Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Засорин, Метод мультипольного псевдопотенциала для некоторых задач квантовой теории рассеяния, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 3, 504–514

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf206>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:01:21

МЕТОД МУЛЬТИПОЛЬНОГО ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ РАССЕЙНИЯ

Для некоторых задач квантовой теории рассеяния, описываемых нелинейным волновым уравнением с финитным потенциалом и нелокальным краевым условием, заданным в терминах амплитуды рассеяния, построен мультипольный псевдопотенциал, позволяющий восстановить волновую функцию. Установлено, что структура волновой функции целиком определяется амплитудой рассеяния и не зависит от выбора потенциала.

Ключевые слова: мультипольный псевдопотенциал, парциальная амплитуда рассеяния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \vec{\nabla}^2 \right) u + Q = 0 \quad (1.1)$$

с финитным или быстро убывающим по пространственным переменным $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ функционалом $Q = Q(t, \vec{x})$ описывает широкий класс задач рассеяния классической и квантовой физики, например, акустическое рассеяние, задачи нелинейной оптики, предельный случай квантовополевого рассеяния на внешних полях, рассеяние релятивистских частиц и т.д. (см., например, [1]–[4] и библиографию в этих работах). При этом в классическом случае функционал Q , как правило, не создает связанных состояний и представляет собой источник: $Q = f(t, \vec{x})$ (т.е. не зависит от волновой функции $u(t, \vec{x})$; впрочем, есть и исключения: при наличии неоднородностей среды из-за отражения волн возможны их воздействия и на сам источник). В квантовом случае $Q = Q(t, \vec{x}, u, \vec{\nabla} u, \dots)$, т.е. представляет собой потенциал $q(u) = q(u)(t, \vec{x})$, зависящий как от переменных $t, \vec{x}$, так и от самой волновой функции (линейно или нелинейно) и, возможно, от ее производных любого конечного порядка, причем в общем случае Q может являться и оператором (линейным или нелинейным) со значениями в пространствах распределений (к таковым

*Воронежский государственный университет, НИИ математики, Воронеж, Россия. E-mail: mathins@main.vsu.ru

относятся так называемые обобщенные потенциалы Фока, Дирака, Морса, Юкавы, Вуда–Саксона, Хюльтена, резонансные потенциалы и т.д., см. [2], [4] и библиографию в этих работах).

Заметим [2]–[5], что традиционная постановка задач рассеяния для уравнения (1.1) предполагает заранее известным либо функционал Q , либо волновую функцию u , либо (как правило, в случае монохроматической волны $u(t, \vec{x}) = e^{i\omega_0 t} u_0(\vec{x})$), ни функционал, ни волновая функция не известны, но задана априори какая-либо также ненаблюдаемая (неизмеримая) характеристика, например, T -матрица или матрица рассеяния, позволяющая восстановить функционал (потенциал) Q ставшим классическим методом Гельфанда–Левитана–Марченко или иными методами обратной задачи теории рассеяния (см. [1], [2], [6]–[9] и обзоры в [4], [5]). Однако в реальных ситуациях могут быть известны лишь измеримые величины, к которым относится амплитуда рассеяния, соответствующая в случае монохроматической волны фиксированному уровню энергии $E_0 = k_0^2$, $k_0 = \omega_0/c$, $Q(t, x) \equiv Q_0(x) \otimes e^{i\omega t}$:

$$F_0(k_0, \vec{\theta}) = \int Q_0(\vec{x}) \exp(ik_0(\vec{x} \cdot \vec{\theta})) d\vec{x}, \quad |\vec{\theta}| = 1, \quad (1.2)$$

и не позволяющая восстановить функционал Q_0 упомянутыми выше методами обратной задачи рассеяния (см. [2], [3], [8], [9]). Строго говоря, измеримой является величина $|F_0|^2$; метод восстановления F_0 по $|F_0|^2$ достаточно подробно изложен в работах [2], [8] (см. также обзор в [4]). В нестационарном случае амплитуда рассеяния $F(t, \vec{\theta})$ может быть определена из равенства (1.2) суммированием по ω_0 одночастотных компонент $e^{i\omega_0 t} F_0(k_0, \vec{\theta})$:

$$F(t, \vec{\theta}) = \int Q(t + c^{-1}(\vec{x} \cdot \vec{\theta}), \vec{x}) d\vec{x}; \quad |\vec{\theta}| = 1. \quad (1.3)$$

Один из подходов к решению задачи (1.1), (1.2) в случае монохроматической волны (с неизвестным финитным потенциалом Q_0) – так называемый “метод мультипольного псевдопотенциала” – был предложен в работе [10]. В некоторых частных случаях (например, уравнение (1.1) без начальных условий, а функционал Q имеет вид источника либо не зависит явно от t и линеен относительно волновой функции u и ее производных) этот метод может быть формально перенесен (методом суперпозиции монохроматических волн) и на задачу (1.1), (1.3), однако в более общих ситуациях он требует соответствующей “адаптации”. Это и является целью данной статьи.

2. КЛАССИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ: ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ – вектор из $\mathbb{R}^n$, $r = |x|$ – его евклидова длина, $\theta = x/r$ – точка единичной сферы $\omega = \{|x| = 1\} \in \mathbb{R}^n$; $\mathbb{R}^{n+1} = \{(t, x): t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n\}$, $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(t, x): t > 0\}$. Пусть далее $D = \{D_1, \dots, D_n\}$, $D_j = \partial/\partial x_j$, $D_t = \partial/\partial t$, $\Delta = (D \cdot D)$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, а выражение (x, y) означает скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$. Как обычно [11], через $Y^{(m)}(x)$ будем обозначать однородный гармонический полином степени $m = 0, 1, \dots$, а его сужение $Y^{(m)}(\theta) = r^{-m} Y^{(m)}(x)$ на единичную сферу ω будем называть сферической гармоникой порядка m ; через $\mathcal{Z}^{(m)}(\theta, \theta')$

обозначим зональную гармонику порядка m . Дифференциальный оператор (дифференциальный полином), порождаемый полиномом $Y^{(m)}(x)$ или гармоникой $Y^{(m)}(\theta)$, обозначим $Y^{(m)}(D)$. Выражения $Y^{(m)}(t, x)$, $Y^{(m)}(t, \theta)$, $Y^{(m)}(t, D)$ будут означать, что коэффициенты этих полиномов зависят от $t \in \mathbb{R}$ как от параметра. Через $S'(\mathbb{R}^m)$ и $Z'(\mathbb{R}^m) \supset S'(\mathbb{R}^m)$, $m = 1, n$ или $n + 1$, будем обозначать соответственно пространство Шварца распределений умеренного роста и пространство аналитических функционалов [12], двойственное к пространству $Z(\mathbb{R}^m) = \mathcal{FC}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, где $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье на $\mathbb{R}^m$ ($\mathcal{F}^+$ – прямое, $\mathcal{F}^-$ – обратное преобразование); выражение $\langle f; g \rangle_{(m)}$ будет означать внешнюю линейную форму на $S'(\mathbb{R}^m)$.

Для простоты будем считать, что константа c в уравнении (1.1) равна единице; обозначим $\square = D_t^2 - \Delta$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\square u(t, x) = -f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad u|_{t=+0} = u_t|_{t=+0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Продолжив $u(t, x)$, $f(t, x)$ нулем при $t < 0$, сведем задачу (2.1) к задаче в $S'(\mathbb{R}^{n+1})$:

$$\begin{aligned} \square u(t, x) &= -f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; \\ (\theta \cdot D)(u(t + (x \cdot \theta), x)) &= o(|x|^{(1-n)/2}), \quad x \rightarrow \infty, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \omega, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $u, f \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$. Дополнительно предполагаем, что $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ и

$$\text{supp}(f) \subset \{t \geq 0, |x| \leq r_0\}, \quad r_0 > 0. \quad (2.3)$$

Здесь и далее константа r_0 строго фиксирована.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть (см., например, [12]–[14]), что задача (2.2), (2.3) корректно разрешима как в классе $S'(\mathbb{R}^{n+1})$, так и в $Z'(\mathbb{R}) \times S'(\mathbb{R}^n)$ или в $Z'(\mathbb{R}^{n+1})$.

Предположим теперь, что явный вид источника $f(t, x)$ не известен, а задана лишь амплитуда рассеяния $F(t, \theta)$ при всех $\theta \in \omega$:

$$\int_{\{|x| \leq r_0\}} f(t + (x \cdot \theta), x) dx = F(t, \theta), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \omega. \quad (2.4)$$

Объединяя формулы (2.3) и (2.4), немедленно устанавливаем, что $F \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \omega)$ и

$$\text{supp}(F) \subset \{t \geq -r_0, \theta \in \omega\}. \quad (2.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Несложно заметить, что для любой заданной функции $F(t, \theta)$, удовлетворяющей ограничению (2.5), найдется бесконечно много источников $f(t, x)$, удовлетворяющих условиям (2.3), (2.4), т.е. задача (2.2)–(2.5) не является корректно поставленной в традиционных рамках теории уравнений в частных производных. Поэтому под корректной разрешимостью задачи (2.2)–(2.5) в дальнейшем будем понимать корректную разрешимость задачи (2.2) при каждом фиксированном источнике $f(t, x)$, удовлетворяющем условиям (2.3)–(2.5).

Однако наша цель – построение волновой функции $u(t, x)$, и новая интерпретация корректной разрешимости задачи (2.2)–(2.5) не может нам в этом помочь, поскольку условия (2.3)–(2.5) не обеспечивают однозначного восстановления источника $f(t, x)$. Поэтому сформулируем для задачи (2.2)–(2.5) задачу о мультипольном псевдоисточнике.

По заданной амплитуде рассеяния $F(t, \theta)$ требуется построить сингулярный псевдоисточник $\psi(t, x)$, удовлетворяющий условиям

$$\text{supp}(\psi) \subset \{t \geq -r_0, x = 0\}, \quad (2.6)$$

$$\langle \psi(t + (x \cdot \theta), x); 1(x) \rangle_{(n)} = F(t, \theta), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \omega, \quad (2.7)$$

такой, что:

1) задача

$$\begin{aligned} \square v(t, x) &= -\psi(t, x), & (t, x) &\in \mathbb{R}^{n+1}, \\ (\theta \cdot D)(v(t + (x \cdot \theta), x)) &= o(|x|^{(1-n)/2}), & x \rightarrow \infty, & \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \omega, \end{aligned} \quad (2.8)$$

была бы корректно разрешима в каком-либо классе распределений одновременно с задачей (2.2)–(2.5);

2) выполнялось бы тождество

$$v(t, x) \equiv u(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad |x| > r_0. \quad (2.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Задача о мультипольном псевдоисточнике для задачи (2.2), (2.3) (т.е. для случая известного источника $f(t, x)$) решена в работе [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие (2.7) может быть представлено в эквивалентной, но “более корректной” форме:

$$\langle \delta(t - k + (x \cdot \theta)); \psi(k, x) \rangle_{(n+1)} = F(t, \theta), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \omega, \quad (2.10)$$

где $\delta(\cdot) \in S'(\mathbb{R})$ – “одномерная” дельта-функция Дирака.

Однако сама постановка задачи (2.6)–(2.9) для задачи (2.2)–(2.5) корректна лишь в том случае, если условия (2.3)–(2.5) обеспечивают однозначность сужения на область $\Omega = \{|x| > r_0\}$ всех решений $u(t, x)$ задачи (2.2). В дальнейшем мы убедимся, что это действительно так.

3. КЛАССИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ: ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сформулируем главный результат для задач (2.2)–(2.5) и (2.6)–(2.9).

ТЕОРЕМА 1. *Задача (2.6)–(2.9) для задачи (2.2)–(2.5) корректно (в смысле замечаний 2, 4) поставлена в классах $S'(\mathbb{R}) \times Z'(\mathbb{R}^n)$ и $Z'(\mathbb{R}^{n+1})$, при этом справедливы следующие утверждения.*

1. *Задача (2.2)–(2.5) корректно (в смысле замечания 2) разрешима в классах $S'(\mathbb{R}^{n+1})$, $S'(\mathbb{R}) \times Z'(\mathbb{R}^n)$ и $Z'(\mathbb{R}^{n+1})$.*
2. *Все ее решения $u(t, x)$ совпадают между собой в области $\Omega = \{|x| > r_0\}$.*
3. *Искомый мультипольный псевдоисточник $\psi(t, x)$ имеет вид*

$$\psi(t, x) = \sum_m \psi_m(t, x) \equiv \sum_m (-1)^m Y_m(t, D) \delta(x), \quad (3.1)$$

где $\delta(\cdot) \in S'(\mathbb{R}^n)$ – “ n -мерная” дельта-функция Дирака, а дифференциальные полиномы $Y_m(t, D)$ порождаются сферическими гармониками $Y_m(t, \theta)$, определяемыми равенствами

$$Y_m(t, \theta) = Y^{(m)}(t, \theta) * T_m(t), \quad T_m(t) = \begin{cases} \delta(t), & m = 0, \\ \frac{t_+^{m-1}}{(m-1)!}, & m \geq 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь выражение z_+^k означает $H(z)z^k$, $H(\cdot)$ – функция Хэвисайда, символ $*$ означает свертку по переменной $t \in \mathbb{R}$, а гармоники $Y^{(m)}(t, \theta)$ суть парциальные амплитуды рассеяния:

$$F(t, \theta) = \sum_m Y^{(m)}(t, \theta) \equiv \sum_m \int_{\omega} F(t, \theta') \mathcal{Z}^{(m)}(\theta, \theta') d\omega(\theta'), \quad (3.3)$$

где $F(t, \theta)$ – полная амплитуда рассеяния из равенства (2.4). Кроме того,

$$\text{supp}(\psi_m) \subset \{t \geq -r_0, x = 0\}. \quad (3.4)$$

4. *Задача (2.6)–(2.8) с псевдоисточником $\psi(t, x)$, определенным равенствами (3.1)–(3.3), корректно разрешима в классах $S'(\mathbb{R}) \times Z'(\mathbb{R}^n)$ и $Z'(\mathbb{R}^{n+1})$, а ее решение $v(t, x)$ может быть представлено в виде сходящегося в слабых топологиях этих классов ряда:*

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \sum_m v_m(t, x) \equiv \sum_m v_m(t, r\theta) \equiv \\ &\equiv \sum_m H(t - r + r_0) \frac{r^m}{(2\pi)^k} \times \\ &\quad \times \left(-\frac{\partial}{r \partial r} \right)^{m+k} \begin{cases} Y_m(t, \theta) * (t^2 - r^2)_+^{-1/2}, & n = 2k; \\ \frac{Y_m(t-r, \theta)}{2r}, & n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

5. Решения $u(t, x)$ задачи (2.2)–(2.5) и $v(t, x)$ задачи (2.6)–(2.8) связаны между собой тождеством (2.9).

Ввиду принципиальной важности этого результата приведем краткую схему доказательства. Покажем сначала, что псевдоисточник $\psi(t, x)$, определенный равенствами (3.1)–(3.3), действительно удовлетворяет условию (2.7). Представим функции $Y_m(t, \theta)$, $Y^{(m)}(t, \theta)$ в виде

$$Y_m(t, \theta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t) \theta^\alpha, \quad Y^{(m)}(t, \theta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha^{(m)}(t) \theta^\alpha,$$

где $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – целочисленный мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\theta^\alpha = \theta_1^{\alpha_1} \dots \theta_n^{\alpha_n}$, причем в силу (3.2) коэффициенты a_α и $a_\alpha^{(m)}$ связаны между собой равенством $D_t^m a_\alpha = a_\alpha^{(m)}$. Так как (2.7) и (2.10) эквивалентны, то

$$\begin{aligned} \langle \psi_m(t + (x \cdot \theta), x); 1(x) \rangle_{(n)} &= (-1)^m \langle Y_m(t + (x \cdot \theta), D) \delta(x); 1(x) \rangle_{(n)} = \\ &= (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} \langle a_\alpha(t + (x \cdot \theta)) D^\alpha \delta(x); 1(x) \rangle_{(n)} = \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \langle \delta(x), D^\alpha a_\alpha(t + (x \cdot \theta)) \rangle_{(n)} = \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \theta^\alpha a_\alpha^{(m)}(t + (x \cdot \theta))|_{x=0} = Y^{(m)}(t, \theta). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.1), (3.3) немедленно следует справедливость равенства (2.7).

Заметим далее, что включение (2.6) следует непосредственно из формул (3.1), (3.4), а (3.4) – из (2.5), (3.2), (3.3).

Покажем теперь, что функции $Y_m(t, \theta)$, определенные равенствами (3.2), (3.3), являются, как и $Y^{(m)}(t, \theta)$, гармониками порядка m . Действительно, в силу свойств свертки

$$\begin{aligned} Y_m(t, \lambda\theta) &= Y^{(m)}(t, \lambda\theta) * T_m(t) = \lambda^m Y^{(m)}(t, \theta) * T_m(t) = \lambda^m Y_m(t, \theta), \\ \Delta Y_m(t, x) &= (\Delta Y^{(m)}(t, x)) * T_m(t) = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

что и требовалось доказать.

Далее покажем, что распределение $v_m \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, определенное равенством (3.5), действительно является решением задачи (2.8) с парциальными псевдоисточниками $\psi_m \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, определенными равенством (3.1). В самом деле, в силу включения (3.4) справедливо равенство

$$v_m(t, x) = \langle \psi_m(k, y); E(t - k, x - y) \rangle_{(n+1)}, \quad (3.7)$$

где

$$E(t, x) = \frac{(-1)^k H(t - r)}{(2\pi)^k} \left(\frac{\partial}{r \partial r} \right)^k \begin{cases} (t^2 - r^2)_+^{-1/2}, & n = 2k, \\ \delta(t^2 - r^2), & n = 2k + 1, \end{cases} \quad r = |x|, \quad (3.8)$$

– фундаментальное решение задачи Коши (2.1) (см., например, [12]–[14]). Поскольку $Y_m(t, \theta)$ – сферическая гармоника порядка m , то [13]

$$Y_m(t, D)\delta(x) = Y_m(t, x) \left(\frac{\partial}{r \partial r} \right)^m \delta(x), \quad r = |x|.$$

Отсюда и из (3.6) следует

$$Y_m(t, D)\delta(x) = Y_m(t, \theta) \otimes r^m \left(\frac{\partial}{r \partial r} \right)^m \delta(x). \quad (3.9)$$

Объединяя формулы (3.1), (3.4), (3.7)–(3.9), получаем равенство (3.5).

Наиболее трудоемким является доказательство корректной разрешимости задачи (2.8) с псевдоисточником $\psi(t, x)$ (хотя частичные суммы рядов (3.1), (3.5) и являются распределениями класса $S'(\mathbb{R}^{n+1})$, но сами ряды (3.1), (3.5), вообще говоря, не сходятся в слабой топологии этого класса), а также утверждений 2, 4 и 5 теоремы 1. Для доказательства применим к распределениям u, f, F прямое преобразование Фурье $\mathcal{F}^+$ по переменной $t \in \mathbb{R}$:

$$\hat{h}(k) = (\mathcal{F}^+ h)(k) = \langle h(t); e^{-ikt} \rangle_{(1)}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что функция $f(t, x)$ финитна не только по пространственным переменным, но и по переменной $t \in \mathbb{R}$ (в противном случае $\hat{f}(k, x)$ можно рассматривать как S' -предел последовательности $\{\hat{f}_N\}$ фурье-образов финитных по t и x распределений f_N). Но тогда функции $\hat{f}(k, x)$, $\hat{u}(k, x)$ будут аналитическими (впрочем, для наших целей хватило бы и просто непрерывности) по переменной $k \in \mathbb{R}$, и, следовательно, распределения (функции) $f(t, x)$ и $u(t, x)$ однозначно определяются сужениями $\hat{f}$ и $\hat{u}$ на область $\{k \neq 0\}$. Сама же задача (2.2)–(2.5) при $k \neq 0$ редуцируется к следующей задаче:

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)\hat{u}(k, x) &= \hat{f}(k, x), \quad x \in \mathbb{R}^n; \\ (D_r + ik)\hat{u}(k, x) &= o(|x|^{(1-n)/2}), \quad x \rightarrow \infty; \quad \text{supp}(\hat{f}) \subset \{|x| \leq r_0\}; \\ \langle \hat{f}(k, x); e^{ik(x \cdot \theta)} \rangle_{(n)} &= \hat{F}(k, \theta), \quad \theta \in \omega. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу (считая, как и в предыдущем случае, $k \neq 0$):

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)\hat{v}(k, x) &= \hat{\psi}(k, x), \quad x \in \mathbb{R}^n; \\ (D_r + ik)\hat{v}(k, x) &= o(|x|^{(1-n)/2}), \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(k, x) &= \sum_m (ik)^{-m} \hat{Y}^{(m)}(k, D)\delta(x), \\ \hat{Y}^{(m)}(k, \theta) &= \int_{\omega} \hat{F}(k, \theta') \mathcal{Z}^{(m)}(\theta, \theta') d\omega(\theta'). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Справедливы следующие утверждения, доказанные в работе [10].

1. Задачи (3.10) и (3.11), (3.12) корректно разрешимы в классе $Z'(\mathbb{R}^n)$.

2. Все решения $\hat{u}(k, x)$ задачи (3.10) совпадают между собой в области $\Omega = \{|x| > r_0\}$.

3. Мультипольный псевдоисточник $\hat{\psi}(k, x)$, определенный равенствами (3.12), и соответствующее ему решение $\hat{v}(k, x)$ задачи (3.11) есть распределения класса $S'(\mathbb{R}) \times Z'(\mathbb{R}^n) \subset Z'(\mathbb{R}^{n+1})$, аналитические по переменной $k \in \mathbb{R}$.

4. Справедливо тождество

$$\hat{v}(k, x) \equiv \hat{u}(k, x), \quad |x| > r_0, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Отсюда на основании свойств преобразования Фурье следует справедливость утверждений 2 и 4 теоремы 1. Справедливость формул (3.2), (3.3) следует из равенств (3.4), (3.12), а тождество (2.9) – из тождества (3.13). Справедливость утверждения 1 теоремы 1 следует из замечания 1.

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1, очевидно, останутся справедливыми и в том случае, если снять ограничение регулярности источника $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ и рассматривать в качестве $f(t, x)$ распределение из класса $S'(\mathbb{R}^{n+1})$, $S'(\mathbb{R}) \times Z'(\mathbb{R}^n)$ или $Z'(\mathbb{R}^{n+1})$. При этом условие (2.4) может быть интерпретировано аналогично равенствам (2.7) или (2.10).

4. КВАНТОВОЕ РАССЕЯНИЕ

В квантовом случае функционал Q , как правило, создает связанные состояния, если зависит линейно от u , $D^\alpha u$, $|\alpha| = 1, 2, \dots$, или же обобщенные связанные состояния в случае нелинейной зависимости от волновой функции u и ее производных, поэтому в уравнении (2.1) следует заменить источник $f(t, x)$ потенциалом $q(u)(t, x)$. Так же, как и в случае классического рассеяния, продолжим u и q нулем при $t < 0$ и рассмотрим в $S'(\mathbb{R}^{n+1})$ следующую задачу:

$$\begin{aligned} \square u(t, x) + q(u)(t, x) &= 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; \\ (\theta \cdot D)(u(t + (x \cdot \theta), x)) &= o(|x|^{(1-n)/2}), & x \rightarrow \infty, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \omega, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$. Относительно потенциала $q(u)$ сделаем самое общее предположение, считая его слабо непрерывным (линейным или нелинейным) отображением $q: S'(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow S'(\mathbb{R}^{n+1})$ (т.е. $q(u) \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ для всех $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$). Так же, как и в предыдущем случае, будем считать, что явный вид $q(u)$ не известен и, кроме того, $q(u)$ финитен по пространственным переменным:

$$\text{supp}(q) \subset \{t \geq 0, |x| \leq r_0\}, \quad (4.2)$$

и удовлетворяет равенству

$$\langle q(u)(t + (x \cdot \theta), x); 1(x) \rangle_{(n)} = F(t, \theta), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \omega, \quad (4.3)$$

с заданной (измеренной) амплитудой рассеяния $F \in S'(\mathbb{R} \times \omega)$ такой, что

$$\text{supp}(F) \subset \{t \geq -r_0, \theta \in \omega\}. \quad (4.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Поскольку, как и в классическом случае, условия (4.3), (4.4) не позволяют однозначно восстановить потенциал $q(u)$, то решение задачи (4.1)–(4.4) не единственно. Если же заданы одновременно потенциал $q(u)$ и амплитуда рассеяния F , то задача (4.1)–(4.4) может не иметь решения (соответствующий пример будет приведен в разделе 5). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать лишь те потенциалы $q(u)$, для которых задача (4.1)–(4.4) корректно разрешима.

Пусть $\mathcal{M}$ – класс всех допустимых (в смысле замечания 6) потенциалов q . (Разумеется, $\mathcal{M} \neq \emptyset$. В него попадают по крайней мере все вырожденные потенциалы, не образующие связанных состояний, а поэтому имеющие вид источников класса $S'(\mathbb{R}^{n+1})$). Определим подмножество $\mathcal{U}(q) \subset S'(\mathbb{R}^{n+1})$ как множество всех решений $u \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$ задачи (4.1)–(4.4) при данном фиксированном потенциале $q \in \mathcal{M}$, а подмножество $\mathcal{T}(q) \subset S'(\mathbb{R}^{n+1})$ – как множество всех распределений $f = q(u) \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, когда u пробегает множество $\mathcal{U}(q)$. Пусть далее $\mathcal{T} = \{\cup \mathcal{T}(q) : q \in \mathcal{M}\}$. Несложно заметить, что класс $\mathcal{T}$ совпадает со множеством всех распределений $f \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, удовлетворяющих условиям (4.2), (4.3) (или (2.3), (2.4)). Фиксируя теперь поочередно каждый $q \in \mathcal{M}$ и каждую пару $(u, q(u)) \in \mathcal{U}(q) \times \mathcal{T}(q)$, мы фактически сводим, с учетом замечания 5, задачу (4.1)–(4.4) к задаче (2.2)–(2.5) с источником $f(t, x) \equiv q(u)(t, x)$ класса $S'(\mathbb{R}^{n+1})$, для которой можно опять рассмотреть задачу о мультипольном псевдоисточнике (2.6)–(2.9) (в целях правильности терминологии следует, впрочем, переименовать псевдоисточник ψ в псевдопотенциал).

Ничто не мешает нам повторить те же самые рассуждения для задачи (4.1)–(4.4), рассмотренной уже в классе $S'(\mathbb{R}) \times Z'(\mathbb{R}^n)$ или $Z(\mathbb{R}^{n+1})$. Таким образом, мы немедленно устанавливаем справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2. *Задача (4.1)–(4.4) корректно (в смысле замечаний 2 и 6) разрешима в любом из классов $S'(\mathbb{R}) \times Z'(\mathbb{R}^n)$ или $Z'(\mathbb{R}^{n+1})$, а все ее решения $u(t, x)$ в области $\{|x| > r_0\}$ совпадают между собой и с распределением $v(t, x)$, определенным равенствами (3.2), (3.3), (3.5).*

Из теоремы 2 следует важный для физических приложений результат.

СЛЕДСТВИЕ. *Структура волновой функции $u(t, x)$, являющейся решением задачи (4.1)–(4.4), вне зоны действия потенциала $q(u)$ не зависит от выбора самого потенциала и полностью определяется амплитудой рассеяния $F(t, \theta)$. В частности, если $F(t, \theta) = 0$, то $u(t, x) \equiv 0$ при $|x| > r_0$.*

5. ПРИМЕЧАНИЯ

1. Приведем упомянутый в замечании 6 пример несовместности заданных одновременно потенциала $q(u)$ и амплитуды F . Для простоты ограничимся случаем монохроматической волны при $n = 3$. Рассмотрим задачу (3.10) (убрав надстрочный символ “ $\wedge$ ”) и заменим при этом источник $f(x)$ достаточно хорошим (не содержащим сингулярностей) потенциалом

$$q(u)(x) = h(x)e^{-|u|^2}, \quad (5.1)$$

где $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, причем $h(x) > 0$ при $|x| < r_0$ и $h(x) = 0$ при $|x| \geq r_0$. Зададим также амплитуду рассеяния $F(\theta)$, потребовав при этом, чтобы парциальная амплитуда рассеяния $Y^{(0)}$ нулевого порядка равнялась нулю, что эквивалентно равенству

$$\int_{\omega} f(\theta) d\omega(\theta) = 0. \quad (5.2)$$

С другой стороны (см., например, [11]),

$$Y^{(0)} = \frac{4\pi}{k} \int_{|x| \leq r_0} q(u)(x) \sin(k|x|)|x|^{-1} dx, \quad (5.3)$$

и если теперь потребовать, чтобы $r_0 < \pi/k$, то в силу (5.1), (5.3) получаем $Y^{(0)} > 0$, что противоречит предположению (5.2).

Этот пример легко обобщается и на случай нефинитного потенциала q ; в этом случае достаточно функцию $h(x)$ из равенства (5.1) взять равной $\varphi(x) \sin(k|x|)|x|^{-1}$, где $\varphi(x)$ — положительная функция из $S(\mathbb{R}^3)$.

2. Достаточно интересен вопрос об L_2 -оценках решений $u(t, \cdot)$ задач (2.2)–(2.5) и (4.1)–(4.4). Например, стандартные $L_2(\mathbb{R}^n)$ -оценки решения задачи (2.2)–(2.5) не могут быть получены в принципе, поскольку амплитуда рассеяния $F(t, \theta)$ не содержит никакой информации об $L_2(\mathbb{R}^n)$ -нормах источника $f(t, \cdot)$. Тем не менее, если вместо $\mathbb{R}^n$ взять область $\Omega = \{|x| > r_0\}$, то непосредственный анализ формул (3.2)–(3.5) в важнейшем случае $n = 3$ и в предположении $F \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}) \times L_2(\omega)$ показывает, что решения $u(t, \cdot)$ задач (2.2)–(2.5) и (4.1)–(4.4) удовлетворяют равенству

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2 &= \|v(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2 = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^t \|F(k - r_0, \cdot)\|_{2,\omega}^2 dk + \frac{1}{r_0} \left\| \int_0^t F^{(-)}(k - r_0, \cdot) dk \right\|_{2,\omega}^2 \right), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $\|\cdot\|_{2,\Omega}$, $\|\cdot\|_{2,\omega}$ означают соответственно $L_2(\Omega)$ - и $L_2(\omega)$ -нормы, а $F^{(-)}(t, \theta) = (F(t, \theta) - F(t, -\theta))/2$. Теперь, используя попарную ортогональность гармоник $Y^{(m)}(\theta)$ на единичной сфере ω , из равенства (5.4) нетрудно вывести, что

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2 &= \|v(t, \cdot)\|_{2,\Omega}^2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int_0^t \|Y^{(m)}(k - r_0, \cdot)\|_{2,\omega}^2 dk + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r_0} \left\| \int_0^t Y^{(2m+1)}(k - r_0, \cdot) dk \right\|_{2,\omega}^2 \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $Y^{(m)}(t, \theta)$ — парциальные амплитуды рассеяния из равенства (3.3).

Из формул (5.4), (5.5) следует, в частности, что в случае $F(t, \theta) \sim Ct^\gamma$, $t \rightarrow +\infty$, $\gamma \geq -1$, поведение “в среднем” волновой функции $u(t, x)$ в зоне свободного движения Ω с ростом t характеризуется доминированием парциальных амплитуд рассеяния $Y^{(2m+1)}$ нечетных порядков. Аналогичная ситуация имеет место и при $r_0 \rightarrow 0$ (т.е. при стягивании источника или потенциала в точку), если амплитуда рассеяния $F(t, \theta)$ фиксирована.

3. Наконец, заметим, что рассмотренный выше метод мультипольного псевдоисточника (псевдопотенциала) применялся нами для случая однородных начальных условий в задачах (2.1) и (4.1). Однако он так же легко “срабатывает” и в случае $u|_{t=+0} = u_0(x)$, $u_t|_{t=+0} = u_1(x)$; при этом нужно лишь добавить к волновой функции $v(t, x)$ (определенной равенствами (3.2), (3.3), (3.5)) слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle u_0(y); E(t, x - y) \rangle_{(n)} + \langle u_1(y); E(t, x - y) \rangle_{(n)},$$

где $E(t, x)$ — фундаментальное решение Коши задачи (2.1), определенное равенством (3.8).

Список литературы

- [1] П. Д. Лакс, Р. С. Филлипс. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971.
- [2] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
- [3] А. С. Шварц. Элементы квантовой теории поля. Бозонные взаимодействия. М.: Атомиздат, 1975.
- [4] V. G. Makhankov. Phys. Rep. 1978. V. 35. P. 1–128.
- [5] Ф. А. Березин, М. А. Шубин. Уравнение Шредингера. М.: Изд-во МГУ, 1983.
- [6] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1951. Т. 15. № 4. С. 309–360.
- [7] В. А. Марченко. ДАН СССР. 1955. Т. 104. № 5. С. 695–698.
- [8] Л. Д. Фаддеев. Обратная задача квантовой теории рассеяния. II. В сб.: Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Т. 3. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1974. С. 93–180.
- [9] S. V. Manakov, V. E. Zakharov. Lett. Math. Phys. 1981. V. 5. P. 247–253.
- [10] Ю. В. Засорин. ТМФ. 2002. Т. 130. № 3. С. 442–450.
- [11] И. Стейн, Г. Вейс. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
- [12] В. С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
- [13] Ю. В. Засорин. Сиб. матем. журнал. 1997. Т. 38. № 6. С. 1282–1299.
- [14] И. А. Киприянов, Ю. В. Засорин. Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 4. С. 36–42.

Поступила в редакцию 13.VI.2002 г.