Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Джакив, Симметрия Вейля и теория Лиувилля, *ТМФ*,
2006, том 148, номер 1, 80–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2059>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 10:21:41

© 2006 г.

Р. Джакив*

СИММЕТРИЯ ВЕЙЛЯ И ТЕОРИЯ ЛИУВИЛЛЯ

Конформная инвариантность в плоском пространстве и инвариантность Вейля в искривленном пространстве простым образом связаны друг с другом в размерности больше двух. Рассмотрена особая ситуация – теория Лиувилля в размерности два.

Ключевые слова: теория Лиувилля, преобразования Вейля, локальность, действие.

1. ПОСВЯЩЕНИЕ

Я познакомился с профессором Юрием Новожиловым в декабре 1971 г. на конференции по математической физике, которая проводилась в Физическом институте им. П. Н. Лебедева в Москве. С тех пор я несколько раз был его гостем в Ленинграде/Санкт-Петербурге, последний раз в прошлом году на Школе Фока, проводившейся при поддержке UNESCO, где я читал лекции по динамике, инвариантной относительно преобразований Вейля. По случаю замечательного юбилея Ю. Новожилова я рад представить ему эту работу, посвященную инвариантности Вейля в размерности два и ее связи с конформной инвариантностью и вейлевскими/конформными симметриями в высших размерностях.

2. КОНФОРМНАЯ И ВЕЙЛЬ-ИНВАРИАНТНАЯ ДИНАМИКА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ПРИ $d > 2$

Начнем с того, что запишем d -мерную лагранжеву плотность для скалярного поля φ с масштабн- и конформно-инвариантным самодействием

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \lambda \varphi^{2d/(d-2)}. \quad (2.1)$$

Очевидно, что это выражение имеет смысл только при $d \neq 2$, мы будем считать, что $d > 2$. Теория инвариантна относительно преобразований

$$\delta \varphi = f^\alpha \partial_\alpha \varphi + \frac{d-2}{2d} \partial_\alpha f^\alpha \varphi, \quad (2.2)$$

*Center for Theoretical Physics Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, MA, USA. E-mail: jackiw@lns.mit.edu

где f^α – конформный вектор Киллинга (в плоском пространстве). Обычный канонический тензор энергии–импульса

$$\theta_{\mu\nu}^{\text{canonical}} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - \lambda \varphi^{2d/(d-2)} \right) \quad (2.3)$$

сохраняется и является симметричным, как это и должно быть в пуанкаре-инвариантной теории. Однако он не является бесследовым: $\eta^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu}^{\text{canonical}} \neq 0$. Тем не менее, вследствие конформной инвариантности (2.2) тензор $\theta_{\mu\nu}^{\text{canonical}}$ можно улучшить путем добавления еще одного сохраняющегося и симметричного выражения, так что новый тензор становится бесследовым [1]:

$$\theta_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu}^{\text{canonical}} + \frac{d-2}{4(d-1)} (\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \varphi^2, \quad \eta^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} = 0. \quad (2.4)$$

Вариационный вывод канонического тензора (2.3) становится возможным после того, как в теорию (2.1) вводится минимальное взаимодействие с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, а интеграл действия варьируется по $g^{\mu\nu}$. Тензор $\theta_{\mu\nu}^{\text{canonical}}$ воспроизводится в пределе $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$. Можно также аналогичным образом вывести улучшенный тензор (2.4), если выражение (2.1), обобщенное на случай искривленного пространства, расширить посредством специального неминимального взаимодействия [1]:

$$\mathcal{L} = \frac{d-2}{8(d-1)} R \varphi^2 + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \lambda \varphi^{2d/(d-2)}, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{|g|} \mathcal{L} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - \lambda \varphi^{2d/(d-2)} \right) + \\ &+ \frac{d-2}{4(d-1)} (g_{\mu\nu} D^2 - D_\mu D_\nu + G_{\mu\nu}) \varphi^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна, R – скаляр Риччи, $R = 2/(2-d) g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$, а D_μ – ковариантная производная. В пределе $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ неминимальный член в выражении для $\mathcal{L}$ обращается в нуль, однако в вариации $g^{\mu\nu}$ он сохраняется:

$$T_{\mu\nu} \xrightarrow{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} \theta_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Заметим, что $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 0$ в силу полевого уравнения для φ

$$D^2 \varphi + \lambda \frac{2d}{d-1} \varphi^{(d+2)/(d-2)} - \frac{d-2}{4(d-1)} R \varphi = 0. \quad (2.8)$$

Это обеспечивает обращение в нуль величины $\eta^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu}$.

Точное выражение для неминимального взаимодействия приводит к инвариантности действия в искривленном пространстве относительно преобразований Вейля, включающих произвольную функцию σ [2]:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma} g_{\mu\nu}, \quad (2.9a)$$

$$\varphi \rightarrow e^{(2-d)\sigma/2} \varphi. \quad (2.9b)$$

Самодействие инвариантно относительно преобразований (2.9). При этом кинетический член и член, связанный с неминимальным взаимодействием, не инвариантны по отдельности, однако их нетривиальные вариации при преобразованиях Вейля сокращаются при суммировании. Из инвариантности действия относительно преобразования Вейля также следует бесследовость его $g^{\mu\nu}$ -вариации, т.е. бесследовость $T_{\mu\nu}$, равно как его инвариантность относительно диффеоморфизмов, обеспечивает симметрию и ковариантное сохранение $T_{\mu\nu}$.

Таким образом, мы видим, что инвариантность относительно преобразований Вейля (и относительно диффеоморфизмов) в искривленном пространстве тесно связана с конформной инвариантностью в плоском пространстве [2]. Однако всегда ли конформно-инвариантную теорию в плоском пространстве можно расширить до теории, инвариантной относительно преобразований Вейля и относительно диффеоморфизмов в искривленном пространстве? Очевидно, ответ будет положительным для самовзаимодействующих скалярных теорий при $d > 2$, обсуждавшихся в предыдущей работе [3]. Теперь посмотрим, что происходит при $d = 2$.

3. ТЕОРИЯ ЛИУВИЛЛЯ: ДИНАМИКА КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ ПРИ $d = 2$

Конформно-инвариантной двумерной моделью с нетривиальной динамикой является теория Лиувилля с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L}_0^{\text{Liouville}} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - \frac{m^2}{\beta^2} e^{\beta\psi}. \quad (3.1)$$

Преобразования конформной симметрии действуют аффинным образом, так что экспоненциальное взаимодействие остается инвариантным:

$$\delta\psi = f^\alpha \partial_\alpha \psi + \frac{1}{\beta} \partial_\alpha f^\alpha. \quad (3.2)$$

Канонический тензор энергии-импульса

$$\theta_{\mu\nu}^{\text{canonical}} = \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi - \frac{m^2}{\beta^2} e^{\beta\psi} \right) \quad (3.3)$$

снова не является бесследовым, $\eta_{\mu\nu} \theta_{\mu\nu}^{\text{canonical}} \neq 0$, однако после улучшения он приобретает это свойство:

$$\theta_{\mu\nu} = \theta_{\mu\nu}^{\text{canonical}} + \frac{2}{\beta} (\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \psi, \quad \eta^{\mu\nu} \theta_{\mu\nu} = 0. \quad (3.4)$$

Тензор $\theta_{\mu\nu}^{\text{canonical}}$ снова возникает вариационным образом, когда лиувиллева лагранжева плотность минимально расширяется с помощью произвольного метрического тензора. Аналогично мы получаем улучшенный тензор (3.4), вводя неминимальное взаимодействие:

$$\mathcal{L}^{\text{Liouville}} = \frac{1}{\beta} R\psi + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - \frac{m^2}{\beta^2} e^{\beta\psi}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int \sqrt{|g|} \mathcal{L}^{\text{Liouville}} = \\ &= \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi - \frac{m^2}{\beta^2} e^{\beta\psi} \right) + \frac{2}{\beta} (g_{\mu\nu} D^2 - D_\mu D_\nu) \psi, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$T_{\mu\nu} \xrightarrow{g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}} \theta_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Тензор $T_{\mu\nu}$ в искривленном пространстве не является бесследовым,

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \frac{2}{\beta^2} R \neq 0, \quad (3.8)$$

он становится бесследовым только в пределе плоского пространства, когда R обращается в нуль. Соответственно действие, связанное с выражением (3.5), не инвариантно относительно преобразований Вейля, которые для скалярного поля ψ принимают вид

$$\psi \xrightarrow{\text{Weyl}} \psi - \frac{2}{\beta} \sigma. \quad (3.9)$$

Такой вид преобразований необходим для инвариантности плотности взаимодействия $\sqrt{|g|} e^{\beta\psi}$. Однако кинетический член вместе с неминимальным членом не инвариантны, так что

$$I^{\text{Liouville}} = \int \sqrt{|g|} \mathcal{L}^{\text{Liouville}} \xrightarrow{\text{Weyl}} I^{\text{Liouville}} - \frac{2}{\beta^2} \int \sqrt{|g|} (R\sigma + g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma). \quad (3.10)$$

Заметим, что вариация действия (последнее слагаемое в выражении (3.10)) не зависит от ψ . Поэтому уравнение для поля

$$D^2 \psi + \frac{m^2}{\beta} e^{\beta\psi} - \frac{1}{\beta} R = 0 \quad (3.11)$$

обладает симметрией Вейля, хотя действие ей не обладает.

4. ВЫВОД ТЕОРИИ ЛИУВИЛЛЯ ПРИ $d = 2$ ИЗ ВЕЙЛЬ-ИНВАРИАНТНЫХ ТЕОРИЙ ПРИ $d > 2$

Мы видим, что в двумерном случае имеются существенные отличия от того, что мы получили при $d > 2$: в теориях, соответствующих последнему случаю, существует инвариантный относительно преобразования Вейля предшественник с бесследовым тензором энергии–импульса в искривленном пространстве, который приводит

к бесследовому тензору энергии–импульса в плоском пространстве. При $d = 2$ такой предшественник не является вейль-инвариантным, и тензор энергии–импульса становится бесследовым только в пределе плоского пространства.

Чтобы лучше понять двумерное поведение, построим предельную процедуру, которая приводит инвариантные относительно преобразования Вейля при $d > 2$ модели (2.5) к двумерному случаю. Тем самым мы выделим шаги, на которых теряется вейль-инвариантность.

Чтобы в случае $d = 2$ вывести теорию Лиувилля (3.5) из вейль-инвариантных моделей с полиномиальным взаимодействием (2.5) при $d > 2$, положим

$$\varphi = \frac{2d}{\beta(d-2)} e^{(\beta(d-2)/(2d))\psi} \quad (4.1)$$

и возьмем предел $d \rightarrow 2$, как и выше. Исследуем каждый из трех членов в выражении (2.5) по отдельности.

Для самодействия имеем

$$\lambda \varphi^{2d/(d-2)} = \lambda \left(\frac{2d}{\beta(d-2)} \right)^{2d/(d-2)} e^{\beta\psi} \xrightarrow{d \downarrow 2} \frac{m^2}{\beta^2} e^{\beta\psi}. \quad (4.2)$$

На последнем шаге для того чтобы избавиться от сингулярного множителя, мы перенормировали константу λ , введя величину m^2/β^2 . Для кинетического члена взятие предела не вызывает затруднений:

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \xrightarrow{d \downarrow 2} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi. \quad (4.3)$$

Однако неминимальный член не имеет предела, поэтому мы раскладываем экспоненту:

$$\begin{aligned} \frac{d-2}{8(d-1)} R \varphi^2 &= \frac{d^2}{2\beta^2(d-1)(d-2)} R e^{(\beta(d-2)/d)\psi} = \\ &= \frac{d^2}{2\beta^2(d-1)(d-2)} R + \frac{d}{2\beta(d-1)} R \psi + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

В пределе $d = 2$ выражения (4.2) и (4.3) и последний член в правой части формулы (4.4) приводят к лиувиллевой плотности лагранжиана (3.5) в искривленном пространстве. Первый член в правой части выражения (4.4) дает неопределенный результат в выражении для действия:

$$\int \sqrt{|g|} \mathcal{L}_{d>2} \xrightarrow{d \downarrow 2} \int \sqrt{|g|} \mathcal{L}^{\text{Liouville}} + \frac{2}{\beta^2(d-2)} \int \sqrt{|g|} R. \quad (4.5)$$

Неопределенность возникает из-за того, что в размерности два величина $\sqrt{|g|} R$ представляет собой эйлерову плотность, а ее интеграл – поверхностный член, которые эффективно обращаются в нуль, коль скоро мы интересуемся объемными

свойствами. Поэтому второе слагаемое в выражении (4.5) дает $0/0$ при $d = 2$. Очевидно, модель Лиувилля воспроизводится, когда $0/0$ интерпретируется как 0 , но это приводит к потере вейль-инвариантности. Для поддержания вейль-инвариантности в пределе $d \downarrow 2$ нам следует тщательно вычислить не зависящую от ψ величину $\int \sqrt{|g|}R/(d-2)$, т.е. нам требуется нечто вроде правила Лопиталя для размерной редукции.

Оказывается, что точную оценку величины $\int \sqrt{|g|}R/(d-2)$ в пределе $d \downarrow 2$ можно найти, обратившись к исходным идеям Вейля.

Прежде чем их описывать, заметим, что правила конформного преобразования (3.2) и преобразования Вейля (3.9) для ψ получаются правильным образом, если подставить выражение (4.1) в соответствующие правила (2.2), (2.96) для φ и перейти к пределу $d \downarrow 2$. Такая же связь существует между уравнениями движения (3.11) и (2.8). Однако из редукции тензора энергии–импульса (2.6) для φ получается тензор (3.6) для ψ плюс слагаемое $(4/\beta^2)G_{\mu\nu}/(d-2)$, которое не определено при $d = 2$, поскольку как числитель, так и знаменатель обращаются в нуль. Отметим, что взятие следа от этой величины до предельного перехода $d \downarrow 2$ приводит к тому, что остается величина $(4/\beta^2)(1-d/2)R/(d-2) = -(2/\beta^2)R$, которая сокращает не обращающийся в нуль след лиувиллевского тензора энергии–импульса. Это снова указывает на неопределенность как на причину отсутствия вейль-инвариантности.

5. ВЕЙЛЕВСКАЯ ВЕЙЛЬ-ИНВАРИАНТНОСТЬ

Чтобы получить определенное поведение величины $\int \sqrt{|g|}R/(d-2)$ в пределе $d \downarrow 2$, еще раз исследуем свойства преобразования Вейля кинетического члена для теории скалярного поля в размерности d (самодействие инвариантно относительно преобразования Вейля и не требует дальнейшего обсуждения). Как уже отмечалось, кинетический член не является вейль-инвариантным, и это компенсируется неминимальным взаимодействием, приводящим к инвариантному относительно преобразований Вейля кинетическому действию

$$I^{\text{kinetic}} = \int \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + \frac{d-2}{8(d-1)} R \varphi^2 \right). \quad (5.1)$$

Однако Вейль предложил другой механизм для построения вейль-инвариантного кинетического члена: вместо использования неминимального взаимодействия он ввел “калибровочный потенциал” W_μ , для того чтобы устранить невариантность [3]. Можно проверить, что действие

$$I^{\text{Weyl}} = \int \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} [\partial_\mu \varphi + (d-2)W_\mu \varphi] [\partial_\nu \varphi + (d-2)W_\nu \varphi] \right) \quad (5.2)$$

инвариантно относительно преобразований (2.9), если W_μ преобразуется как

$$W_\mu \xrightarrow{\text{Weyl}} W_\mu - \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma. \quad (5.3)$$

Теперь потребуем, чтобы величина I^{kinetic} в выражении (5.1) совпадала с величиной I^{Weyl} в выражении (5.2). Этого можно достичь, если выполнено равенство

$$\frac{R}{4(d-1)} = D^\mu W_\mu + (d-2)g^{\mu\nu}W_\mu W_\nu. \quad (5.4)$$

Это занятное уравнение типа уравнения Риккати знакомо в случае $d = 2$, где из него следует, что $\sqrt{|g|}R$ является полной производной, обобщением этого условия на произвольные $d > 2$ и является (5.4).

Прежде чем переходить к пределу $d \downarrow 2$, вычислим с помощью выражения (5.4) неоднозначный вклад в действие – последний член в выражении (4.5). Из (5.4) имеем

$$\frac{\int \sqrt{|g|}R}{4(d-1)(d-2)} = \frac{1}{d-2} \int \partial_\mu (\sqrt{|g|}W^\mu) + \int \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}W_\mu W_\nu. \quad (5.5)$$

Первое слагаемое в правой части равенства не дает вклада даже при $d \neq 2$, поскольку подынтегральное выражение является полной производной при любых d , тогда как из второго возникает

$$\lim_{d \downarrow 2} \frac{\int \sqrt{|g|}R}{d-2} = 4 \int \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}w_\mu w_\nu, \quad (5.6)$$

где $w_\mu \equiv W_\mu|_{d=2}$ удовлетворяет согласно (4.4) уравнению

$$4D^\mu w_\mu = R \quad \text{при} \quad d = 2. \quad (5.7)$$

Отметим, что выражения (5.3) и (5.7) согласованы с формулой преобразований Вейля для R при $d = 2$: $R \rightarrow e^{-2\sigma}(R - 2D^2\sigma)$.

Таким образом, чтобы добиться вейль-инвариантности, следует дополнить действие зависящим от метрики, но не зависящим от ψ членом

$$\Delta I = \frac{8}{\beta^2} \int \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}w_\mu w_\nu. \quad (5.8)$$

Согласно (5.3) и (5.7) вариация Вейля величины ΔI есть

$$\Delta I \rightarrow \Delta I + \frac{2}{\beta^2} \int \sqrt{|g|}(R\sigma + g^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma). \quad (5.9)$$

Это сокращает вейль-неинвариантность величины $I^{\text{Liouville}}$, см. (3.10).

Остается найти w_μ , решив уравнение (5.7). Мы, конечно, интересуемся локальным решением, для того чтобы инвариантное относительно преобразований Вейля действие Лиувилля было локальным. Такое решение было найдено в работе [4]. Оно имеет вид

$$w^\mu = \frac{\varepsilon^{\mu\nu}}{4\sqrt{|g|}} \left(\frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha g_{\beta\nu} + (\text{ch } \omega - 1) \partial_\nu \gamma \right). \quad (5.10)$$

Второе слагаемое в скобках представляет собой каноническую $SL(2, R)$ 1-форму, где

$$\text{ch } w = \frac{g_{+-}}{\sqrt{|g|}}, \quad e^\gamma = \sqrt{\frac{g_{++}}{g_{--}}} \quad (5.11)$$

(индексы $(+, -)$ относятся к компонентам светового конуса $(x^0 \pm x^1)/\sqrt{2}$). Соответствующая часть w^μ является вейль-инвариантной, а оставшаяся часть удовлетворяет закону преобразования (5.3). Решение (5.10) не единственно. Можно добавить к (5.10) любое инвариантное относительно преобразований Вейля слагаемое вида $(\varepsilon^{\mu\nu}/\sqrt{|g|})\partial_\nu X$, поскольку оно не дает вклада в (5.7).

Замечательно, что w^μ в выражении (5.10) не является контравариантным вектором, хотя $D_\mu w^\mu$ и является скаляром $R/4$. Следовательно, наше вейль-инвариантное действие Лиувилля $I^{\text{Liouville}} + \Delta I$ не является инвариантным относительно диффеоморфизмов. Его $g^{\mu\nu}$ -вариация определяет бесследовый тензор энергии-импульса, который, однако, не является (ковариантно) сохраняющимся.

Мы не знаем, как к этому относиться. Возможно, упомянутую выше неоднозначность можно использовать для избавления от неинвариантности относительно диффеоморфизмов, но нам это не удалось. Поэтому представляется, что локальное действие Лиувилля в искривленном пространстве может быть инвариантным относительно диффеоморфизмов или относительно преобразований Вейля, но не относительно их обоих.

Если это предположение верно, то мы сталкиваемся с “аномальной” ситуацией в классической теории поля, которая ранее встречалась только в квантованной теории поля. Известно, что в размерности два инвариантная относительно диффеоморфизмов лагранжева плотность $(\sqrt{|g|}/2)g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$ также инвариантна относительно преобразований Вейля, которые преобразуют метрический тензор, но не преобразуют скалярное поле φ (т.е. уравнение (2.9) при $d = 2$). Однако эффективное квантовое действие, которое получается путем взятия функционального интеграла по φ , дает метрическое выражение, являющееся инвариантным относительно диффеоморфизмов или относительно преобразований Вейля, но не относительно их обоих [5].

Если отказаться от локальности, можно легко построить ковариантное решение для w_μ в виде $\partial_\mu w$, где w изменяется при преобразовании Вейля как (ср. (5.3))

$$w \rightarrow w - \frac{\sigma}{2}. \quad (5.12)$$

Очевидно, что

$$D^2 w = \frac{R}{4}, \quad w(x) = \frac{1}{4} \int d^2 y \sqrt{|g(y)|} \frac{1}{D^2(x, y)} R(y), \quad (5.13)$$

где функция Грина определяется как решение следующего уравнения:

$$D_x^2 \frac{1}{D^2(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \delta^2(x - y). \quad (5.14)$$

Уравнение (5.12) выполнено в силу (5.13), и добавление действия Лиувилля представляет собой не что иное, как действие Полякова [5]:

$$\Delta I = \frac{1}{2\beta^2} \int \partial^2 x d^2 y \sqrt{|g(x)|} R(x) \frac{1}{D^2(x, y)} \sqrt{|g(y)|} R(y). \quad (5.15)$$

Это дает действие для теории Лиувилля, инвариантное относительно диффеоморфизмов и преобразований Вейля, которое, однако, является нелокальным. Вопрос о том, можно ли добиться еще и локальности, остается открытым.

Список литературы

- [1] C. Callan, S. Coleman, R. Jackiw, *Ann. Phys.*, **59** (1970), 42.
- [2] B. Zumino, “Effective Lagrangians and Broken Symmetries”, *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory* **2** (2006), Brandeis Univ. Summer Lectures, 1970, eds. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton, MIT, Cambridge MA, 1971, 437.
- [3] A. Iorio, L. O’Raifeartaigh, I. Sachs, C. Wiesendanger, *Nucl. Phys. B*, **495** (1997), 433.
- [4] S. Deser, R. Jackiw, *Int. J. Mod. Phys. B*, **10** (1996), 1499.
- [5] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, Удмуртск. унив-т, Ижевск, 1999.

Поступила в редакцию 27.10.2005