например, в работе [13]. Правильная деформация калибровочных симметрий общих двумерных дилатонных гравитаций остается открытой проблемой (см. ниже). Решение с помощью канонических методов некоторых задач, связанных с калибровочными симметриями в некоммутативных теориях поля, является основной целью настоящей работы.

Начнем с определения канонической скобки. Наш подход основан на двух основных идеях. Прежде всего, мы разделяем неявные производные по времени (содержащиеся в $\star$ -произведении Моеяла) и явные производные (сохраняющиеся в коммутативном пределе). Только явные производные определяют каноническую структуру. Как следствие, связи и гамильтониан становятся нелокальными по времени. Поэтому понятие одновременной канонической скобки становится бессмысленным. Мы просто постулируем скобку между каноническими переменными, взятыми в различных точках пространства ($\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$) и времени (t и t'):

$$\{q_a(\mathbf{x}, t), p^b(\mathbf{x}', t')\} = \delta_a^b \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t'). \quad (6)$$

Эта скобка в чем-то похожа на скобку, возникающую в формализме Остроградского для теорий с производными по времени высших порядков (см., например, работы [14] в применении к теориям поля и работу [9] в применении к теориям с пространственно-временной некоммутативностью), однако имеются важные различия (см. ниже раздел 3).

Конечно, предложенный формализм означает отход от стандартной канонической процедуры. Тем не менее мы можем показать, что новая скобка удовлетворяет таким фундаментальным требованиям, как антисимметрия и тождества Якоби. Эти скобки порождают уравнения движения. Более того, можно определить понятие связей первого рода по отношению к новым скобкам и показать, что эти связи

¹⁾ Следует заметить, что подход, основанный на упорядоченной по времени теории возмущений, обладает некоторыми внутренними сложностями [5].

порождают калибровочные симметрии действия. Мы выведем явный вид преобразований симметрии и покажем, что они выглядят очень похоже на коммутативный случай (единственное различие состоит в том, что в этих преобразованиях встречаются модифицированная скобка и $\star$ -произведение). Подчеркнем, что здесь мы будем использовать нашу скобку только для анализа калибровочных симметрий классических систем. Неясно, полезна ли такая скобка для квантования.

Главное приложение предложенного в настоящей работе канонического формализма – это некоммутативные теории гравитации в размерности $D = 2$. Рассмотрим сначала коммутативный случай (см. обзор [15] и многочисленные ссылки в нем). Поскольку плотность лагранжиана Эйнштейна–Гильберта в размерности $D = 2$ есть полная производная, следует ввести скалярное поле ϕ (называемое дилатоном) с действием

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{R}{2} \phi - \frac{U(\phi)}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right] d^2 x. \quad (7)$$

Это действие является достаточно общим, оно используется для описания многих важных теорий гравитации в размерности $D = 2$. Например, выбор

$$V(\phi) = \Lambda \phi, \quad U(\phi) = 0 \quad (8)$$

приводит к модели Джакива–Тейтелбойма [16]²⁾. Здесь Λ играет роль космологической постоянной. Сферически-симметричная редукция теории Эйнштейна в d измерениях приводит к дилатонному гравитационному действию в размерности $D = 2$ с потенциалами

$$V(\phi) \propto \phi^{(d-4)/(d-2)}, \quad U(\phi) \propto \frac{1}{\phi}. \quad (9)$$

Низкоэнергетический предел теории струн [18] имеет особое значение в контексте настоящей работы. Он описывается потенциалами

$$V(\phi) = -2\lambda^2 \phi, \quad U(\phi) = -\frac{1}{\phi}. \quad (10)$$

Эта модель называется также черной дырой Виттена.

Посредством зависящего от дилатона конформного преобразования $g_{\mu\nu} = e^{-2\rho} \tilde{g}_{\mu\nu}$, где

$$\rho = -\frac{1}{2} \int^\phi U(Y) dY, \quad (11)$$

мы получаем действие для метрики $\tilde{g}$ снова в виде (7), однако с потенциалами

$$\tilde{U} = 0, \quad \tilde{V} = V e^{-2\rho}. \quad (12)$$

Для струнной гравитации (10) потенциал

$$\tilde{V} = -2\lambda^2 \quad (13)$$

²⁾Уравнения движения для этой модели впервые изучались в работе [17].

является константой. Заметим, что преобразование $g \rightarrow \tilde{g}$ может быть сингулярным, так что конформно-связанные теории описывают, вообще говоря, глобально неэквивалентные геометрии. Однако это конформное преобразование может оказаться очень полезным, поскольку оно значительно упрощает локальную динамику.

Действие (7) можно переписать в формализме первого порядка:

$$S = \int \left[\phi_a D e^a + \phi d\omega + \epsilon \left(\frac{\phi_a \phi^a}{2} U(\phi) + V(\phi) \right) \right]. \quad (14)$$

Здесь мы использовали обозначения Картана, $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ – 1-форма 2-репера, $a = 0, 1$ – лоренцев индекс, $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ – 1-форма спинной связности (обычно спинная связность определяется как $\omega_\mu \varepsilon^{ab}$, где ε^{ab} – символ Леви-Чивита), ϵ – 2-форма объема, $D e^a = d e^a + \varepsilon^a_b \omega \wedge e^b$ – 2-форма кручения. Чтобы доказать эквивалентность [19], необходимо исключить вспомогательные поля ϕ_a и связанную с кручением часть ω с помощью алгебраических уравнений движения. Оставшаяся после этого часть действия зависит от e^a только через метрику $g_{\mu\nu} = e^a_\mu e_{\nu a}$ и действительно эквивалентна (7). Доказательство квантовой эквивалентности [20] является более сложным.

Коммутативные дилатонные гравитации в размерности $D = 2$ успешно использовались для понимания таких сложных задач, как гравитационный коллапс, информационный парадокс и квантование гравитации. В некоммутативном случае только модель Джакива–Тейтелбойма рассматривалась достаточно подробно как в классическом [21], так и в квантовом [22] случаях. Отметим также альтернативный подход [23] к некоммутативной геометрии в размерности $D = 2$, который не использует конкретного вида действия.

В настоящей работе мы строим другую двумерную некоммутативную дилатонную гравитацию, которая представляет собой деформацию конформно преобразованной струнной гравитации, и анализируем ее калибровочные симметрии, используя канонический анализ, предложенный ниже.

2. КАНОНИЧЕСКАЯ СКОБКА

Фазовое пространство на многообразии $\mathcal{M}$ состоит из переменных r_j , которые можно разбить на канонические пары q, p , и переменных α , которые не имеют канонических партнеров (они играют роль лагранжевых множителей или калибровочных параметров). Определим скобку (r_j, r_k) равной ± 1 для канонических пар,

$$(q_a, p^b) = -(p^b, q_a) = \delta_a^b, \quad (15)$$

и нулю в других случаях (например, $(\alpha, p) = (p^a, p^b) = 0$). Согласно этому определению скобка (6) имеет вид $\{r_i(x), r_j(x')\} = (r_i, r_j) \delta(x - x')$. Заметим, что мы не будем использовать скобок между двумя локальными выражениями (см. обсуждение ниже).

Теперь можно определить каноническую скобку между $\star$ -локальными функциями на фазовом пространстве. Определим *пространство $\star$ -локальных выражений* как подходящее замыкание пространства свободных многочленов от переменных фазового пространства r_j и их производных, вычисленных с помощью

$\star$ -произведения Мояла. Такие выражения, проинтегрированные по $\mathcal{M}$, мы называем $\star$ -локальными функционалами.

Локальность не играет здесь важной роли, поскольку после замыкания можно прийти к выражениям с произвольным числом явных производных (в дополнение к тем, которые входят неявно через $\star$ -произведение Мояла). Важно, что все выражения можно аппроксимировать произведением только одного типа (произведением Мояла), при этом не появляются смешанных выражений с $\star$ -произведениями и обыкновенными произведениями. Следует также определить, что означает “подходящее замыкание”, т.е. фиксировать топологию на пространстве функционалов. Этот вопрос связан с ограничениями, которые мы накладываем на переменные фазового пространства. Например, скобка двух допустимых функционалов (см. формулу (17) ниже) снова должна быть допустимым функционалом. Из этого следует, что все подынтегральные выражения являются хорошо определенными, а все интегралы сходятся. Более сильные ограничения на переменные фазового пространства означают более слабые ограничения на функционалы, и наоборот. Такой анализ нельзя проделать, не сказав несколько слов о многообразии $\mathcal{M}$ (или, по крайней мере, о его компактности)³⁾. В данной статье мы не стремимся провести такой анализ (откладывая его до будущих работ). Все утверждения, сделанные ниже, верны по крайней мере для $r \in C^\infty$ и для полиномиальных функционалов (вообще без замыкания).

Очевидно, достаточно определить скобку для мономиальных функционалов и расширить ее на все пространство по линейности. В общем случае два таких мономиальных функционала имеют вид

$$R = \int d^D x \partial_{\kappa_1} r_1 \star \partial_{\kappa_2} r_2 \star \cdots \star \partial_{\kappa_n} r_n, \quad \tilde{R} = \int d^D x \partial_{\tilde{\kappa}_1} \tilde{r}_1 \star \partial_{\tilde{\kappa}_2} \tilde{r}_2 \star \cdots \star \partial_{\tilde{\kappa}_m} \tilde{r}_m, \quad (16)$$

где κ_j – мультииндекс, а ∂_{κ_j} – дифференциальный оператор порядка $|\kappa_j|$. Модифицированная каноническая скобка двух мономов определяется уравнением

$$\{R, \tilde{R}\} = \sum_{i,j} \int d^D x \partial_{\kappa_j} (\partial_{\kappa_{j+1}} r_{j+1} \star \cdots \star \partial_{\kappa_{j-1}} r_{j-1}) (r_j, \tilde{r}_i) \star \star \partial_{\tilde{\kappa}_i} (\partial_{\tilde{\kappa}_{i+1}} \tilde{r}_{i+1} \star \cdots \star \partial_{\tilde{\kappa}_{i-1}} \tilde{r}_{i-1}) (-1)^{|\kappa_j| + |\tilde{\kappa}_i|}. \quad (17)$$

Другими словами, чтобы вычислить скобку между двумя мономами, следует: 1) взять все пары $r_j, \tilde{r}_i$; 2) использовать циклические перестановки в подынтегральных выражениях, чтобы переместить r_j на последнее место, а $\tilde{r}_i$ – на первое; 3) проинтегрировать по частям, чтобы убрать производные из r_j и $\tilde{r}_i$; 4) удалить r_j и $\tilde{r}_i$, поставить подынтегральные выражения, связанные через $\star$ -произведение Мояла и умноженные на $(r_j, \tilde{r}_i)$, одно после другого; 5) проинтегрировать по $\mathcal{M}$. В действительности это в точности дает процедуру, используемую в обычных коммутативных теориях, с точностью до следующих из некоммутативности неоднозначностей с упорядочением.

³⁾Некоторые ограничения на $\mathcal{M}$ следуют уже из существования произведения Мояла, которое требует существования глобальной системы координат по крайней мере в некоммутативных направлениях.

Следующая теорема показывает, что операция, которую мы только что определили, действительно дает пуассонову структуру на пространстве $\star$ -локальных функционалов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть R , $\tilde{R}$ и $\hat{R}$ — $\star$ -локальные функционалы на фазовом пространстве. Тогда справедливы:

- 1) свойство антисимметрии $\{R, \tilde{R}\} = -\{\tilde{R}, R\}$;
- 2) тождество Якоби $\{\{R, \tilde{R}\}, \hat{R}\} + \{\{\hat{R}, R\}, \tilde{R}\} + \{\{\tilde{R}, \hat{R}\}, R\} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что поскольку мы не уточняли происхождение канонических переменных, то временная координата не играет важной роли, и приведенные выше утверждения почти следуют из стандартного анализа [8]. Однако поучительно представить здесь полное доказательство, поскольку оно показывает, что не требуется переписывать $\star$ -произведение через бесконечный ряд по производным (так что $\star$ -произведение действительно играет роль умножения). Как и раньше, достаточно исследовать случай, когда все функционалы являются мономиальными. Тогда утверждение 1 следует из выражения (17) и соотношения $(r_j, r_k) = -(r_k, r_j)$. Пусть

$$\hat{R} = \int d^D x \partial_{\hat{\kappa}_1} \hat{r}_1 \star \partial_{\hat{\kappa}_2} \hat{r}_2 \star \cdots \star \partial_{\hat{\kappa}_p} \hat{r}_p. \quad (18)$$

Рассмотрим скобку $\{\{R, \tilde{R}\}, \hat{R}\}$. Внутренняя скобка уже “задействовала” некоторые r_j и $\tilde{r}_i$. В повторной скобке используется переменная со шляпкой и другая переменная или из R , или из $\tilde{R}$. Рассмотрим сначала члены в повторной скобке, в которых некоторые переменные из R используются дважды. Все такие члены собираются в сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i,k,j \neq l} (-1)^{|\hat{\kappa}_i|+|\hat{\kappa}_k|} (r_j, \tilde{r}_i)(r_l, \hat{r}_k) \int d^D x \partial_{\kappa_{l+1}} r_{l+1} \star \cdots \star \partial_{\kappa_{j-1}} r_{j-1} \star \\ \star \partial_{\kappa_j + \hat{\kappa}_i} (\partial_{\hat{\kappa}_{i+1}} \tilde{r}_{i+1} \star \cdots \star \partial_{\hat{\kappa}_{i-1}} \tilde{r}_{i-1}) \star \partial_{\kappa_{j+1}} r_{j+1} \star \cdots \star \partial_{\kappa_{l-1}} r_{l-1} \star \\ \star \partial_{\kappa_l + \hat{\kappa}_k} (\partial_{\hat{\kappa}_{k+1}} \hat{r}_{k+1} \star \cdots \star \partial_{\hat{\kappa}_{k-1}} \hat{r}_{k-1}). \end{aligned}$$

Это сложное выражение симметрично относительно обмена ролями между переменными со шляпками и переменными с тильдами. Поэтому ясно, что члены, имеющие две скобки с r в $\{\{\hat{R}, R\}, \tilde{R}\}$, имеют точно такой же вид, что и выше, но со знаком минус. Такие члены (с двумя скобками с r) не могут появляться в $\{\{\tilde{R}, \hat{R}\}, R\}$. Поэтому члены такого типа сокращаются в выражении $\{\{R, \tilde{R}\}, \hat{R}\} + \{\{\hat{R}, R\}, \tilde{R}\} + \{\{\tilde{R}, \hat{R}\}, R\}$. Повторяя те же рассуждения для $\hat{r}$ и $\tilde{r}$, мы доказываем утверждение 2.

Можно определить каноническую скобку между функционалами и плотностями ($\star$ -локальными выражениями) с помощью уравнения

$$\{R, h(r)(x)\} := \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \left\{ R, \int d^D y \beta(y) \star h(r)(y) \right\}. \quad (19)$$

Чтобы построить скобки между двумя плотностями (т.е. задать подходящее расширение скобки (6) на нелинейные функции), следует определить $\star$ -произведение

с дельта-функциями, что может оказаться весьма нетривиальной задачей. Мы не будем использовать скобки между плотностями.

Чтобы использовать каноническую скобку при вычислении вариаций, нам требуется следующая лемма.

ЛЕММА. Пусть p^a и q_b гладко зависят от параметра τ . Мы предполагаем, что переменные $\alpha(x)$ (те, которые не имеют канонически сопряженных) не зависят от τ . Пусть $h(r(\tau))$ – $\star$ -локальное выражение на фазовом пространстве. Тогда

$$\begin{aligned} \partial_\tau \int d^D x \beta \star h(r(\tau)) &= \int d^D x \left((\partial_\tau q_a) \star \left\{ \int d^D y \beta \star h(r), p^a(x) \right\} - \right. \\ &\quad \left. - (\partial_\tau p^a) \star \left\{ \int d^D y \beta \star h(r), q_a(x) \right\} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что достаточно доказать эту лемму при $\beta = 1$. Сначала рассмотрим случай, когда ровно одна из канонических переменных (например, p^b только для одного значения b) зависит от τ и когда $h(r) = h_1(r) \star \partial_\kappa p^b \star h_2(r)$, где ни h_1 , ни h_2 не зависят от p^b . Тогда

$$\partial_\tau \int d^D x h(r) = \int d^D x h_1 \star \partial_\kappa (\partial_\tau p^b) \star h_2 = (-1)^{|\kappa|} \int d^D x \partial_\kappa (h_2 \star h_1) \star \partial_\tau p^b. \quad (21)$$

С другой стороны, используя формулу (17), получаем

$$\left\{ \int d^D x h(r), \int d^D y \beta(y) \star q_b(y) \right\} = -(-1)^{|\kappa|} \int d^D x \partial_\kappa (h_2 \star h_1) \star \beta. \quad (22)$$

Далее используем выражение (19), чтобы показать, что утверждение леммы действительно верно для упрощенного случая, который мы рассматриваем. В общем случае следует суммировать множество индивидуальных вкладов в обе части выражения (20) от различных канонических переменных, занимающих разные места в h . Каждый из этих вкладов можно рассматривать так же, как описано выше.

В качестве приложения рассмотрим некоммутативную теорию поля, описываемую действием

$$S = \int (p^a \partial_t q_a - h(p, q, \lambda)) d^D x = \int p^a \partial_t q_a d^D x - H, \quad (23)$$

где h – $\star$ -локальное выражение, в которое производные по времени входят только неявно, т.е. через $\star$ -произведение Мoyalа. Заметим, что в соответствии с (3) знак $\star$ -произведения между p^a и $\partial_t q_a$ можно опустить. Если учитывать только явные производные по времени, можно записать $p^a = \delta S / (\delta \partial_t q_a)$. Тогда получим

$$H = S - \int p \partial_t q d^D x.$$

Уравнения движения, порожденные действием (23) путем взятия вариаций по q и p , можно записать в “каноническом” виде:

$$\partial_t p^a + \{H, p^a\} = 0, \quad \partial_t q_a + \{H, q_a\} = 0. \quad (24)$$

Это легко показать, полагая $q(\tau) = q + \tau\delta q$ и $p(\tau) = p + \tau\delta p$ и используя доказанную лемму. На переменную λ не действуют явные производные по времени. В коммутативной теории λ порождает связи.

3. СВЯЗИ И КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ

Зададим вид действия (23):

$$S = \int (p^a \partial_t q_a - \lambda^j \star G_j(p, q) - h(p, q)) d^D x. \quad (25)$$

Будем называть функционал $G_j(p, q)$ связью, хотя из-за присутствия $\star$ -произведения Мояла этот функционал нельзя интерпретировать как условие, определенное на пространственно-подобной поверхности. Дираковскую классификацию связей также можно реализовать с помощью модифицированной канонической скобки. Будем говорить, что связи $G_j(p, q)$ являются связями первого рода, если их скобки с $h(p, q)$ и скобки между собой снова являются связями, т.е.

$$\begin{aligned} \left\{ \int d^D x \alpha^i \star G_i, \int d^D x \beta^j \star G_j \right\} &= \int d^D x C(p, q; \alpha, \beta)^k \star G_k, \\ \left\{ \int d^D x \alpha^i \star G_i, \int d^D x h(p, q) \right\} &= \int d^D x B(p, q; \alpha)^k \star G_k. \end{aligned} \quad (26)$$

Согласно утверждению 1 теоремы 1 структурные функции антисимметричны, $C(p, q; \alpha, \beta)^j = -C(p, q; \beta, \alpha)^j$. Дальнейшие ограничения на C и B следуют из тождеств Якоби (см. утверждение 2 теоремы 1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G_i(p, q)$ – связи первого рода (так что соотношения (26) выполнены). Тогда преобразования

$$\delta p^a = \left\{ \int d^D x \alpha^j \star G_j, p^a \right\}, \quad (27)$$

$$\delta q_b = \left\{ \int d^D x \alpha^j \star G_j, q_b \right\}, \quad (28)$$

$$\delta \lambda^j = -\partial_t \alpha^j - C(p, q; \alpha, \lambda)^j - B(p, q; \alpha)^j \quad (29)$$

при произвольном α^j являются калибровочными симметриями действия (25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать эту теорему, просто проверим инвариантность действия (25) относительно преобразований (27)–(29). Пусть $f(p, q)$ – произвольное $\star$ -локальное выражение, зависящее только от канонических переменных p и q . Тогда согласно (27) и (28) имеем

$$\delta f(p, q) = \left\{ \int d^D x \alpha^j \star G_j, f(p, q) \right\}. \quad (30)$$

Теперь очевидно, что преобразования G и h в действии (25) компенсируются соответственно вторым и третьим членами в выражении для $\delta \lambda$. Остающийся в действии

член преобразуется как

$$\begin{aligned}
 \delta \int d^D x p^a \partial_t q_a &= \\
 &= \int d^D x \left(\left\{ \int d^D y \alpha^j \star G_{j, p^a}(x) \right\} \star \partial_t q_a + p^a \star \partial_t \left\{ \int d^D y \alpha^j \star G_{j, q_a}(x) \right\} \right) = \\
 &= \int d^D x \left(\left\{ \int d^D y \alpha^j \star G_{j, p^a}(x) \right\} \star \partial_t q_a - (\partial_t p^a) \star \left\{ \int d^D y \alpha^j \star G_{j, q_a}(x) \right\} \right) = \\
 &= \int d^D x \alpha^j \star \partial_t G_j = - \int d^D x \partial_t (\alpha^j) \star G_j.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Здесь мы воспользовались интегрированием по частям и доказанной выше леммой. Последнее слагаемое в (31) компенсируется первым (градиентным) слагаемым в вариации (29). Поэтому действие (25) действительно инвариантно относительно преобразований (27)–(29).

Сравним метод, развитый в настоящей работе, с формализмом Остроградского для теорий с высшими производными по времени. В этом формализме [14], [9] вводятся новые переменные в фазовом пространстве $P(t, T) = p(t + T)$ и $Q(t, T) = q(t + T)$. При этом t интерпретируется как параметр эволюции, а T нумерует степени свободы (число степеней свободы пропорционально порядку производных по времени). Тогда в правой части скобок Пуассона между Q и P , вычисленных при одном и том же значении t , естественным образом возникает дельта-функция $\delta(T - T')$. Возвращаясь (наивным образом) к исходным переменным q и p , получаем выражение (6). При использовании подхода работы [9] действуют другим способом. Получающаяся динамическая система интерпретируется как система с бесконечным числом связей второго рода. Дополнительные связи первого рода привели бы к значительному усложнению этой процедуры. Может случиться так, что эти два подхода окажутся эквивалентными, но этот вопрос требует дальнейших исследований.

4. НЕКОММУТАТИВНАЯ ГРАВИТАЦИЯ В РАЗМЕРНОСТИ $D = 2$

В работе [24] мы рассмотрели пример двумерной топологической некоммутативной калибровочной теории⁴⁾, которая эквивалентна некоммутативной версии [21] гравитации Джакива–Тейтелбойма [16]. Это была единственная некоммутативная гравитация в размерности $D = 2$, известная к тому моменту. В этом разделе мы построим новую модель и проанализируем ее калибровочные симметрии.

Рассмотрим действие

$$S = \frac{1}{4} \int d^2 x \varepsilon^{\mu\nu} [\phi_{ab} \star R_{\mu\nu}^{ab} - 2\varepsilon_{ab} \Lambda e_\mu^a \star e_\nu^b - 2\phi_a \star T_{\mu\nu}^a] \tag{32}$$

с тензором кривизны

$$R_{\mu\nu}^{ab} = \varepsilon^{ab} \left(\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + \frac{i}{2} [\omega_\mu, b_\nu] + \frac{i}{2} [b_\mu, \omega_\nu] \right) + \eta^{ab} \left(i \partial_\mu b_\nu - i \partial_\nu b_\mu + \frac{1}{2} [\omega_\mu, \omega_\nu] - \frac{1}{2} [b_\mu, b_\nu] \right) \tag{33}$$

⁴⁾В случае пространственно-пространственной некоммутативной теории аналогичные вычисления были проделаны в работе [25].

и с некоммутативным кручением

$$T_{\mu\nu}^a = \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \frac{1}{2}\varepsilon^a{}_b([\omega_\mu, e_\nu^b]_+ - [\omega_\nu, e_\mu^b]_+) + \frac{i}{2}([b_\mu, e_\nu^a] - [b_\nu, e_\mu^a]), \quad (34)$$

где $[\cdot, \cdot]_+$ обозначает антикоммутатор. Поля ϕ и ψ комбинируются как

$$\phi_{ab} := \phi\varepsilon_{ab} - i\eta_{ab}\psi. \quad (35)$$

Как коммутаторы, так и антикоммутаторы вычисляются с помощью $\star$ -произведения Мояла. Некоммутативные кривизна и кручение были получены в работе [21].

Используем тензор $\eta^{ab} = \eta_{ab} = \text{diag}(+1, -1)$ для поднятия и опускания индексов. Тензор Леви-Чивита определяется как $\varepsilon^{01} = -1$, так что выполнены соотношения

$$\varepsilon^{10} = \varepsilon_{01} = 1, \quad \varepsilon^0{}_1 = \varepsilon^1{}_0 = -\varepsilon_0{}^1 = -\varepsilon_1{}^0 = 1. \quad (36)$$

Эти соотношения выполняются как для ε^{ab} , так и для $\varepsilon^{\mu\nu}$. Заметим, что $\varepsilon^{\mu\nu}$ всегда используется с двумя поднятыми индексами.

В коммутативном пределе поля b_μ и ψ отщепляются и действие становится эквивалентно (14) при $U = 0$ и при $V = \tilde{V}$, заданном выражением (13).

Чтобы замкнуть калибровочную алгебру в некоммутативном случае, обычно требуется дополнительное калибровочное поле $U(1)$. Это поле может играть и другую роль: добавляя дополнительное абелево калибровочное поле, можно преодолеть теорему несуществования [26] для дилатонного действия для так называемой точной струнной черной дыры [27] и построить подходящее действие с расширенным набором полей [28].

Важно доказать, что модель (32) действительно имеет правильное число калибровочных симметрий. Согласно нашему анализу достаточно показать, что алгебра связей действительно замыкается относительно скобки (17). Можно переписать выражение (32) в каноническом виде (ср. (25)):

$$S = \int d^2x (p^i \partial_0 q_i - \lambda^i \star G_i), \quad (37)$$

где $q_i = (e_1^a, \omega_1, b_1)$, $p^i = (\phi_a, \phi, -\psi)$, $\lambda^i = (e_0^a, \omega_0, b_0)$. Связи имеют вид

$$\begin{aligned} G_a &= -\partial_1 \phi_a + \frac{1}{2}\varepsilon^b{}_a[\omega_1, \phi_b]_+ + \frac{i}{2}[\phi_a, b_1] - \Lambda\varepsilon_{ab}e_1^b, \\ G_3 &= -\partial_1 \phi + \frac{i}{2}[\phi, b_1] + \frac{i}{2}[\psi, \omega_1] - \frac{1}{2}\varepsilon^a{}_b[\phi_a, e_1^b]_+, \\ G_4 &= \partial_1 \psi - \frac{i}{2}[\psi, b_1] + \frac{i}{2}[\phi, \omega_1] + \frac{i}{2}[\phi_a, e_1^a]. \end{aligned} \quad (38)$$

Следующие формулы выполнены при произвольной операции следа на операторной алгебре. В нашем случае этот след представляет собой просто пространственно-временной интеграл:

$$\begin{aligned} \text{Tr}([A_1, B_1][B_2, A_2] - [B_1, A_2][A_1, B_2]) &= -\text{Tr}([A_1, A_2][B_1, B_2]), \\ \text{Tr}([A_1, B_1]_+[A_2, B_2]_+ - [A_1, B_2]_+[A_2, B_1]_+) &= -\text{Tr}([A_1, A_2][B_1, B_2]), \\ \text{Tr}([A_1, B_1]_+[B_2, A_2] - [B_1, A_2]_+[A_1, B_2]) &= \text{Tr}([B_1, B_2][A_1, A_2]_+). \end{aligned} \quad (39)$$

Эти формулы позволяют преобразовать скобки к факторизованному виду $\int C(\alpha, \beta) \star G(p, q)$. Алгебра связей действительно замыкается и приобретает вид

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \int d^2x \alpha^a \star G_a, \int d^2x \beta^b \star G_b \right\} = 0, \\
 & \left\{ \int d^2x \alpha \star G_3, \int d^2x \beta \star G_3 \right\} = \frac{i}{2} \int d^2x [\alpha, \beta] \star G_4, \\
 & \left\{ \int d^2x \alpha \star G_4, \int d^2x \beta \star G_4 \right\} = -\frac{i}{2} \int d^2x [\alpha, \beta] \star G_4, \\
 & \left\{ \int d^2x \alpha \star G_3, \int d^2x \beta \star G_4 \right\} = -\frac{i}{2} \int d^2x [\alpha, \beta] \star G_3, \\
 & \left\{ \int d^2x \alpha \star G_3, \int d^2x \beta^a \star G_a \right\} = -\frac{1}{2} \int d^2x [\alpha, \beta^a]_+ \varepsilon^b_a \star G_b, \\
 & \left\{ \int d^2x \alpha \star G_4, \int d^2x \beta^a \star G_a \right\} = -\frac{i}{2} \int d^2x [\alpha, \beta^a] \star G_a.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Легко найти калибровочные симметрии действия. Преобразования, порожденные G_a , имеют вид

$$\begin{aligned}
 \delta e_\mu^a &= -\partial_\mu \alpha^a - \frac{1}{2} \varepsilon^a_c [\omega_\mu, \alpha_c]_+ - \frac{i}{2} [b_1, \alpha^a], \\
 \delta \omega_\mu &= \delta b_\mu = 0, \\
 \delta \phi &= \frac{1}{2} \varepsilon^b_a [\alpha^a, \phi_b]_+, \quad \delta \psi = -\frac{i}{2} [\alpha^a, \phi_a], \\
 \delta \phi_a &= -\Lambda \alpha^b \varepsilon_{ba}.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Связь G_3 порождает преобразования

$$\begin{aligned}
 \delta e_\mu^a &= \frac{1}{2} \varepsilon^a_b [e_\mu^b, \beta]_+, \quad \delta b_\mu = \frac{i}{2} [\omega_\mu, \beta], \\
 \delta \omega_\mu &= -\partial_\mu \beta - \frac{i}{2} [b_\mu, \beta], \\
 \delta \phi_a &= -\frac{1}{2} \varepsilon^c_a [\beta, \phi_c]_+, \quad \delta \phi = \frac{1}{2} [\beta, \psi], \quad \delta \psi = -\frac{i}{2} [\beta, \phi].
 \end{aligned} \tag{42}$$

Калибровочные симметрии, порожденные G_4 , имеют вид

$$\begin{aligned}
 \delta e_\mu^a &= -\frac{i}{2} [e_\mu^a, \gamma], \quad \delta \omega_\mu = -\frac{i}{2} [\omega_\mu, \gamma], \\
 \delta b_\mu &= -\partial_\mu \gamma - \frac{i}{2} [b_\mu, \gamma], \\
 \delta \phi_a &= \frac{i}{2} [\gamma, \phi_a], \quad \delta \phi = \frac{i}{2} [\gamma, \phi], \quad \delta \psi = \frac{i}{2} [\gamma, \psi].
 \end{aligned} \tag{43}$$

В выражениях (41)–(43) функции α^a , β и γ обозначают параметры калибровочных преобразований.

В коммутативном пределе преобразования (41) и (42) становятся эквивалентными диффеоморфизмам и локальным преобразованиям Лоренца с точностью до зависящего от полей переопределения параметров (симметрия (43) полностью отщепляется). Поэтому можно сказать, что калибровочные симметрии некоммутативного

действия (32) содержат некоммутативные деформации групп Лоренца и диффеоморфизмов. Этот факт является достаточно нетривиальным, поскольку константа $\theta_{\mu\nu}$ остается постоянной при преобразованиях. Более подробное обсуждение некоммутативных диффеоморфизмов в размерности $D = 2$ можно найти в работе [21]. К сожалению, пока неясно, как построить калибровочно-инвариантный элемент длины.

Чтобы деформировать черную дыру Виттена, можно использовать ее формулировку как теорию Весса–Зумино–Новикова–Виттена (ВЗНВ). Некоммутативная формулировка $U(2)/U(1)$ модели ВЗНВ была построена в работе [29], где не анализируются гравитационные аспекты модели. Остается неясным, является ли деформация, рассматриваемая в работе [29], эквивалентной деформации, представленной выше. Действие (32) можно получить и как сингулярный предел некоммутативной модели Джакива–Тейтелбойма [21]. Доказательство того, что калибровочные симметрии сохраняются в этом пределе, находится на том же уровне сложности, что и прямой анализ, представленный выше.

Несколько неожиданно оказывается, что построение правильной некоммутативной деформации классического действия с правильным числом калибровочных симметрий представляет собой наиболее сложную часть работы. Оказывается, что анализ классического решения выполняется непосредственно. Действительно, наложим калибровочное условие

$$e_0^+ = 0, \quad e_0^- = 1, \quad \omega_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad (44)$$

где $e_\mu^\pm = 2^{-1/2}(e_\mu^0 \pm e_\mu^1)$. Тогда, как легко видеть, уравнения движения становятся линейными и модель можно решить непосредственно. Поэтому классический анализ некоммутативной модели, рассматриваемой в настоящей работе, аналогичен тому, который проводится в коммутативном случае (подробнее см. [15]). Однако проблемой остается переход между различными формулировками дилатонных гравитаций. Например, неясно, как следует обобщить на некоммутативный случай зависящее от дилатона конформное преобразование, описанное в разделе 1.

Калибровочное условие (44) является главной технической составляющей точного квантования двумерных коммутативных дилатонных гравитаций [20] с помощью интеграла по траекториям. В случае некоммутативной модели Джакива–Тейтелбойма это калибровочное условие также позволяет точно вычислить интеграл по траекториям [22]. Добавление к этому формализму полей материи [30] может вызвать сложности.

В заключение этого раздела сделаем несколько замечаний о возможности пертурбативных вычислений в некоммутативных теориях гравитации при фиксированных фоновых полях. По крайней мере в однопетлевом порядке метод ядра теплопроводности [31] представляется адекватным средством. Недавно разложение ядра теплопроводности было обобщено на плоские пространства Мойла [32]. Даже на искривленных многообразиях Мойла можно вычислить главные коэффициенты ядра теплопроводности и построить обобщение действия Полякова [22]. Важно, что

оператор, описывающий квантовые флуктуации, содержит только левые или только правые $\star$ -умножения. Если одновременно присутствуют оба типа умножения, то, как представляется, разложение ядра теплопроводности претерпевает существенные модификации [33] из-за смешивания ультрафиолетового и инфракрасного масштабов, обнаруженного ранее в диаграммах Фейнмана [34].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы предложили модификацию скобки Пуассона, определяемой на полях с различными значениями временной координаты. В этом модифицированном каноническом формализме только явные производные по времени (т.е. те, которые не “спрятаны” в умножении Мoyalа) определяют каноническую структуру. Хотя это означает серьезные отклонения от стандартных канонических методов, получающиеся скобки по-прежнему удовлетворяют тождествам Якоби (теорема 1) и порождают классические уравнения движения. Наш основной результат (теорема 2) состоит в том, что по-прежнему можно определить понятие связей первого рода, которые порождают калибровочные симметрии, и эти симметрии выписываются явно⁵⁾. Интересно было бы построить классический БРСТ-формализм исходя из нашей скобки. В любом случае важно восстановить доброе имя теорий с пространственно-временной некоммутативностью. Этого требуют не только принципы симметрии между пространством и временем, но также и интересные физические явления, которые возникают вследствие пространственно-временной некоммутативности (в качестве примера можно упомянуть рождение связанных состояний со спектрами адронного типа [36]). Чтобы избежать недоразумений, подчеркнем, что наш анализ является чисто классическим. Неясно, можно ли вообще использовать наши скобки при квантовании.

В качестве примера применения канонического формализма мы рассмотрели некоммутативную гравитацию и построили новую деформированную дилатонную гравитацию в размерности $D = 2$ (являющуюся конформно преобразованной струнной гравитацией). С наивной точки зрения следовало бы ожидать, что присутствие константы $\theta_{\mu\nu}$ разрушает часть симметрий (и это действительно происходит в негравитационных некоммутативных теориях). Однако в нашем случае имеется в точности правильное число калибровочных симметрий в деформированной теории. По-видимому, некоммутативность естественным образом приводит к гравитации, так же как гравитация естественным образом приводит к некоммутативности [2].

Благодарности. Настоящая работа основана на лекциях, прочитанных во время Летней школы по современной математической физике (Дубна) и Международной школы им. В. А. Фока (Санкт-Петербург). Я благодарен А. Т. Филиппову, В. Ю. Новожилову и Ю. В. Новожилову за их дружеское гостеприимство. Большую

⁵⁾Само по себе существование симметрий не является большой неожиданностью ввиду результатов работы [35], которые справедливы для теорий с производными по времени произвольного (но конечного!) порядка. Важной особенностью настоящего подхода являются достаточно простые явные формулы, аналогичные формулам для случая коммутативных теорий с производными по времени первого порядка.

пользу мне принесли многочисленные обсуждения с Д. Грумиллером. Данная работа выполнена при частичной финансовой поддержке DFG (проект ВО 1112/12-2) и многостороннего исследовательского проекта “Квантовая гравитация, космология и категорификация” Австрийской академии наук и Национальной академии наук Украины.

Список литературы

- [1] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov, *Rev. Mod. Phys.*, **73** (2001), 977; [hep-th/0106048](#); R. J. Szabo, *Phys. Rep.*, **378**:4 (2003), 207; [hep-th/0109162](#).
- [2] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, *Phys. Lett. B*, **331** (1994), 39.
- [3] N. Seiberg, L. Susskind, N. Toumbas, *JHEP*, **0006** (2000), 044; [hep-th/0005015](#); J. Gomis, T. Mehen, *Nucl. Phys. B*, **591** (2000), 265; [hep-th/0005129](#); L. Alvarez-Gaumé, J. L. F. Barbón, *Int. J. Mod. Phys. A*, **16** (2001), 1123; [hep-th/0006209](#); L. Alvarez-Gaumé, J. L. F. Barbón, R. Zwicky, *JHEP*, **0105** (2001), 057; [hep-th/0103069](#); C.-S. Chu, J. Lukierski, W. J. Zakrzewski, *Nucl. Phys. B*, **632** (2002), 219; [hep-th/0201144](#).
- [4] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen, G. Piacitelli, *Phys. Lett. B*, **533** (2002), 178; [hep-th/0201222](#); C. Rim, J. H. Yee, *Phys. Lett. B*, **574** (2003), 111; [hep-th/0205193](#); Y. Liao, K. Sibold, *Eur. Phys. J. C*, **25** (2002), 479; [hep-th/0206011](#); P. Heslop, K. Sibold, *Eur. Phys. J. C*, **41** (2005), 545; [hep-th/0411161](#).
- [5] T. Reichenbach, *Phys. Lett. B*, **606** (2005), 403; [hep-th/0411127](#).
- [6] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan, C. Molina, P. Teotonio-Sobrinho, *JHEP*, **0410** (2004), 072; [hep-th/0406125](#).
- [7] K. Fujikawa, *Phys. Rev. D*, **70** (2004), 085006; [hep-th/0406128](#).
- [8] Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, М., 1986; M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton, 1992.
- [9] J. Gomis, K. Kamimura, J. Llosa, *Phys. Rev. D*, **63** (2001), 045003; [hep-th/0006235](#).
- [10] A. Gerhold, J. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, M. Schweda, R. Wulkenhaar, *The energy-momentum tensor on noncommutative spaces – some pedagogical comments*, [hep-th/0012112](#).
- [11] H. Grosse, R. Wulkenhaar, *Renormalisation of ϕ^4 -theory on noncommutative $\mathbb{R}^4$ to all orders*, [hep-th/0403232](#).
- [12] M. Chaichian, P. Kulish, K. Nishijima, A. Tureanu, *Phys. Lett. B*, **604** (2004), 98; [hep-th/0408069](#).
- [13] R. Jackiw, S.-Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 111603; [hep-th/0111122](#).
- [14] R. Marnelius, *Phys. Rev. D*, **10** (1974), 2535; J. Llosa, J. Vives, *J. Math. Phys.*, **35** (1994), 2856; R. P. Woodard, *Phys. Rev. A*, **62** (2000), 052105; [hep-th/0006207](#).
- [15] D. Grumiller, W. Kummer, D. V. Vassilevich, *Phys. Rep.*, **369**:4 (2002), 327; [hep-th/0204253](#).
- [16] C. Teitelboim, *Phys. Lett. B*, **126** (1983), 41; “The Hamiltonian structure of two-dimensional space-time and its relation with the conformal anomaly”, *Quantum Theory of Gravity*, ed. S. Christensen, Adam Hilger, Bristol, 1984, 327; R. Jackiw, “Liouville field theory: a two-dimensional model for gravity?”, *Quantum Theory of Gravity*, ed. S. Christensen, Adam Hilger, Bristol, 1984, 403; *Nucl. Phys. B*, **252** (1985), 343.
- [17] Б. М. Барбамов, В. В. Нестеренко, А. М. Червяков, *ТМФ*, **40** (1979), 15.
- [18] E. Witten, *Phys. Rev. D*, **44** (1991), 314; G. Mandal, A. M. Sengupta, S. R. Wadia, *Mod. Phys. Lett. A*, **6** (1991), 1685; S. Elitzur, A. Forge, E. Rabinovici, *Nucl. Phys. B*, **359** (1991), 581.
- [19] M. O. Katanaev, W. Kummer, H. Liebl, *Phys. Rev. D*, **53** (1996), 5609; [gr-qc/9511009](#).

- [20] W. Kummer, H. Liebl, D. V. Vassilevich, *Nucl. Phys. B*, **493** (1997), 491; [gr-qc/9612012](#).
- [21] S. Cacciatori, A. H. Chamseddine, D. Klemm, L. Martucci, W. A. Sabra, D. Zanon, *Class. Quant. Grav.*, **19** (2002), 4029; [hep-th/0203038](#).
- [22] D. V. Vassilevich, *Nucl. Phys. B*, **715** (2005), 695; [hep-th/0406163](#).
- [23] M. Buric, J. Madore, *Noncommutative 2-dimensional models of gravity*, [hep-th/0406232](#).
- [24] D. V. Vassilevich, *Canonical analysis of space-time noncommutative theories and gauge symmetries*, [hep-th/0409127](#).
- [25] R. Banerjee, *Phys. Rev. D*, **67** (2003), 105002; [hep-th/0210259](#).
- [26] D. Grumiller, D. V. Vassilevich, *JHEP*, **0211** (2002), 018; [hep-th/0210060](#).
- [27] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **371** (1992), 269.
- [28] D. Grumiller, *JHEP*, **0505** (2005), 028; [hep-th/0501208](#).
- [29] A. M. Ghezelbash, S. Parvizi, *Nucl. Phys. B*, **592** (2001), 408; [hep-th/0008120](#).
- [30] W. Kummer, H. Liebl, D. V. Vassilevich, *Nucl. Phys. B*, **544** (1999), 403; [hep-th/9809168](#).
- [31] D. V. Vassilevich, *Phys. Rep.*, **388** (2003), 279; [hep-th/0306138](#).
- [32] D. V. Vassilevich, *Lett. Math. Phys.*, **67:3** (2004), 185; V. Gayral, B. Iochum, *J. Math. Phys.*, **46** (2005), 043503; [hep-th/0402147](#).
- [33] V. Gayral, J. M. Gracia-Bondia, F. Ruiz Ruiz, *Phys. Lett. B*, **610** (2005), 141; [hep-th/0412235](#).
- [34] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk, N. Seiberg, *JHEP*, **0002** (2000), 020; [hep-th/9912072](#); I. Ya. Aref'eva, D. M. Belov, A. S. Koshelev, *Phys. Lett. B*, **476** (2000), 431; [hep-th/9912075](#); I. Chepelev, R. Roiban, *JHEP*, **0103** (2001), 001; [hep-th/0008090](#).
- [35] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, *Symmetries in constrained systems*, [hep-th/0409087](#).
- [36] D. V. Vassilevich, A. Yurov, *Phys. Rev. D*, **69** (2004), 105006; [hep-th/0311214](#).

Поступила в редакцию 10.08.2005