Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Иоффе, Ф. Канната, Д. Н. Нишнианидзе, Точно решаемая двумерная комплексная модель с вещественным спектром, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 1, 102–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2061>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:37:19

© 2006 г. М. В. Иоффе^{*†}, Ф. Канната[‡], Д. Н. Нишнианидзе^{*§}

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ ДВУМЕРНАЯ КОМПЛЕКСНАЯ МОДЕЛЬ С ВЕЩЕСТВЕННЫМ СПЕКТРОМ

С помощью суперсимметричных соотношений сплетения второго порядка по производным построена двумерная квантовая модель с комплексным потенциалом, для которой все энергетические уровни и соответствующие им волновые функции найдены аналитически. Данная модель не допускает разделения переменных и может рассматриваться как один из вариантов комплексификации обобщенной двумерной модели Морса с дополнительным слагаемым sh^{-2} . Доказана вещественность спектра этой модели. Насколько нам известно, это достаточно редкий пример нетривиальной точно решаемой двумерной модели. В явном виде получен оператор симметрии, описан биортогональный базис, и продемонстрирована псевдоэрмитовость гамильтониана модели. Полученные волновые функции одновременно являются собственными функциями оператора симметрии.

Ключевые слова: суперсимметричная квантовая механика, соотношения сплетения, комплексные потенциалы.

Статья посвящается 80-летию Юрия Викторовича Новожилова

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то что роль точно решаемых и частично (квазиточно) решаемых моделей в одномерной квантовой механике велика¹⁾, известно лишь сравнительно небольшое число таких моделей. Нахождение (точно и частично) решаемых систем в двумерном случае является гораздо более сложной задачей. Кроме моделей с разделением переменных, которые сводятся к паре одномерных моделей, из точно решаемых известны только модели типа Калоджеро [1] (с числом частиц $N = 3$)²⁾.

¹⁾Здесь и далее мы называем систему точно решаемой, если для нее известны аналитически энергии всех связанных состояний и соответствующие им волновые функции. Система называется частично (квазиточно) решаемой, если известна только часть из них.

^{*}Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.

[†]Departamento de Fisica Teorica, Atomica y Optica, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain. E-mail: m.ioffe@pobox.spbu.ru

[‡]Dipartimento di Fisica and INFN, Bologna, Italy. E-mail: cannata@bo.infn.it

[§]Технический университет Кутаиси, Кутаиси, Грузия. E-mail: qutaisi@hotmail.com

Некоторые частично решаемые модели были построены в работах [3]–[6] с помощью суперсимметричного метода SUSY-разделения переменных. Именно методы суперсимметрии представляются наиболее подходящими для решения важной проблемы построения точно и квазиточно решаемых квантовых (и классических [7]) моделей в случае нескольких пространственных измерений.

Первый шаг в этом направлении был сделан в работах [8], где было найдено несколько частных решений суперсимметричных соотношений сплетания для двумерных систем. Все эти системы являются интегрируемыми, т.е. для них существует динамическая симметрия четвертого порядка по импульсам, и соответствующие генераторы находятся в инволюции с гамильтонианами. После этого были предложены два новых суперсимметричных метода: SUSY-разделение переменных и форминвариантность [3], [5], [6], [9], с помощью которых оказалось возможным получить часть спектра и волновых функций этих интегрируемых моделей. Таким образом, был построен класс частично решаемых интегрируемых двумерных квантовых систем. Естественно, было бы очень важно найти среди этих интегрируемых моделей какие-то *точно* решаемые.

В работе предлагается новый подход к проблеме, сформулированной выше. А именно, выбирая специальное значение одного из параметров ($a = -1/2$) в двумерном потенциале Морса с дополнительным членом sh^{-2} [3], можно добиться, что один из партнеров в SUSY-соотношениях сплетания *будет допускать* обычное разделение переменных. В этом случае он будет точно решаемым, и его спектр и собственные функции будут найдены аналитически. При этом второй из партнеров по-прежнему *не допускает* разделения переменных, но, благодаря соотношениям сплетания, действие суперзаряда позволяет найти аналитически его спектр и волновые функции. Поскольку SUSY-сплетание связывает спектры с точностью до нормируемых 0-мод суперзарядов, условие точной решаемости обоих гамильтонианов требует, чтобы все 0-моды суперзарядов были известны. Все это можно сделать для обобщенной двумерной модели Морса (с дополнительным слагаемым sh^{-2}), но, как будет показано в разделе 2, непосредственный анализ сингулярностей волновых функций при $a = -1/2$ в общем виде оказывается сложным из-за присутствия в выражениях вырожденных гипергеометрических функций. Тем не менее основные возможности предложенного метода демонстрируются для некоторых энергетических уровней. В разделе 3 рассмотрение конкретного комплексного варианта этой модели (регуляризующего отталкивающие сингулярности при вещественных x_1, x_2) приводит к более интересной системе: энергии *всех* связанных состояний и соответствующие нормируемые волновые функции могут быть получены явно. Исследуются свойства этой модели. Главное из них – вещественность спектра (и независимость его от параметра комплексификации δ). Кроме того, в разделе 4 стандартным образом строится биортогональный базис для связанных состояний [10] и вычисляется действие оператора симметрии на волновые функции. В частности, показано, что полученные

²⁾Следует упомянуть, что, как и модели Калоджеро, рассматриваемые нами модели (в том числе обобщенная модель Морса) могут использоваться [2] либо для описания трех частиц на прямой, либо одной частицы в двумерном пространстве.

волновые функции являются общими собственными функциями как для гамильтониана, так и для оператора симметрии.

2. ОБОБЩЕННЫЙ ДВУМЕРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МОРСА ПРИ $a = -1/2$

Основным элементом двумерной суперсимметричной квантовой механики [5], [8] второго порядка являются соотношения сплетания

$$\tilde{H}Q^+ = Q^+H, \quad Q^-\tilde{H} = HQ^- \quad (1)$$

между двумя скалярными гамильтонианами $H, \tilde{H}$:

$$H = -\Delta + V(\vec{x}), \quad \tilde{H} = -\Delta + \tilde{V}(\vec{x}), \quad \Delta \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Эти соотношения позволяют установить изоспектральность суперпартнеров $H, \tilde{H}$ с точностью до 0-мод $Q^\pm$, а также связь волновых функций партнеров для одинаковых значений энергии:

$$\Psi_n(x) = Q^-\tilde{\Psi}_n(x), \quad \tilde{\Psi}_n(x) = Q^+\Psi_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Хотя при решении соотношений сплетания (1) нужно использовать самый общий вид суперзарядов $Q^\pm$ как дифференциальных операторов второго порядка по производным (подробности см. в работах [5], [8]), мы ограничимся частным решением лоренцева (гиперболического) типа:

$$Q^+ = (\partial_1^2 - \partial_2^2) + C_i\partial_i + B = 4\partial_+\partial_- + C_+\partial_- + C_-\partial_+ + B, \quad (4)$$

$$Q^- = (\partial_1^2 - \partial_2^2) - C_i\partial_i + B = 4\partial_+\partial_- - C_+\partial_- - C_-\partial_+ + B, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

В этом случае потенциалы $\tilde{V}(\vec{x})$, $V(\vec{x})$ и функция $B(\vec{x})$ могут быть выражены через четыре функции $F_1(2x_1)$, $F_2(2x_2)$ и $C_\pm(x_\pm)$:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2}(C'_+ + C'_-) + \frac{1}{8}(C_+^2 + C_-^2) + \frac{1}{4}(F_2(x_+ - x_-) - F_1(x_+ + x_-)), \quad (6)$$

$$V = -\frac{1}{2}(C'_+ + C'_-) + \frac{1}{8}(C_+^2 + C_-^2) + \frac{1}{4}(F_2(x_+ - x_-) - F_1(x_+ + x_-)),$$

$$B = \frac{1}{4}(C_+C_- + F_1(x_+ + x_-) + F_2(x_+ - x_-)). \quad (7)$$

Эти функции должны удовлетворять уравнению

$$\partial_-(C_-F) = -\partial_+(C_+F),$$

где $x_\pm \equiv x_1 \pm x_2$, $\partial_\pm = \partial/\partial x_\pm$ и $C_\pm$ зависят только от $x_\pm$, соответственно:

$$C_+ \equiv C_1 - C_2 \equiv C_+(x_+), \quad C_- \equiv C_1 + C_2 \equiv C_-(x_-),$$

а также

$$F = F_1(x_+ + x_-) + F_2(x_+ - x_-).$$

Среди частных решений из этого класса [5], [8] мы рассмотрим здесь хорошо изученное двумерное обобщение одномерного потенциала Морса. Эта модель (для которой в общем случае нет разделения переменных) имеет вид

$$C_+ = 4a\alpha, \quad C_- = 4a\alpha \operatorname{cth} \frac{\alpha x_-}{2}, \quad (8)$$

$$f_1(x_1) \equiv \frac{1}{4}F_1(2x_1) = -A(e^{-2\alpha x_1} - 2e^{-\alpha x_1}), \quad (9)$$

$$f_2(x_2) \equiv \frac{1}{4}F_2(2x_2) = +A(e^{-2\alpha x_2} - 2e^{-\alpha x_2}), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\vec{x}) = & \alpha^2 a(2a - 1) \operatorname{sh}^{-2} \left(\frac{\alpha x_-}{2} \right) + 4a^2 \alpha^2 + \\ & + A[e^{-2\alpha x_1} - 2e^{-\alpha x_1} + e^{-2\alpha x_2} - 2e^{-\alpha x_2}], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) = & \alpha^2 a(2a + 1) \operatorname{sh}^{-2} \left(\frac{\alpha x_-}{2} \right) + 4a^2 \alpha^2 + \\ & + A[e^{-2\alpha x_1} - 2e^{-\alpha x_1} + e^{-2\alpha x_2} - 2e^{-\alpha x_2}], \end{aligned} \quad (12)$$

где параметры $a, A > 0, \alpha > 0$ – произвольные вещественные числа.

Именно для этой модели впервые были применены два новых метода: суперсимметричное разделение переменных и двумерная форминвариантность [3], [5]. С их помощью была продемонстрирована частичная решаемость этой модели [3], [5], [9] и аналитически получено множество волновых функций $\Psi_n, \tilde{\Psi}_n$ для параметров, лежащих в области

$$a \in \left(-\infty, -\frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \right), \quad \frac{\sqrt{A}}{\alpha} - n - \frac{1}{2} > -2a > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

что обеспечивает нормируемость 0-мод оператора Q^+ и отсутствие “падения на центр” (подробности см. в работах [3], [5]).

Напомним основную идею метода SUSY-разделения переменных. С помощью преобразования подобия суперзаряд $Q^\pm$ с лоренц-метрикой (4) может быть превращен в оператор, не содержащий линейных по производным членов:

$$\begin{aligned} q^\pm = e^{-\chi(\vec{x})} Q^\pm e^{\chi(\vec{x})} = & \partial_1^2 - \partial_2^2 + \frac{1}{4}(F_1(2x_1) + F_2(2x_2)), \\ \chi(\vec{x}) \equiv & -\frac{1}{4} \left(\int C_+(x_+) dx_+ + \int C_-(x_-) dx_- \right), \end{aligned} \quad (14)$$

в котором теперь разделяются переменные (поэтому метод и называется SUSY-разделением переменных). Если одномерные потенциалы $-F_1$ и $+F_2$ являются точно решаемыми, то нормируемые 0-моды $\Omega_n(\vec{x})$ для Q^+ могут быть найдены аналитически. Затем в силу (1) можно построить набор волновых функций для H как линейные комбинации нормируемых 0-мод, что и приводит к частичной решаемости модели. Метод форминвариантности [3] (а также наличие второй форминвариантности [9] в модели) позволяет расширить набор значений энергии и волновых функций, получаемых аналитически.

Ниже мы сформулируем еще один метод, в котором предполагается разделение переменных в одном из гамильтонианов–партнеров (причем это не будет выполняться для другого партнера). Выберем для нашей модели значения параметров таким образом, чтобы к H была применима стандартная процедура разделения переменных. Тогда наличие соотношений сплетания и знание 0-мод суперзаряда дают нам полную информацию о спектре партнера $\tilde{H}$, для которого нет обычного разделения переменных.

Такой подходящий выбор параметров в соотношении (12) возможен – при $a = -1/2$ гамильтониан H допускает разделение переменных:

$$H(\vec{x}) = h_1(x_1) + h_2(x_2) + \alpha^2, \quad h_1(x_1) \equiv -\partial_1^2 - f_1(x_1), \quad h_2(x_2) \equiv -\partial_2^2 + f_2(x_2), \quad (15)$$

а его волновые функции с энергиями

$$E_{n,m} = \epsilon_n + \epsilon_m + \alpha^2 \quad (16)$$

(последнее слагаемое связано с наличием свободного члена $4a^2\alpha^2$ в (12)) могут быть записаны как

$$\Psi_{E_{n,m}} = c_1 \eta_n(x_1) \eta_m(x_2) + c_2 \eta_m(x_1) \eta_n(x_2), \quad c_1, c_2 = \text{const}, \quad (17)$$

где ϵ_k и $\eta_k(x)$ являются решениями точно решаемой одномерной задачи для стандартного потенциала Морса в терминах вырожденной гипергеометрической функции (см. [11]):

$$(-\partial^2 + A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}))\eta_k(x) = \epsilon_k \eta_k(x), \quad (18)$$

$$\eta_k = e^{-\xi/2}(\xi)^{s_k} \Phi(-k, 2s_k + 1; \xi), \quad \xi \equiv \frac{2\sqrt{A}}{\alpha} e^{-\alpha x}, \quad (19)$$

$$\epsilon_k = -A \left[1 - \frac{\alpha}{\sqrt{A}} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]^2, \quad s_k = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} - k - \frac{1}{2}. \quad (20)$$

Таким образом, двумерное уравнение Шредингера с гамильтонианом H , разумеется, точно решается и имеет двукратное вырождение уровней с $n \neq m$.

Следующим нашим шагом будет использование соотношений сплетания (1) для получения с помощью соотношений (3) волновых функций гамильтониана $\tilde{H}$, который не допускает разделения переменных. Из явного вида Q^+ становится ясно, что из-за сингулярности Q^+ при $x_- \rightarrow 0$ необходимо детальное исследование нормируемости функций $\tilde{\Psi}$. Хотя полный анализ этой проблемы затруднен из-за наличия в (17) гипергеометрических функций, отдельные нормируемые собственные функции $\tilde{H}$ можно исследовать. Так, рассматривая антисимметричные ($c_1 = -c_2$) волновые функции $\Psi_{E_{n,m}}^A$ вида (17), можно проверить³⁾, что при $|n - m| = 1$ они представляют собой линейные комбинации 0-мод $\Omega_k(\vec{x})$ оператора Q^+ :

$$\Psi_{E_{m+1,m}}^A = -\Psi_{E_{m,m+1}}^A = \frac{2(s_{m+1} + 1)(2s_{m+1} + 1)}{2s_{m+1} + m + 2} \sum_{k=0}^{k=m} a_{m+1,k} \Omega_k(\vec{x}),$$

³⁾Для этого необходимо использовать некоторые элементарные соотношения между вырожденными гипергеометрическими функциями (см. книгу [11], т. 1, п. 6.3), а также свойства, выведенные в работе [3], раздел 4.4.

и поэтому *не имеют партнеров* среди связанных состояний $\tilde{H}$. Симметричные функции ($c_1 = c_2$) из (17) при $n = m \pm 1$ дают $Q^+ \Psi_{E_{m \pm 1, m}}^S$, которые также отсутствуют среди связанных состояний $\tilde{H}$ из-за своего ненормируемого поведения при $x_- \rightarrow 0$. Таким образом, в спектр $\tilde{H}$ определенно *не входят* точки $E_{m \pm 1, m}$.

Из волновой функции $\Psi_{E_{0,2}}^A$ получается симметричная функция $\tilde{\Psi}_{E_{0,2}}^S$, которую можно представить в следующем виде:

$$\tilde{\Psi}_{E_{0,2}}^S \equiv Q^+ \Psi_{E_{0,2}}^A = \alpha^2 (2s_2 + 3) (\xi_1 - \xi_2)^2 e^{-(\xi_1 + \xi_2)/2} (\xi_1 \xi_2)^{s_2}.$$

Этот пример позволяет увидеть, что подходящий выбор c_1 , c_2 , n , m в (17) может скомпенсировать сингулярность в Q^+ и обеспечить нормируемость волновой функции $\tilde{\Psi}_{E_{n,m}}$.

В принципе кроме собственных функций $\tilde{\Psi}$ гамильтониана $\tilde{H}$, обсуждавшихся выше, могут существовать другие нормируемые собственные функции. В этом случае из-за соотношений сплетения действие на них оператора Q^- должно давать либо нуль, либо ненормируемые функции Ψ . Первая из описанных возможностей исключается при анализе 0-мод $Q^-(a = -1/2) \equiv Q^+(a = +1/2)$, принимая во внимание, что $a = +1/2$ лежит вне области (13). Вторая возможность тоже не реализуется, так как все нормируемые собственные функции $\tilde{H}$ с потенциалом (11) и $a = -1/2$ имеют асимптотику $\tilde{\Psi} \sim x_-^2$ при $x_- \rightarrow 0$. Поэтому действие Q^- не влияет на их нормируемость, и мы возвращаемся к описанному выше случаю.

3. КОМПЛЕКСИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ

Поскольку спектр связанных состояний $\tilde{H}$ при $a = -1/2$ трудно анализировать из-за сингулярностей $\tilde{V}(\vec{x})$ и $Q^\pm$ при $x_- = 0$, естественно было бы попытаться как-то от них избавиться. В одномерной квантовой механике известно, как этого добиться [12]: сдвинуть координату в комплексную область. Это означает, что теперь нам придется, вообще говоря, иметь дело с комплексными потенциалами⁴⁾.

В нашем двумерном случае⁵⁾ необходимо сдвинуть $x_- = x_1 - x_2$, что нарушает симметрию системы относительно перестановки $x_1 \leftrightarrow x_2$. Простейший способ – замена

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} + i\vec{\delta}, \quad \vec{\delta} = (\delta, 0)$$

(с достаточно малым δ , чтобы выполнялось $\alpha\delta \in (0, \pi/2)$), сдвигающая сингулярность с вещественной плоскости (x_1, x_2) . В терминах ξ в формуле (19) появится фазовый множитель: $\xi \rightarrow e^{-i\alpha\delta} \xi$. Как всегда, такой мнимый сдвиг $\vec{x}$ сохраняет *вещественность спектра* оператора Шредингера.

При таком сдвиге формулы раздела 2 изменяются незначительно. Оператор $Q^-(\vec{x} + i\vec{\delta})$ в выражении (5) сохраняет свой вид, но теперь он не является эрмитово сопряженным к $Q^+(\vec{x} + i\vec{\delta})$, а именно $Q^- = ((Q^+)^{\dagger})^* = (Q^+)^t$. Функции (8)–(10) становятся комплексными, а потенциалы (11), (12) (также комплексные) теперь

⁴⁾ Имеется обширная литература, касающаяся одномерных неэрмитовых гамильтонианов, начало которой положила оригинальная работа Бендера и Ботчера [13] (см., например, [14]).

⁵⁾ Неэрмитовы гамильтонианы в двумерной квантовой механике исследовались в работе [4].

связаны соотношениями

$$\tilde{V}(\vec{x} + i\vec{\delta}) = \tilde{V}^*(\vec{x} - i\vec{\delta}) = e^{-2i\vec{\delta}\vec{\partial}} \tilde{V}^*(\vec{x} + i\vec{\delta}) e^{2i\vec{\delta}\vec{\partial}}.$$

Это равенство выражает свойство псевдоэрмитовости для неэрмитовых гамильтонианов, и оно гарантирует [10] в общем случае, что спектр состоит из вещественных собственных значений и пар, комплексно-сопряженных друг к другу. В частности, в нашем случае известно, что спектр $\tilde{H}$ вещественный.

Собственные функции $\eta_k(x)$ одномерного уравнения Морса (17) выражаются через вырожденные гипергеометрические функции как в формуле (19), но с $\xi \rightarrow e^{-i\alpha\delta}\xi$, и остаются нормируемыми. Можно проверить, что *никаких дополнительных нормируемых* решений (17) не появляется для комплексных x . В самом деле, после подстановки $\eta_k \equiv e^{-\xi/2} \xi^s Y(\xi)$ уравнение (18) по переменной ξ превращается в вырожденное гипергеометрическое уравнение [11]. Существуют разные способы представить его общее решение. Удобным является

$$Y(\xi) = c_1 y_5(\xi) + c_2 y_7(\xi),$$

где ξ включает фазовый множитель, а определения линейно независимых решений y_5, y_7 взяты из книги [11] (см. т. 1, п. 6.7):

$$y_5 = \Phi(a, b; \xi), \quad y_7 = e^\xi \Psi(b - a, b; -\xi). \quad (21)$$

Именно наличие экспоненты в y_7 позволяет доказать, что единственный способ получить *нормируемые* Y даже при комплексных ξ – это положить $c_2 = 0$. Следовательно, условия нормируемости приводят к соотношениям (19), (20), и известен весь спектр связанных состояний (16) гамильтониана $H(\vec{x} + i\vec{\delta})$, который остается *вещественным* после этой комплексификации.

Снова используя соотношения сплетания (1), можно получить собственные функции

$$\tilde{\Psi}_{E_{n,m}}(\vec{x} + i\vec{\delta}) = Q^+ \eta_n(x_1 + i\delta) \eta_m(x_2).$$

Благодаря отсутствию сингулярности в Q^+ при $x_- \rightarrow 0$ они будут нормируемыми.

Следует помнить, что гамильтонианы–партнеры являются изоспектральными только с точностью до 0-мод суперзарядов. Нормируемые 0-моды Q^+ для рассматриваемой модели были построены и подробно исследованы в работе [3]. Было доказано, что из них можно построить множество линейных комбинаций, которые будут являться собственными функциями гамильтониана H . В частности, это может быть сделано и при $a = -1/2$ (когда в H разделяются переменные), в результате чего получаются собственные значения [3]

$$E_k = 2\epsilon_k + 2\alpha^2 s_k = -2\alpha^2 s_k (s_k - 1) = \epsilon_{k+1} + \epsilon_k + \alpha^2, \quad s_k = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} - k - \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Для произвольных n, m собственные значения (16) гамильтониана H являются двукратно вырожденными: в (17) присутствуют и симметричные, и антисимметричные компоненты. Но в частном случае $n = m \pm 1$ *антисимметричная* комбинация

$\Psi_{E_{m\pm 1,m}}^A$ уничтожается оператором Q^+ . В отличие от эрмитовой модели из раздела 2 для *симметричной* функции $\Psi_{E_{m\pm 1,m}}^S$ ее партнер $\tilde{\Psi}_{E_{m\pm 1,m}}^A = Q^+ \Psi_{E_{m\pm 1,m}}^S$ в комплексной модели не имеет сингулярности по $x_- \rightarrow 0$, и, значит, соответствующие уровни энергии $E_{m\pm 1,m}$ включаются в спектр $\tilde{H}$, но вырожденными они не будут.

Возникающие, возможно, 0-моды $Q^-(a) = Q^+(-a)$ можно исследовать тем же методом, что и в работе [3]; соответствующие собственные значения $E_k = -2\alpha^2 s_k + 2\epsilon_k$. Поскольку они совпадают с $E_{k,k-1}$ из общего выражения (16), 0-моды $Q^-(a)$ не дают никаких новых собственных состояний $\tilde{H}$.

Таким образом, комплексная модель с гамильтонианом $\tilde{H}(\vec{x} + i\delta)$ при $a = -1/2$ является *точно решаемой* и имеет вещественный спектр:

$$E_{n,m} = \epsilon_n + \epsilon_m + \alpha^2. \quad (23)$$

Для значений $n = m \pm 1$ уровни будут невырожденными, при всех других n, m имеется двукратное вырождение. Волновые функции $\tilde{H}$ имеют вид

$$\tilde{\Psi}_{E_{n,m}} = Q^+ \Psi_{E_{n,m}}, \quad (24)$$

где $\Psi_{E_{n,m}}$ даются выражениями (17) с заменой $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + i\vec{\delta}$, $\vec{\delta} = (\delta, 0)$.

4. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ И БИОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

Известно [5], [8], что “по построению” все гамильтонианы $\tilde{H}$, H , участвующие в соотношениях сплетания (1) с операторами $Q^\pm$ второго порядка по производным, находятся в инволюции с операторами четвертого порядка по производным:

$$\tilde{R} = Q^+ Q^-, \quad R = Q^- Q^+, \quad [H, R] = 0, \quad [\tilde{H}, \tilde{R}] = 0. \quad (25)$$

Эти операторы симметрии не сводятся к функциям от гамильтонианов⁶⁾, и поэтому все такие системы, включая рассматриваемую в настоящей работе, являются *интегрируемыми*.

В частном случае $a = -1/2$ с разделением переменных в H , который рассматривается в данной работе, выражения для R и $\tilde{R}$ могут быть переписаны с помощью преобразования подобия (14) и явного вида одномерных гамильтонианов $h_1(x_1)$, $h_2(x_2)$ из (15):

$$Q^\pm = e^{\pm\chi} q^\pm e^{\mp\chi} = e^{\pm\chi} (h_2 - h_1) e^{\mp\chi}.$$

Тогда оператор симметрии R для гамильтониана с разделением переменных имеет вид

$$R = (h_2 - h_1)^2 + 2\alpha^2(h_1 + h_2) + \alpha^4,$$

и его волновые функции (17) являются одновременно собственными функциями R с собственными значениями

$$r_{n,m} = (\epsilon_m - \epsilon_n)^2 + 2\alpha^2(\epsilon_m + \epsilon_n) + \alpha^4.$$

⁶⁾За исключением случая суперзарядов с метрикой Лапласа, который здесь не рассматривается (подробнее см. в работах [8]).

Волновые функции (24) гамильтониана $\tilde{H}$ с неразделяющимися переменными также являются общими для $\tilde{R}$:

$$\tilde{R}\tilde{\Psi}_{E_{n,m}} = Q^+Q^-Q^+\Psi_{E_{n,m}} = r_{n,m}\tilde{\Psi}_{E_{n,m}}.$$

Таким образом, свойство, отмеченное в работе [3] для нескольких известных волновых функций, в рассматриваемой точно решаемой модели выполняется для всех волновых функций. Хотя почти все (при $n \neq m$) волновые функции $\tilde{\Psi}_{E_{n,m}}$ являются двукратно вырожденными, действие оператора симметрии $\tilde{R}$ не перемешивает их.

Факторизованные волновые функции $\Psi_{E_{n,m}}(\vec{x} + i\vec{\delta})$ для неэрмитова гамильтониана $H(\vec{x} + i\vec{\delta})$ и комплексно-сопряженные к ним функции $\Psi_{E_{n,m}}^*$ образуют так называемый биортогональный базис неэрмитова гамильтониана. Соответствующие соотношения биортогональности

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{E_{n,m}}^* | \Psi_{E_{n',m'}} \rangle &= \int d^2x \Psi_{E_{n,m}}(\vec{x} + i\vec{\delta}) \Psi_{E_{n',m'}}(\vec{x} + i\vec{\delta}) = \\ &= \int dx_1 \eta_n(x_1 + i\delta) \eta_{n'}(x_1 + i\delta) \int dx_2 \eta_n(x_2) \eta_{n'}(x_2) = \\ &= \delta_{nn'} \delta_{mm'} \end{aligned} \quad (26)$$

могут быть проверены либо прямым вычислением, либо сравнением интеграла вдоль линии $x_1 + i\delta$ с аналогичным интегралом вдоль вещественной оси x_1 для случая $\delta = 0$ и вещественных волновых функций η_n . Отсутствие для эрмитовых гамильтонианов сингулярностей в узкой полосе между этими линиями означает, что соотношения (26) следуют из обычной ортогональности волновых функций для эрмитова гамильтониана. Наоборот, если бы рассматривалось скалярное произведение, определенное с комплексным сопряжением под интегралом (26), связь с эрмитовым случаем была бы не так очевидна.

Биортогональный базис связанных состояний для неэрмитова оператора $\tilde{H}(\vec{x} + i\vec{\delta})$ состоит из $\tilde{\Psi}_{E_{n,m}} = Q^+\Psi_{E_{n,m}}$ и $\tilde{\Psi}_{E_{n,m}}^* = (Q^+)^*\Psi_{E_{n,m}}^*$. Поскольку $Q^- = ((Q^+)^\dagger)^*$, скалярное произведение можно представить как

$$\langle \tilde{\Psi}_{E_{n,m}}^* | \tilde{\Psi}_{E_{n',m'}} \rangle = \langle (Q^+)^*\Psi_{E_{n,m}}^* | Q^+\Psi_{E_{n',m'}} \rangle = \langle \Psi_{E_{n,m}}^* | Q^-Q^+\Psi_{E_{n',m'}} \rangle.$$

Так как $\Psi_{E_{n',m'}}$ является также и собственной функцией оператора симметрии $R = Q^-Q^+$ с собственным значением $r_{n,m}$, биортогональность для $\tilde{H}(\vec{x} + i\vec{\delta})$ следует непосредственно из (26), что приводит к диагонализации $\tilde{H}$ на подпространстве связанных состояний.

Благодарности. Работа частично поддержана ИНФН, Университетом Болоньи (М. В. Иоффе и Д. Н. Нишнианидзе) и Министерством Образования и Науки Испании (М. В. Иоффе, грант SAB2004-0143), а также Федеральным агентством по образованию РФ (грант РНП 2.1.1.1112). Один из авторов (М. В. Иоффе) также признателен Х. Негро и Л. Нието за гостеприимство в Вальядолиде и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] F. Calogero, *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 2191; 2197; **12** (1971), 419; M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, *Phys. Rep.*, **94** (1983), 313.
- [2] M. V. Ioffe, A. I. Neelov, *J. Phys. A*, **35** (2002), 7613.
- [3] F. Cannata, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, *J. Phys. A*, **35** (2002), 1389.
- [4] F. Cannata, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, *Phys. Lett. A*, **310** (2003), 344.
- [5] M. V. Ioffe, *J. Phys. A*, **37** (2004), 10363.
- [6] M. V. Ioffe, P. A. Valinevich, *J. Phys. A*, **38** (2005), 2497.
- [7] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, *J. Phys. A*, **32** (1999), 4641.
- [8] A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, *Phys. Lett. A*, **201** (1995), 103; *Higher order SUSY in quantum mechanics and integrability of two-dimensional hamiltonians*, [solv-int/9605007](#); A. A. Андрианов, М. В. Иоффе, Д. Н. Нишнанидзе, *ТМФ*, **104** (1995), 463.
- [9] F. Cannata, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, *Phys. Lett. A*, **340** (2005), 31.
- [10] A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.*, **43** (2002), 205; 2814; 3944.
- [11] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*. Т. 1–3, Наука, М., 1973.
- [12] V. S. Buslaev, V. Grecchi, *J. Phys. A*, **26** (1993), 5541; F. Cannata, M. V. Ioffe, R. Roychoudhury, P. Roy, *Phys. Lett. A*, **281** (2001), 305; Z. Ahmed, *Phys. Lett. A*, **290** (2001), 19.
- [13] C. M. Bender, S. Boettcher, *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998), 5243.
- [14] C. M. Bender, *Introduction to PT-symmetric quantum theory*, [quant-ph/0501052](#); A. Mostafazadeh, A. Batal, *J. Phys. A*, **37** (2004), 11645.

Поступила в редакцию 24.10.2005