Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Ляховский, Квантовая дуальность в квантовых деформациях, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 1, 112–125

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2062>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 10:51:45

© 2006 г.

В. Д. Ляховский*

КВАНТОВАЯ ДУАЛЬНОСТЬ В КВАНТОВЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В соответствии с квантовым принципом дуальности скрученная алгебра $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ эквивалентна квантовой группе $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^{\#})$ и имеет два предпочтительных базиса: первый наследуется из универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, второй порожден координатными функциями дуальной группы Ли $\mathfrak{G}^{\#}$. Продемонстрировано, как преобразование $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\#}$ может быть получено в явной форме для любой простой алгебры Ли и факторизуемой цепи $\mathcal{F}$ расширенных жордановых твистов. В алгебре $\mathfrak{g}^{\#}$ вводится естественная векторная градуировка $\Gamma(\mathfrak{g}^{\#})$, согласованная с присоединенным представлением алгебры. Переход к координатам дуальной группы позволяет существенно упростить конструкцию деформированной алгебры Хопфа $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$, рассматриваемой как квантовая группа $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^{\#})$. Преобразование $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^{\#}$ может быть использовано при построении новых решений уравнений твиста. Параметризованное семейство расширенных жордановых деформаций $U_{\mathcal{E}\mathcal{J}}(\mathfrak{sl}(3))$ конструируется и изучается в терминах $\mathcal{SL}(3)^{\#}$, обнаружены новые реализации параболического твиста.

Ключевые слова: структуры Ли–Пуассона, квантовые деформации симметрии, квантовая дуальность.

*Посвящается юбилею моего учителя
Юрия Викторовича Новожилова*

1. ВВЕДЕНИЕ

В деформационном квантовании, где алгебра наблюдаемых деформируется “в направлении” скобки Пуассона и превращается в некоммутативную алгебру координатных функций, построение умножения в явном виде остается весьма сложной задачей [1]. Квантовый принцип дуальности [2], [3] позволяет строить деформированные группы с помощью квантовых универсальных обертывающих алгебр. Решающую роль в построении нестандартных квантовых алгебр для простых алгебр Ли играют постоянные треугольные решения уравнения Янга–Бакстера. Такие решения носят название скручиваний [4] и описывают структуры Ли–Пуассона, совместимые с алгебрами Ли $\mathfrak{g}$, т.е. механические системы, которые могут существовать на

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: lyakhovs@pobox.spbu.ru

пространстве с фиксированной некоммутативностью. Скручивания $U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ обычно описываются в базисе Пуанкаре–Биркхофа–Витта ($\mathfrak{g}$ -базисе) недеформированной алгебры Хопфа $U(\mathfrak{g})$ с умножением m и коумножением $\Delta^{(0)}$, где $\Delta^{(0)}$ обозначает примитивное копроизведение: $\Delta^{(0)}(g) = g \otimes 1 + 1 \otimes g$ для $g \in \mathfrak{g}$. Применение $\mathfrak{g}$ -базиса естественно, когда внимание сосредоточено на алгебраическом секторе алгебры Хопфа. Используя его, мы явно демонстрируем, что алгебраические соотношения в $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ остаются классическими, и умножение группы Ли–Пуассона зашифровано в элементе твиста $\mathcal{F}$. Результат скручивания посредством $\mathcal{F}: U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ [4] является алгеброй Хопфа $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ с теми же умножением m , единицей и коединицей, но с деформированными универсальным элементом $\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{F}^{-1}$ и коумножением

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\Delta^{(0)}\mathcal{F}^{-1}.$$

Рассмотрим алгебру Хопфа $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ как квантованную биалгебру Ли $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\#})$, т.е. как деформацию $U(\mathfrak{g})$ в направлении $\mathfrak{g}^{\#}$. В соответствии с квантовым принципом дуальности алгебра $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$, гладко скрученная твистом $\mathcal{F}$, является квантовой группой $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^{\#})$ дуальной группы Ли $\mathfrak{G}^{\#}$. Группа $\mathfrak{G}^{\#}$ является универсальной накрывающей группой с алгеброй Ли $\mathfrak{g}^{\#}$. Для скрученной универсальной обертывающей алгебры $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ коалгебра Ли определяется классической r -матрицей,

$$r = r^{lk} e_l \wedge e_k, \quad l, k = 1, \dots, m, \quad (1)$$

и задается коскобкой

$$\delta: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \quad \delta = \text{ad}_{(r)} \circ \Delta^{(0)}.$$

Минимальный набор $\{e_l \mid l = 1, \dots, m\}$, необходимый для задания r , образует базис подалгебры-носителя $\mathfrak{g}_c$ твиста $\mathcal{F}$. Коструктура $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ описывает закон композиции в $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^{\#})$, т.е. деформированное умножение в $\text{Fun}(\mathfrak{G}^{\#})$. Деформация заключается в том, что координатные функции в $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^{\#})$ не коммутируют, они подчинены закону композиции m в $U(\mathfrak{g})$.

Структура дуальной алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\#}$ может быть описана в терминах генераторов $\mathfrak{g}$ как “вторая” лиева структура на пространстве $\mathfrak{g}$. Когда алгебра $U(\mathfrak{g})$ деформируется с помощью твиста $\mathcal{F}$, это с очевидностью приводит не только к деформации (первоначально кокоммутативной) коструктуры, но также к преобразованию базиса в пространстве координатных функций. Это может быть продемонстрировано на примере жорданова твиста $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}: U(\mathfrak{b}(2)) \longrightarrow U_{\mathcal{J}}(\mathfrak{b}(2))$ в $U(\mathfrak{b}(2))$. Носителем твиста $\mathcal{F}_{\mathcal{J}} = e^{H \otimes \sigma}$, где $\sigma = \ln(1 + E)$, является алгебра $\mathfrak{b}(2)$ с генераторами $\{H, E\}$ и соотношением $[H, E] = E$. Дуальная алгебра $\mathfrak{b}(2)^{\#}$ эквивалентна $\mathfrak{b}(2)$, поскольку классическая r -матрица $H \wedge E$ описывает изоморфизм

$$r: \left\{ \begin{array}{l} H^* \Leftrightarrow E \\ E^* \Leftrightarrow -H \end{array} \right\}.$$

Универсальный элемент для жорданова твиста $\mathcal{R} = \mathcal{F}_{21}\mathcal{F}^{-1} = e^{\sigma \otimes H} e^{-H \otimes \sigma}$ показывает, что в дуализации алгебр $U(\mathfrak{b}(2))$ и $U(\mathfrak{b}(2)^{\#})$ генератор E является лишь

первым членом разложения H^* , в то время как элементом, дуальным к H , является формальный ряд σ . Тот же факт достаточно наглядно демонстрируется в конструкции алгебры $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{b}(2)) = \text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{B}(2)^{\#})$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{F}}(H) &= H \otimes e^{-\sigma} + 1 \otimes H, \\ \Delta_{\mathcal{F}}(\sigma) &= \sigma \otimes 1 + 1 \otimes \sigma.\end{aligned}\tag{2}$$

Эти соотношения есть не что иное, как правила умножения в группе $\mathfrak{B}(2)^{\#}$ (полу-прямом произведении “вращения” $(e^{-\sigma})^*$ и “трансляции” H^*) с элементом Картана σ , который вместе с H образует здесь $\mathfrak{g}^{\#}$ -базис – базис координатных функций дуальной группы.

Как мы показали выше, $\mathfrak{g}^{\#}$ -координаты легко получить, если подалгебра-носитель твиста $\mathfrak{g}_c$ совпадает с $\mathfrak{g}$. В большинстве интересных случаев носителем является собственная подалгебра $\mathfrak{g}_c \subset \mathfrak{g}$. Подпространство V_a в разложении $V_{\mathfrak{g}} = V_{\mathfrak{g}_c} \oplus V_a$ нетривиально, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста [5]. На подпространстве $V_{\mathfrak{g}_c}$ и в алгебре Хопфа $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g}_c)$ дуальные координаты $\mathfrak{g}^{\#}$ могут быть получены с помощью твиста $\mathcal{F}$ как отображение $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^{\#}$. Скручивание на пространстве V_a обычно описывается набором копроизведений для базисных элементов в $\mathfrak{g}$ и выражается в терминах смешанного базиса, содержащего элементы как $\mathfrak{g}$ -, так и $\mathfrak{g}_c^{\#}$ -базисов. В такой реализации свойства дуальной группы оказываются зашифрованы в неадекватном базисе.

Деформированная конструкция является существенной не только сама по себе. Необходимо знать ее характеристики для того, чтобы найти дополнительные скручивания $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ и построить новые твисты, увеличивая число факторов в $\mathcal{F}$, другими словами, для того, чтобы найти факторизованные решения уравнений твиста [4]. В частности, особенно важными являются подпространства в V_a с квазипримитивным коумножением [6], [7].

В этой работе мы рассмотрим универсальные обертывающие алгебры $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ для полупростых алгебр Ли $\mathfrak{g}$, скрученные цепями расширенных твистов – факторизуемыми 2-коциклами $\mathcal{F} = \mathcal{F}_p \mathcal{F}_{p-1} \dots \mathcal{F}_1$, где каждый фактор $\mathcal{F}_q$ является решением уравнений твиста для $U_{\mathcal{F}_{q-1} \dots \mathcal{F}_1}(\mathfrak{g})$. Эти решения (называемые твистовыми факторами [8]) бывают трех типов: жордановы факторы [9], факторы расширения [10] и абелевы факторы [11]. Абелев фактор в цепях $\mathcal{F}$ используется только для преобразований “вращения” жорданова скручивания и всегда может быть совмещен с соответствующим жордановым твистом.

В разделе 3 для дуальной алгебры $\mathfrak{g}^{\#}$ построена векторная градуировка, согласованная с ее присоединенным представлением. В разделе 4 разработан алгоритм для определения $\mathfrak{g}^{\#}$ -координат в алгебре Хопфа $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$. В разделе 5 реализация деформированной алгебры в базисе дуальной группы использована для изучения свойств алгебры Хопфа $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{sl}(3))$. Продемонстрировано, что дуальное представление конструкции может быть использовано для поиска новых скручиваний.

2. ДУАЛЬНАЯ АЛГЕБРА ЛИ

Рассмотрим простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и базис Картана–Вейля $\{e_i \mid i = 1, \dots, n\}$, согласованный с разложением $V_{\mathfrak{g}} = V_{\mathfrak{h}} \oplus V_{n+} \oplus V_{n-} = V_{\mathfrak{h}} \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} (V_{\nu} \oplus V_{-\nu})$,

$$\begin{aligned} V_{n+} \oplus V_{n-} &= \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} (V_{\nu} \oplus V_{-\nu}) = \\ &= V_{\lambda} \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+ \mid \nu(h_{\lambda})=1/2} (V_{\nu} \oplus V_{-\nu}) \bigoplus_{\xi \in \Lambda^+ \mid \xi(h_{\lambda})=0} (V_{\xi} \oplus V_{-\lambda}) = \\ &= V_1 \oplus V_{1/2} \oplus V_0 \oplus V_{-1/2} \oplus V_{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь λ – длинный корень и вектор h_{λ} нормирован канонически: $\lambda(h_{\lambda}) = 1$.

Подалгебра $\mathfrak{g}_c$ (носитель цепи $\mathcal{F}$) является собственной в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_c \subset \mathfrak{g}$. Генераторы $\{e_l \mid l = 1, \dots, m\}$ носителя $\mathfrak{g}_c$ содержат корневые векторы $\{e_{\phi} \mid \phi \in \Lambda_c \subset \Lambda(\mathfrak{g})\}$ для фиксированного набора корней Λ_c [12]. Пусть подпространство $h_{\{\lambda_0\}}^{\perp}$ ортогонально набору начальных корней λ_0 [6] в цепи $\mathcal{F}$. Рассмотрим подпространство $V_{\mathfrak{a}} \subset V_{\mathfrak{g}}$, порожденное элементами $\{e_{\nu} \mid \nu \in \Lambda \setminus \Lambda_c\}$ и подпространством $h_{\{\lambda_0\}}^{\perp}$ в подалгебре Картана. Пространство алгебры есть прямая сумма: $V_{\mathfrak{g}} = V_{\mathfrak{g}_c} \oplus V_{\mathfrak{a}}$. Построим базис функционалов $\{e_i^*\}$, канонически дуальный к $\{e_i\}$, т.е. $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Пусть Γ – весовая диаграмма присоединенного представления $\text{ad}_{\mathfrak{g}}$. Наша цель – определить векторную градуировку $\Gamma^{\#}$ алгебры $\mathfrak{g}^{\#}$, согласованную с ее присоединенным действием. Структура $\Gamma^{\#}$ описывается в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли с диаграммой весов присоединенного представления $\Gamma_{\text{ad}(\mathfrak{g})}$ и разложением Картана $V_{\mathfrak{g}} = V_{\mathfrak{h}} \bigoplus_{\nu \in \Lambda^+} (V_{\nu} \oplus V_{-\nu})$. Пусть

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_p \mathcal{F}_{p-1} \dots \mathcal{F}_1 \quad (4)$$

– решение уравнения скручивания, где каждый $\mathcal{F}_q$ является жордановым или расширенным твистовым фактором, и

$$r_{\mathcal{F}} = \sum_{l,k=1, \dots, \dim(\mathfrak{g}_c)} r^{lk} e_l \wedge e_k \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$$

– соответствующая антисимметричная r -матрица, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{\#})$ – биалгебра Ли. Тогда векторная градуировка $\Gamma^{\#}$ дуальной алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\#}$ является объединением диаграммы $\Gamma_c^{\#}$, эквивалентной подсистеме $\Gamma_{\text{ad}(\mathfrak{g}_c)}$ в $\Gamma_{\text{ad}(\mathfrak{g})}$, и набора векторов $\Gamma_{\mathfrak{a}}^{\#}$, эквивалентного поддиаграмме в $\Gamma_{\text{ad}(\mathfrak{g})}$: $\Gamma_{\mathfrak{a}}^{\#} \approx \Gamma_{\text{ad}(\mathfrak{g})} \setminus \Gamma_{\text{ad}(\mathfrak{g}_c)}$. Система $\Gamma_c^{\#}$ является набором весов $\{-\gamma_i\}$, противоположных весам носителя $\mathfrak{g}_c$. Для каждой компоненты $r^{\varphi\psi} \neq 0$ в r генератор $(e_{\varphi})^*$ получает вес $-\psi$, а генератор $(e_{\psi})^*$ – вес $-\varphi$. Элементы $\{e_{\eta}^* \mid \eta \in \Gamma_{\mathfrak{a}}^{\#}\}$ генерируют абелев идеал $\mathfrak{g}_{\mathfrak{a}}^{\#}$ в дуальной алгебре $\mathfrak{g}^{\#}$, которая является полупрямой суммой, $\mathfrak{g}^{\#} \approx \mathfrak{g}_c^{\#} \ltimes \mathfrak{g}_{\mathfrak{a}}^{\#}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим композицию дуальной алгебры $\mathfrak{g}^{\#}$, записанную в виде коскобки $\delta(g)$ для $g \in \mathfrak{g}$:

$$\delta(g) = [r^{kl} e_k \wedge e_l, g \otimes 1 + 1 \otimes g] = r^{kl} [e_k g] \wedge e_l + r^{kl} e_k \wedge [e_l g]. \quad (5)$$

Образ $\delta(g)$ отличен от нуля, если и только если один из его тензорных сомножителей принадлежит $\mathfrak{g}_c$. Если $g \in \mathfrak{g}_c$, то $\delta(g)$ принадлежит $\mathfrak{g}_c \otimes \mathfrak{g}_c$, поскольку $\mathfrak{g}_c$ является алгеброй. Тем самым доказано, что $\mathfrak{g}_a^\#$ является абелевым идеалом в $\mathfrak{g}^\#$.

Классическая r -матрица описывает деформацию (скручивание посредством r) би-алгебры Ли, $r: (\mathfrak{g}, \text{Ab}) \longrightarrow (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\#)$ [2]. Каждое слагаемое в r порождает деформирующую функцию для первоначального абелева закона композиции дуальной алгебры. Пусть r – классическая r -матрица, соответствующая цепи расширенных твистов $\mathcal{F}(r)$. Чтобы найти структуру алгебры $\mathfrak{g}_{\mathcal{F}(r)}^\#$, достаточно рассмотреть деформирующие функции, происходящие из двух базисных твистовых факторов (БТФ): жорданова фактора и фактора расширения [10].

Жорданов БТФ имеет каноническую форму [9]:

$$\tilde{F}_J = e^{h \otimes \sigma_\lambda}, \quad \sigma_\lambda = \ln(1 + e_\lambda), \quad [h, e_\lambda] = e_\lambda.$$

Он может быть деформирован предыдущими твистовыми факторами [7], [12] и приобрести более сложную структуру. Тем не менее во всех случаях его можно записать в виде

$$\tilde{F}_J = e^{h \otimes \tilde{\sigma}}, \quad \tilde{\sigma} = \ln(1 + f(e_\lambda; e_\alpha, \xi_q)), \quad \lim_{\xi_q \rightarrow 0} f(e_\lambda; e_\alpha, \xi_q) = e_\lambda$$

(ξ_q являются деформирующими параметрами предшествующих скручиваний). Соответствующая жорданову БТФ r -матрица имеет вид

$$r_J = h \wedge e_\lambda,$$

где элемент Картана $h = h_\lambda + \gamma h_\perp \in V_{\mathfrak{h}}$, $\lambda(h_\perp) = 0$, и $[h, e_\lambda] = \lambda(h)e_\lambda$; $\lambda(h) = \lambda(h_\lambda) = 1$. Элементы h^* и $h_\perp^*$ канонически дуальны: $\langle h^*, h_\perp \rangle = 0$, $\langle h^*, h \rangle = \langle h_\perp^*, h_\perp \rangle = 1$. Коскобки на подалгебре $\mathfrak{g}_{\mathcal{J}_c} = B(2)$ (носителе жорданова скручивания),

$$\begin{aligned} \delta(h) &= [h \otimes e_\lambda - e_\lambda \otimes h, h \otimes 1 + 1 \otimes h] = -h \wedge e_\lambda, \\ \delta(e_\lambda) &= [h \otimes e_\lambda - e_\lambda \otimes h, e_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes e_\lambda] = 0, \end{aligned}$$

показывают, что коммутационные соотношения в $\mathfrak{g}_{\mathcal{J}_c}^\#$ определяются деформирующей функцией (гомоморфизмом пространств $\mathfrak{g}^\# \wedge \mathfrak{g}^\# \longrightarrow \mathfrak{g}^\#$ [13]),

$$f_J^\#(e_\lambda^*, h^*) = h^*,$$

и e_λ^* служат элементами Картана в $\mathfrak{g}_{\mathcal{J}_c}^\#$.

Рассмотрим $a_\nu \in V_a$. Имеем

$$\delta(a_\nu) = [h \otimes e_\lambda - e_\lambda \otimes h, a_\nu \otimes 1 + 1 \otimes a_\nu] = \nu(h_\lambda + \gamma h_\perp)a_\nu \wedge e_\lambda + C_{\lambda\nu}^{\lambda+\nu} h \wedge a_{\lambda+\nu}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} f_J^\#(e_\lambda^*, a_\nu^*) &= -\nu(h_\lambda + \gamma h_\perp)a_\nu^*, \\ f_J^\#(h^*, a_{\lambda+\nu}^*) &= C_{\lambda\nu}^{\lambda+\nu} a_\nu^*, \end{aligned}$$

т.е. h^* в базисе исходной корневой системы Λ имеет градуировку $(-\lambda)$. Далее,

$$\begin{aligned}\delta(a_{-\lambda}) &= [h \otimes e_\lambda - e_\lambda \otimes h, a_{-\lambda} \otimes 1 + 1 \otimes a_{-\lambda}] = e_\lambda \otimes a_{-\lambda} - 2\gamma h \wedge h_\perp; \\ f_J^\#(e_\lambda^*, a_{-\lambda}^*) &= a_{-\lambda}^*, \quad f_J^\#(h^*, h_\perp^*) = -2\gamma a_{-\lambda}^*.\end{aligned}$$

Заметим, что $\text{ad}^\#(h^*)$ не “сдвигает” элемент $h_\perp^*$, если h пропорционален h_λ . Для $h_\perp$ мы имеем $\delta(h_\perp) = 0$.

Подводя итог, находим, что скручивание задается соотношениями

$$\begin{aligned}f_J^\#(e_\lambda^*, h^*) &= h^*, & f_J^\#(h^*, a_{\lambda+\nu}^*) &= C_{\lambda\nu}^{\lambda+\nu} a_\nu^*, \\ f_J^\#(h^*, h_\perp^*) &= -2\gamma a_{-\lambda}^*, & f_J^\#(e_\lambda^*, a_{-\lambda}^*) &= a_{-\lambda}^*, \\ f_J^\#(e_\lambda^*, a_{\pm\nu}^*) &= \mp\nu(h) a_{\pm\nu}^*.\end{aligned}\tag{6}$$

В этом случае деформирующая функция $f_J^\#$ сама является композицией Ли, она фиксирует алгебру Ли $\mathfrak{g}^\#$, в которой $\mathfrak{g}_{\mathcal{J}_c}^\#$ является подалгеброй, $\mathfrak{g}^\# \supset \mathfrak{g}_{\mathcal{J}_c}^\#$. Ее присоединенное действие на $V_{\mathfrak{g}}^*$ может быть разложено в прямую сумму: $\text{ad}(\mathfrak{g}_{\mathcal{J}_c}^\#)|_{V_{\mathfrak{g}}^*} = \text{ad}(\mathfrak{g}_{\mathcal{J}_c}^\#)|_{V_{\mathfrak{g}_{\mathcal{J}_c}}^*} \oplus d(\mathfrak{g}_{\mathcal{J}_c}^\#)|_{V_{\mathfrak{a}}^*}$ (с представлением $d(\mathfrak{g}_{\mathcal{J}_c}^\#)$, описывающим действие на $V_{\mathfrak{a}}^*$).

БТФ расширения. Рассмотрим элемент $r_E = e_\mu \wedge e_\nu$, $\nu \neq -\mu$. Напомним, что сам элемент r_E не обязан удовлетворять классическому уравнению Янга–Бакстера, его решением должна быть только полная r -матрица. Построим коскобки

$$\begin{aligned}\delta(h) &= [e_\mu \otimes e_\nu - e_\nu \otimes e_\mu, h \otimes 1 + 1 \otimes h] = -(\mu + \nu)(h) e_\mu \wedge e_\nu, \\ \delta(e_\xi) &= [e_\mu \otimes e_\nu - e_\nu \otimes e_\mu, e_\xi \otimes 1 + 1 \otimes e_\xi] = C_{\mu\xi}^{\mu+\xi} e_{\mu+\xi} \wedge e_\nu + C_{\nu\xi}^{\nu+\xi} e_\mu \wedge e_{\nu+\xi}, \\ \delta(e_{-\mu}) &= [e_\mu \otimes e_\nu - e_\nu \otimes e_\mu, e_{-\mu} \otimes 1 + 1 \otimes e_{-\mu}] = 2h_\mu \wedge e_\nu + C_{\nu,-\mu}^{\nu-\mu} e_\mu \wedge e_{\nu-\mu}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Если мы припишем базисному элементу e_τ^* вектор τ , то $\text{ad}(e_\mu^*)$ и $\text{ad}(e_\nu^*)$ будут действовать на e_τ^* как операторы, градуированные векторами $-\nu$ и $-\mu$, соответственно. Когда h пропорционален h_μ (или h_ν), оператор $\text{ad}(e_\nu^*)$ (или, соответственно, $\text{ad}(e_\lambda^*)$) не может сдвинуть $h_\perp^*$.

Деформирующие функции $f_E^\#$, соответствующие элементу r_E , подразделяются на два набора. Первый набор описывает структуру дуального закона композиции на подпространстве $\mathfrak{g}_c^\#$ и свойства $\mathfrak{g}_a^\#$ как идеала:

$$f_E^\#(e_{\mu+\xi}^*, e_\nu^*) = C_{\mu,\xi}^{\mu+\xi} e_\xi^*, \quad f_E^\#(e_\mu^*, e_{\nu+\xi}^*) = C_{\nu,\xi}^{\nu+\xi} e_\xi^*, \quad \xi \neq \pm(\mu + \nu), \mu, \nu; \tag{7}$$

$$f_E^\#(e_\mu^*, e_{\nu-\mu}^*) = C_{\nu,-\mu}^{\nu-\mu} e_{-\mu}^*, \quad f_E^\#(e_{\mu-\nu}^*, e_\nu^*) = C_{\mu,-\nu}^{\mu-\nu} e_{-\nu}^*; \tag{8}$$

$$f_E^\#(e_\mu^*, h_\nu^*) = 2e_{-\nu}^*, \quad f_E^\#(h_\mu^*, e_\nu^*) = 2e_{-\mu}^*. \tag{9}$$

Второй набор,

$$f_E^\#(e_\mu^*, e_\nu^*) = -(\mu + \nu)(h) h^*, \tag{10}$$

$$f_E^\#(e_\mu^*, e_{\nu+\mu}^*) = C_{\nu,\mu}^{\nu+\mu} e_\mu^*, \quad f_E^\#(e_{\nu+\mu}^*, e_\nu^*) = C_{\mu,\nu}^{\mu+\nu} e_\nu^*, \tag{11}$$

демонстрирует нарушения замкнутости композиции на пространстве $\mathfrak{g}_c^\#$. Указанные особенности характерны для элементов r_E , которые не являются r -матрицей, т.е. соответствующие деформирующие функции сами по себе не задают закон композиции Ли.

Допустим, что сумма элементов r_J и r_E является r -матрицей (и λ – длинный корень в Λ). Это, в частности, означает, что $[e_\mu, e_\nu] = e_\lambda$. Поскольку нас интересуют скручивания посредством цепей $\mathcal{F}$ вида (4), то λ – длинный корень и справедливо разложение (3). Соотношения (10), (11) становятся внутренними для $\mathfrak{g}^\#$. Деформирующие функции (9) должны быть объединены с (6). Элементы Картана в соответствующих коскобках становятся равными $(2h_\mu - h)$ и $(2h_\nu - h)$. В простой алгебре $\mathfrak{g}$ обе эти комбинации принадлежат пространству $h_{\{\lambda_0\}}^\perp$ (это свойство является прямым следствием возможности разложить систему положительных корней на старший корень, его “составляющие” и подсистему, ортогональную к старшему корню, подробности см. в [12]). В суммарной композиции $[\cdot, \cdot]^\#$ присоединенные операторы $\text{ad}(e_\mu^\#)$ и $\text{ad}(e_\nu^\#)$ описывают действие подалгебры $\mathfrak{g}_c^\#$ на идеале $\mathfrak{g}_a^\#$.

Подведем итог. *Объединяя свойства деформирующих функций для различных скручивающих факторов в $\mathcal{F}$, можно убедиться, что в целом для цепи расширенных твистов дуальный носитель $\mathfrak{g}_c^\#$ с лиевым умножением $f^\# = \sum f_q^\#$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}^\#$, пространство дуальной алгебры эквивалентно прямой сумме $V_g^* = V_{gc}^* \oplus V_a^*$, в то время как сама $\mathfrak{g}^\#$ является полупрямой суммой, $\mathfrak{g}^\# \approx \mathfrak{g}_c^\# \vdash \mathfrak{g}_a^\#$, с абелевым идеалом $\mathfrak{g}_a^\#$.*

3. ВТОРОЙ КЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ СКРУЧЕННЫХ АЛГЕБР

В скрученной универсальной обертывающей алгебре, рассматриваемой как деформированная алгебра функций $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g}) = \text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#)$, группа $\mathfrak{G}^\#$ является универсальной накрывающей группой с алгеброй Ли $\mathfrak{g}^\#$ и может быть реализована в терминах формальных степенных рядов.

В предыдущем разделе было показано, как соотношения дуальной алгебры $\mathfrak{g}^\#$ описываются векторной диаграммой $\Gamma^\#$. Это описание относится к базису функционалов e_i^* , канонически дуальных к генераторам $\{e_i\}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Таким образом, мы можем сконструировать групповое умножение для $\mathfrak{G}^\#$ в виде копроизведения в алгебре Хопфа $\text{Fun}(\mathfrak{G}^\#)$ для элементов e_i , рассматриваемых как экспоненциальные координаты этой группы. Лишь в немногих тривиальных случаях преобразование к дуальным (некоммутативным) координатам может быть определено прямым сравнением $\text{Fun}(\mathfrak{G}^\#)$ с $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#) = U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$.

В алгебре Хопфа $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#)$ закон композиции группы $\mathfrak{G}^\#$ нарушен из-за некоммутативности координат. Обычно структурные константы квантовых деформаций строятся в терминах недеформированных координат. Другими словами, соответствующие координаты недеформированной группы $\text{Fun}(\mathfrak{G}^\#)$ должны быть достаточны для описания умножения деформированной группы $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#)$. Следовательно, для построения координат в интересующей нас алгебре Хопфа мы должны найти вспомогательную алгебру функций $\text{Fun}(\mathfrak{G}^\#)$ с коммутативным умножением.

Переход $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#) \longrightarrow \text{Fun}(\mathfrak{G}^\#)$ называется вторым классическим пределом [2]. Было доказано [14], что для стандартного квантования (с параметром $q = e^h$) второй классический предел может быть получен с помощью тривиального скейлинга генераторов алгебры Ли. При этом вводится параметр скейлинга ε , и оба параметра ε и h устремляются к пределу $\varepsilon, h \longrightarrow 0$ при условии $h/\varepsilon = \text{const}$. Принимая во внимание, что переход ко второму классическому пределу является общей процедурой, не зависящей от особенностей квантования, приходим к заключению, что это же свойство может быть использовано в скрученных универсальных обертывающих алгебрах $U_{\mathcal{F}}$.

Рассмотрим факторизованные твисты $\mathcal{F} = \mathcal{F}_p \mathcal{F}_{p-1} \dots \mathcal{F}_1$ с жордановыми и расширяющими факторами $\mathcal{F}_j$. Последовательности $\mathcal{F}$ можно приписать набор параметров деформации $\{\xi_{s=1, \dots, l} \mid l \leq p\}$, где p равно числу независимых жордановых факторов $\mathcal{F}_{\mathcal{J}_s}$. Следовательно, существуют параметризованное решение $r(\{\xi_s\})$ классического уравнения Янга–Бакстера и параметризованные семейства алгебр $\mathfrak{g}^\#(\{\xi_s\})$ и групп $\mathfrak{G}^\#(\{\xi_s\})$.

Автоморфизм, который вводит параметры деформации вместе с указанным выше скейлингом, соответствует замене

$$e_j \longrightarrow \frac{\xi_s^{\vartheta_{(s)}j}}{\varepsilon} \hat{e}_j \quad (12)$$

(здесь степень $\vartheta_{(s)}$ является естественной градуировкой, соответствующей s -му звену цепи $\mathcal{F}$). Алгоритм классического предела состоит в том, что параметры ε и ξ_s должны стремиться к нулю, в то время как их отношения фиксируются:

$$\varepsilon, \xi_s \longrightarrow 0, \quad \frac{\xi_s}{\varepsilon} = \zeta_s. \quad (13)$$

В пределе имеем алгебру функций на недеформированной группе $\mathfrak{G}^\#(\{\zeta_s\})$:

$$\lim_{\substack{\varepsilon, \xi_s \longrightarrow 0; \\ \xi_s/\varepsilon = \zeta_s}} U_{\mathcal{F}(\{\xi_s\})}(\mathfrak{g}(\varepsilon)) = \text{Fun}(\mathfrak{G}^\#(\{\zeta_s\})). \quad (14)$$

Нетрудно убедиться, что для канонически параметризованной цепи расширенных твистов $\mathcal{F}$ в пределе (14) конструкторные константы $U_{\mathcal{F}(\{\xi_s\})}(\mathfrak{g}(\varepsilon))$ остаются конечными, закон умножения становится абелевым, и алгебра Ли полученной группы совпадает с $\mathfrak{g}^\#(\{\zeta_s\})$.

4. ГРУППА $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#)$ В КООРДИНАТАХ ДУАЛЬНОЙ АЛГЕБРЫ

В случае цепи $\mathcal{F} = \mathcal{F}_p \mathcal{F}_{p-1} \dots \mathcal{F}_1$ дуальная группа $\mathfrak{G}^\#$ является разрешимой. Следовательно, экспоненциальные координаты могут рассматриваться как наиболее подходящие для описания $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#) = U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$. В этих координатах алгебра Хопфа $(\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#))^*$, дуальная к $\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#)$ и являющаяся универсальной обертывающей алгеброй $U_{\text{def}}(\mathfrak{g}^\#) = (\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#))^*$, задана в базисе генераторов алгебры $\mathfrak{g}^\#$.

Алгебра $\mathfrak{g}^\#$ известна. Построив универсальную обертывающую алгебру $U(\mathfrak{g}^\#)$ в стандартном $\mathfrak{g}$ -базисе, получим базис, дуальный к экспоненциальному координатному базису группы $\mathfrak{G}^\#$. Чтобы произвести преобразование координат, необходимо

отождествить элементы алгебры Хопфа $U(\mathfrak{g}^\#)$ с элементами алгебры $(\text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#))^*$. Последняя задана в терминах функционалов, канонически дуальных к элементам $\mathfrak{g}$ -базиса в $U(\mathfrak{g})$. Иными словами, необходимо сравнить идеалы $I(\mathfrak{g}^\#)$ и $I(\mathfrak{g}_{(\mathfrak{g})}^\#)$, описывающие соотношения эквивалентности в соответствующих тензорных алгебрах. Это сопоставление приведет к набору равенств вида

$$e_i^{\#*} = \phi_i^*(\{e_j^*\}), \quad (15)$$

описывающих элементы $\mathfrak{g}^\#$ -базиса в терминах $\mathfrak{g}$ -базиса, и таким образом определяющих $\mathfrak{g}^\#$ -координаты базиса Пуанкаре–Биркхофа–Витта в $(\text{Fun}(\mathfrak{G}^\#))^*$. Переходя к соотношениям, дуальным к (15), мы возвращаемся к $\text{Fun}(\mathfrak{G}^\#)$ и находим искомое преобразование

$$e_i^\# = \phi_i(\{e_j\}).$$

Применив преобразование ϕ к деформированной алгебре $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g}) = \text{Fun}_{\text{def}}(\mathfrak{G}^\#)$, получим умножение деформированной группы $\mathfrak{G}^\#$ в ее экспоненциальных координатах.

5. ПРИМЕР. АЛГЕБРА $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{sl}(3))$ В КООРДИНАТАХ ДУАЛЬНОЙ ГРУППЫ $\mathcal{SL}(3)^\#$

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3)$. Рассмотрим компоненты r -матрицы $r_J(\gamma) = h(\gamma) \wedge e_{13}$ и $r_E = e_{12} \wedge e_{23}$, где $h(\gamma) = h_{13} + \gamma h_\perp$. Сумма $r_{EJ}(\gamma) = r_J(\gamma) + r_E$ является решением классического уравнения Янга–Бакстера. Последнее эквивалентно утверждению, что сумма деформирующих функций $f_J^\#(\gamma) + f_E^\#$ определяет умножение Ли $[\cdot, \cdot]^\# := (f_J^\#(\gamma) + f_E^\#)(\cdot, \cdot)$. На пространстве $V_{\mathfrak{g}}^*$ этот закон умножения определяет дуальную алгебру $\mathfrak{sl}(3)^\#$ с соотношениями, легко вычисляемыми с помощью коскобки (5):

$$\begin{aligned} [e_{13}^*, h^*(\gamma)]^\# &= h^*(\gamma), & [h^*(\gamma), e_{12}^*]^\# &= [h^*(\gamma), e_{23}^*]^\# = 0, \\ [e_{13}^*, e_{21}^*]^\# &= +\frac{1}{2}(3\gamma + 1)e_{21}^*, & [h^*(\gamma), h_\perp^*]^\# &= -2\gamma e_{31}^*, \\ [e_{13}^*, e_{12}^*]^\# &= -\frac{1}{2}(3\gamma - 1)e_{12}^*, & [e_{13}^*, e_{32}^*]^\# &= -\frac{1}{2}(3\gamma - 1)e_{32}^*, \\ [e_{13}^*, e_{31}^*]^\# &= [e_{23}^*, e_{32}^*]^\# = [e_{12}^*, e_{21}^*]^\# = e_{31}^*, \\ [h_\perp^*, e_{23}^*]^\# &= (1 - \gamma)e_{21}^*, & [h_\perp^*, e_{12}^*]^\# &= (1 + \gamma)e_{32}^*, \\ [e_{13}^*, e_{23}^*]^\# &= +\frac{1}{2}(3\gamma + 1)e_{23}^*, & [e_{12}^*, e_{23}^*]^\# &= -h^*(\gamma). \end{aligned} \quad (16)$$

Эта алгебра имеет четырехмерную подалгебру (эквивалентную подалгебре $\mathfrak{g}_c$ – носителю r -матрицы $r_{EJ}(\gamma)$) с векторной диаграммой $\Gamma_c^\# = \{0, \varphi_{31}, \varphi_{32}, \varphi_{21}\}$ и четырехмерный абелев идеал, генерированный набором $\{h_\perp^*, e_{31}^*, e_{32}^*, e_{21}^*\}$ с диаграммой $\Gamma_a^\# = \{0, \rho_{31}, \rho_{32}, \rho_{21}\}$. Здесь $\{\varphi_{ab}\}$ и $\{\rho_{ab}\}$ – копии тех векторов из $\Lambda(\mathfrak{sl}(3))$, которые соответствуют генераторам e_{ab} . В рассматриваемом случае обе подсистемы содержат одни и те же наборы векторов. Действие $\text{ad}(\mathfrak{g}_c^\#)$ на $h_\perp^*$ показывает, что функционал $h_\perp^*$ ведет себя как “ортогональный” к h^* .

Как продемонстрировано в [10], выражение

$$\mathcal{F}(\gamma) = \mathcal{F}_E(\gamma)\mathcal{F}_J(\gamma) = \exp(\xi e_{12} \otimes e_{23} e^{(3\gamma-1)\sigma(\xi)/2}) \exp(h \otimes \sigma(\xi)) \quad (17)$$

является решением уравнений скручивания, соответствующим r -матрице $r_{EJ}(\gamma)$. Здесь

$$\sigma(\xi) = \ln(1 + \xi e_{13}), \quad h = h_{13} + \gamma h_{\perp}, \quad h_{\perp} = \frac{1}{2}e_{11} - e_{22} + \frac{1}{2}e_{33}.$$

Параметр γ относится к скручиванию Решетихина [11], которое в данном случае объединено с жордановым фактором, ξ является параметром деформации, соответствующим автоморфизму $e_{\tau} \longrightarrow \xi^{\tau(h_{13})} \tilde{e}_{\tau}$. Введя скейлинг, получим параметризацию, достаточную для установления второго классического предела

$$e_{\tau} \longrightarrow \frac{\xi^{\tau(h_{13})}}{\varepsilon} \hat{e}_{\tau}, \quad \frac{\xi}{\varepsilon} = \zeta. \quad (18)$$

Произведем скручивание посредством $\mathcal{F}(\xi, \varepsilon, \zeta)$, совершим предельный переход (13) и получим умножение в дуальной группе $\mathfrak{G}^{\#} = (\mathfrak{SL}(3))^{\#}$ в $\mathfrak{sl}(3)$ -координатах $\{\hat{e}_j, \hat{\sigma}, \hat{h}, \hat{h}_{\perp}\}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{F}}^{\lim}(\hat{h}(\gamma)) &= \hat{h}(\gamma) \otimes e^{-\hat{\sigma}(\zeta)} + 1 \otimes \hat{h}(\gamma) - \xi \hat{e}_{12} \otimes \hat{e}_{23} e^{(\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}^{\lim}(\hat{h}_{\perp}) &= \hat{h}_{\perp} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{h}_{\perp}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}^{\lim}(\hat{e}_{12}) &= \hat{e}_{12} \otimes e^{(3\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} + 1 \otimes \hat{e}_{12}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}^{\lim}(\hat{e}_{23}) &= \hat{e}_{23} \otimes e^{-(3\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} + e^{\hat{\sigma}(\zeta)} \otimes \hat{e}_{23}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}^{\lim}(\hat{\sigma}(\zeta)) &= \hat{\sigma}(\zeta) \otimes 1 + 1 \otimes \hat{\sigma}(\zeta); \\ \Delta_{\mathcal{F}}^{\lim}(\hat{e}_{21}) &= \hat{e}_{21} \otimes e^{-(3\gamma+1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} + 1 \otimes \hat{e}_{21} + \zeta(1 - \gamma)\hat{h}_{\perp} \otimes \hat{e}_{23} e^{-\hat{\sigma}(\zeta)}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}^{\lim}(\hat{e}_{32}) &= \hat{e}_{32} \otimes e^{(3\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} + 1 \otimes \hat{e}_{32} + \zeta\hat{h}(\gamma) \otimes \hat{e}_{12} e^{-\hat{\sigma}(\zeta)} + \\ &\quad + \zeta\hat{e}_{12} \otimes (\hat{h}(\gamma) - (\gamma+1)\hat{h}_{\perp}) e^{(3\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} - \\ &\quad - \zeta\hat{h}(\gamma)\hat{e}_{12} \otimes (e^{(3\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} - e^{3(\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2}) - \\ &\quad - \zeta^2\hat{e}_{12} \otimes \hat{e}_{23}\hat{e}_{12} e^{3(\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} - \zeta^2\hat{e}_{12}^2 \otimes \hat{e}_{23} e^{(3\gamma-2)\hat{\sigma}(\zeta)}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}^{\lim}(\hat{e}_{31}) &= \hat{e}_{31} \otimes e^{-\hat{\sigma}(\zeta)} + 1 \otimes \hat{e}_{31} + \\ &\quad + 2\zeta\hat{h}(\gamma) \otimes (\hat{h}(\gamma) - \gamma\hat{h}_{\perp}) e^{-\hat{\sigma}(\zeta)} - \\ &\quad - \zeta\hat{h}(\gamma)(\hat{h}(\gamma) - 2\gamma\hat{h}_{\perp}) \otimes (e^{-\hat{\sigma}(\zeta)} - e^{-2\hat{\sigma}(\zeta)}) + \\ &\quad + \zeta^2\hat{h}(\gamma)\hat{e}_{12} \otimes \hat{e}_{23}(e^{3(\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} - 2e^{(3\gamma-5)\hat{\sigma}(\zeta)/2}) + \\ &\quad + \zeta\hat{e}_{12} \otimes \hat{e}_{21} e^{(3\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} - \zeta\hat{e}_{32} \otimes \hat{e}_{23} e^{3(\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} - \\ &\quad - 2\zeta^2\hat{e}_{12} \otimes (\hat{h}(\gamma) - \gamma\hat{h}_{\perp})\hat{e}_{23} e^{3(\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)/2} + \\ &\quad + \zeta\hat{e}_{12}^2 \otimes \hat{e}_{23}^2 e^{3(\gamma-1)\hat{\sigma}(\zeta)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Каноническая дуализация переводит эту конструкцию в умножение алгебры Хопфа $(U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{sl}(3)))^* = (\text{Fun}(\mathfrak{SL}(3)^{\#}))^* = U((\mathfrak{sl}(3))_{\mathfrak{g}}^{\#})$. Таким образом, оно оказывается

реализованным в терминах $\mathfrak{g}$ -координат $\{\hat{e}_\tau^*\}$. Та же алгебра Хопфа в терминах $\mathfrak{g}^\#$ -координат $\{e_\tau^{\#*}\}$ определяется соотношениями (16), которые генерируют необходимый идеал в тензорной алгебре над $V_{\mathfrak{g}^\#}$. Деформационный параметр ζ определяется скейлингом в (18). Сравнивая ассоциативные умножения в $U((\mathfrak{sl}(3))^\#)$ и $U((\mathfrak{sl}(3))_{\mathfrak{g}}^\#)$, находим два типа соотношений. Соотношениями первого типа являются

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma(\zeta)}^* \cdot \widehat{h(\gamma)}^* &= \widehat{h(\gamma)}^*, \dots; & e_{13}^{\#*}(\zeta) \cdot h(\gamma)^{\#*} &= h(\gamma)^{\#*}, \dots; \\ \widehat{\sigma(\zeta)}^* \cdot (\hat{e}_{23} e^{-\sigma(\zeta)})^* &= \frac{1}{2} (\hat{e}_{23} e^{-\sigma(\zeta)})^*; & e_{13}^{\#*}(\zeta) \cdot e_{23}^{\#*} &= \frac{1}{2} e_{23}^{\#*}. \end{aligned}$$

Они означают, что переход к $\mathfrak{g}^\#$ -генераторам должен включать замены

$$e_{13}^{\#}(\zeta) = \ln(1 + \zeta \widehat{e_{13}}), \quad e_{23}^{\#} = \hat{e}_{23} e^{-\sigma(\zeta)}.$$

Эти преобразования осуществляются в пространстве $U(\mathfrak{g}_c^\#)$ подалгебры носителя. Они совпадают с морфизмами, заданными твистом $\mathcal{F}: \mathfrak{g}_c \longrightarrow \mathfrak{g}_c^\#$.

Более важными являются соотношения другого типа на пространстве $V_{\mathfrak{g}^\#}$, дополнительном к $V_{\mathfrak{g}_c^\#}$. Они не могут быть непосредственно генерированы скручивающим элементом и зависят от подпредставления $\text{ad } \mathfrak{g}_c^\#|_{V_{\mathfrak{g}^\#}}$. В нашем случае существуют только по два соотношения этого типа, полученные из (19) и (16):

$$\widehat{h(\gamma)}^* \cdot \hat{e}_{12}^* = (\widehat{h(\gamma)} \cdot \hat{e}_{12})^* + \zeta \hat{e}_{12}^*, \quad \widehat{h(\gamma)}^* \cdot \widehat{h(\gamma)}^* = 2((\widehat{h(\gamma)})^2)^* + 2\zeta \hat{e}_{31}^*$$

и

$$h(\gamma)^{\#*} \cdot e_{12}^{\#*} = (h(\gamma)^\# \cdot e_{12}^\#)^*, \quad h(\gamma)^{\#*} \cdot h(\gamma)^{\#*} = 2((h(\gamma)^\#)^2)^*,$$

соответственно. Они приводят к двум нетривиальным соотношениям между $(\mathfrak{g})^*$ - и $(\mathfrak{g}^\#)^*$ -генераторами:

$$\begin{aligned} (\widehat{h(\gamma)} \cdot \hat{e}_{12})^*(\zeta) &= (h(\gamma)^\# \cdot e_{12}^\#)^* - \zeta e_{32}^{\#*}, \\ ((\widehat{h(\gamma)})^2)^*(\zeta) &= \frac{1}{2} ((h(\gamma)^\#)^2)^* - \zeta e_{31}^{\#*} \end{aligned}$$

и к соответствующим соотношениям между $\mathfrak{g}$ - и $\mathfrak{g}^\#$ -генераторами:

$$\begin{aligned} e_{32}^{\#}(\zeta) &= \hat{e}_{32} - \zeta \widehat{h(\gamma)} \hat{e}_{12}, \\ e_{31}^{\#}(\zeta) &= \hat{e}_{31} - \zeta (\widehat{h(\gamma)})^2. \end{aligned}$$

Как уже упоминалось выше, элементы $\{e_\tau^{\#*}\}$, построенные в терминах координат $\hat{e}_\tau$ недеформированной группы, подходят также для описания скрученной алгебры Хопфа. В итоге мы имеем следующее преобразование:

$$\begin{aligned} e_{13}^{\#}(\zeta) &= \sigma(\zeta), & e_{23}^{\#}(\zeta) &= e_{23} e^{-\sigma(\zeta)}, \\ e_{32}^{\#}(\zeta) &= e_{32} - \zeta h(\gamma) e_{12}, & e_{31}^{\#}(\zeta) &= e_{31} - \zeta h(\gamma)^2. \end{aligned} \tag{20}$$

В терминах $\mathfrak{g}$ -координат (и функции $\sigma(\xi) = \ln(1 + \xi e_{13})$) коструктура скрученной алгебры $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{sl}(3))$ на подпространстве $V_a^{\#}$ определяется соотношениями [10], [15]:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{F}}(h_{\perp}) &= h_{\perp} \otimes 1 + 1 \otimes h_{\perp}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}(e_{21}) &= e_{21} \otimes e^{-(3\gamma+1)\sigma(\xi)/2} + 1 \otimes e_{21} + \xi(1-\gamma)h_{\perp} \otimes e_{23}e^{-\sigma(\xi)}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}(e_{32}) &= e_{32} \otimes e^{(3\gamma-1)\sigma(\xi)/2} + 1 \otimes e_{32} + \xi h(\gamma) \otimes e_{12}e^{-\sigma(\xi)} + \\ &\quad + \xi e_{12} \otimes (h(\gamma) - (\gamma+1)h_{\perp})e^{(3\gamma-1)\sigma(\xi)/2} - \\ &\quad - \xi h(\gamma)e_{12} \otimes (e^{(3\gamma-1)\sigma(\xi)/2} - e^{(\gamma-1)\sigma(\xi)/2}) - \\ &\quad - \xi^2 e_{12} \otimes e_{23}e_{12}e^{3(\gamma-1)\sigma(\xi)/2} - \xi^2 e_{12}^2 \otimes e_{23}e^{(3\gamma-2)\sigma(\xi)}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}(e_{31}) &= e_{31} \otimes e^{-\sigma(\xi)} + 1 \otimes e_{31} +\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}&+ 2\xi h(\gamma) \otimes (h(\gamma) - \gamma h_{\perp})e^{-\sigma(\xi)} + \\ &+ \xi(h(\gamma) - h(\gamma)^2) \otimes (e^{-\sigma(\xi)} - e^{-2\sigma(\xi)}) + \\ &+ \xi e_{12} \otimes e_{21}e^{(3\gamma-1)\sigma(\xi)/2} - \\ &- \xi e_{32} \otimes e_{23}e^{3(\gamma-1)\sigma(\xi)/2} + \xi^2 h(\gamma)e_{12} \otimes e_{23}e^{3(\gamma-1)\sigma(\xi)/2} + \\ &+ 2\xi^2 e_{12} \otimes e_{23}e^{(3\gamma-5)\sigma(\xi)/2} - \xi^2 e_{12} \otimes e_{23}e^{3(\gamma-1)\sigma(\xi)/2} - \\ &- 2\xi^2 e_{12} \otimes (h(\gamma) - \gamma h_{\perp})e_{23}e^{3(\gamma-1)\sigma(\xi)/2} - \\ &- 2\xi^2 h(\gamma)e_{12} \otimes e_{23}e^{(3\gamma-5)\sigma(\xi)/2} + \xi^3 e_{12}^2 \otimes e_{23}^2 e^{3(\gamma-1)\sigma(\xi)}.\end{aligned}\tag{22}$$

Применяя к этим копроизведениям преобразование (20), мы получаем ту же коструктуру в $\mathfrak{g}^{\#}$ -координатах:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{F}}(h_{\perp}^{\#}) &= h_{\perp}^{\#} \otimes 1 + 1 \otimes h_{\perp}^{\#}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}(e_{21}^{\#}) &= e_{21}^{\#} \otimes e^{-((3\gamma+1)/2)e_{13}^{\#}} + 1 \otimes e_{21}^{\#} + \zeta(1-\gamma)h_{\perp}^{\#} \otimes e_{23}^{\#}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}(e_{32}^{\#}) &= e_{32}^{\#} \otimes e^{((3\gamma-1)/2)e_{13}^{\#}} + 1 \otimes e_{32}^{\#} - \zeta(\gamma+1)e_{12}^{\#} \otimes h_{\perp}^{\#}e^{((3\gamma-1)/2)e_{13}^{\#}}; \\ \Delta_{\mathcal{F}}(e_{31}^{\#}) &= e_{31}^{\#} \otimes e^{-e_{13}^{\#}} + 1 \otimes e_{31}^{\#} + \\ &\quad + \zeta e_{12}^{\#} \otimes e_{21}^{\#}e^{((3\gamma-1)/2)e_{13}^{\#}} - \zeta e_{32}^{\#} \otimes e_{23}^{\#}e^{3((\gamma-1)/2)e_{13}^{\#}} - \\ &\quad - 2\zeta\gamma h^{\#}(\gamma) \otimes h_{\perp}^{\#}e^{-e_{13}^{\#}} + 2\zeta^2\gamma e_{12}^{\#} \otimes h_{\perp}^{\#}e_{23}^{\#}e^{3((\gamma-1)/2)e_{13}^{\#}}.\end{aligned}\tag{23}$$

Эта реализация наглядно демонстрирует присоединенное действие группы $\mathfrak{G}_c^{\#}$ на четырехмерном пространстве $V_a^{\#}$. В стандартном ортогональном базисе $\{e_i\}$ векторы диаграммы

$$\Gamma_{\mathcal{F}}^{\#} = \Gamma_c^{\#} \cup \Gamma_a^{\#} = \{0, \varphi_{31}, \varphi_{32}, \varphi_{21}\} \cup \{0, \rho_{31}, \rho_{32}, \rho_{21}\}$$

имеют вид

$$\varphi_{ab} = \rho_{ab} = e_a - e_b.$$

Рассмотрим, например, копроизведение $\Delta_{\mathcal{F}}(e_{31}^{\#})$. Первые два слагаемых появились благодаря тривиальному свойству единицы и коммутатора

$$[e_{13}^{\#*}, e_{31}^{\#*}] = \dots + e_{31}^{\#*} + \dots$$

Остальные четыре члена связаны со сдвигами, порождающими вектор ρ_{31} :

$$\varphi_{32} \circ \rho_{21} = \varphi_{21} \circ \rho_{32} = \varphi_{31} \circ \rho(h_{\perp}^{\#}) = \varphi_{32} \circ \varphi_{21} \circ \rho(h_{\perp}^{\#}) = \rho_{31}.$$

Преобразованная конструкция (23) позволяет сформулировать в явном виде свойства, необходимые для построения новых скручивающих коциклов. Прежде всего, становится очевидным, что параметризованный набор дуальных групп $\mathfrak{G}^{\#}(\gamma)$ имеет три особые точки: $\gamma = 0, \pm 1$. В точке $\gamma = 0$ копроизведения для $e_{31}^{\#}$ не имеют членов, содержащих $h_{\perp}^{\#}$. Результаты сдвигов $\varphi_{31} \circ \rho(h_{\perp}^{\#})$ и $\varphi_{32} \circ \varphi_{21} \circ \rho(h_{\perp}^{\#})$ равны нулю, так как в этом случае $h^{\#}$ ортогонален весу $h_{\perp}^{\#}$. Точки $\gamma = +1$ ($\gamma = -1$) особенно интересны. В них копроизведение $\Delta_{\mathcal{F}}(e_{32}^{\#})$ (соответственно $\Delta_{\mathcal{F}}(e_{21}^{\#})$) становится квазипрimitивным. Вместе с primitивностью $\Delta_{\mathcal{F}}(h_{\perp}^{\#})$ это означает, что в этих точках уравнения скручивания для алгебры $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{sl}(3))$ имеют дополнительные решения

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{J}_{P+}} &= \exp\left(-\frac{2}{3}h_{\perp} \otimes \ln((1 + e_{21})e^{2\sigma_{13}})\right), & \gamma &= +1; \\ \mathcal{F}_{\mathcal{J}_{P-}} &= \exp\left(+\frac{2}{3}h_{\perp}^{\#} \otimes \ln((1 + e_{32}^{\#})e^{2e_{13}^{\#}})\right) = \\ &= \exp\left(+\frac{2}{3}h_{\perp} \otimes \ln((1 + e_{32} - \zeta h e_{12})e^{2\sigma_{13}(\zeta)})\right), & \gamma &= -1. \end{aligned}$$

Соответственно для $U(\mathfrak{sl}(3))$ мы имеем два параболических твиста

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathfrak{P}+} &= \mathcal{F}_{\mathcal{J}_{P+}} \mathcal{F}_{\mathcal{E}} \mathcal{F}_{\mathcal{J}}, & \gamma &= +1; \\ \mathcal{F}_{\mathfrak{P}-} &= \mathcal{F}_{\mathcal{J}_{P-}} \mathcal{F}_{\mathcal{E}} \mathcal{F}_{\mathcal{J}}, & \gamma &= -1. \end{aligned}$$

Эта конструкция индуцирует параболические скручивания, первое из которых было впервые получено в [16]. Использование координат дуальной группы позволяет установить, что для алгебры $U(\mathfrak{sl}(3))$ имеется два неэквивалентных параболических скручивания. Они реализуют квантования параболических r -матриц:

$$\begin{aligned} r_{\mathfrak{P}+} &= \xi(e_{12} \wedge e_{23} + (h_{13} + h_{\perp}) \wedge e_{13}) - \frac{2}{3}h_{\perp} \wedge e_{21}, \\ r_{\mathfrak{P}-} &= \xi(e_{12} \wedge e_{23} + (h_{13} + h_{\perp}) \wedge e_{13}) + \frac{2}{3}h_{\perp} \wedge e_{32}. \end{aligned}$$

Твисты $\mathcal{F}_{\mathcal{J}_{P+}}$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{J}_{P-}}$ являются деформированными жордановыми факторами.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы продемонстрировали, что координаты дуальной группы обеспечивают естественный базис для конструкции скрученных универсальных обертывающих алгебр. В случае разрешимой группы $\mathfrak{G}^{\#}$ ее копроизведение приобретает в $\mathfrak{g}^{\#}$ -координатах особенно простой вид, соответствующий экспоненциальному отображению присоединенного действия алгебры $\mathfrak{g}^{\#}$. В скрученной алгебре $U_{\mathcal{F}}(\mathfrak{g})$ переход к координатам дуальной группы упрощает задачу построения новых твистов.

Подход, основанный на квантовом принципе дуальности, позволяет по-новому интерпретировать построение пространств деформированных носителей [7], [12]. В диаграмме $\Gamma_{\mathcal{F}}^{\#}$ векторы $\lambda_{\perp}$, ортогональные начальному корню λ полного расширенного твиста $\mathcal{F}$, не могут быть достигнуты из точек $\Gamma_a^{\#}$ с помощью сдвигов, соответствующих векторам в $\Gamma_c^{\#}$. Причина заключается в том, что диаграмма $\Gamma_c^{\#}$ находится в отрицательном секторе, в то время как Γ_{λ_0} лежит в нулевой плоскости, $\lambda_{\perp}(h_{\lambda_0}) = 0$. Для канонических расширенных твистов (без “вращений”) это означает, что копроизведения $\Delta_{\mathcal{F}}(e_{\lambda_{\perp}})$ примитивны. Это свойство реализуется только в $\mathfrak{g}^{\#}$ -координатах. Таким образом, деформация пространства $V_{\perp}$ как пространства-носителя дополнительного скручивания означает переход к $\mathfrak{g}^{\#}$ -базису.

Необходимо указать, что экспоненциальный базис, использованный в этой работе, не может рассматриваться как универсальный. Когда дуальная группа не является разрешимой, должны использоваться другие базисы дуальной группы (например, для максимальной параболической дуальной группы $\mathfrak{G}_{\mathcal{P}}^{\#}$ в линейной группе Ли, содержащей простую подгруппу $\mathfrak{SL}(m)$, естественной является алгебра матричных координат).

Благодарности. Автор благодарит П. П. Кулиша за ценные и стимулирующие обсуждения. Работа поддержана РФФИ (грант № 03-01-00593).

Список литературы

- [1] P. Bonneau, M. Gerstenhaber, A. Giaquinto, D. Sternheimer, *J. Math. Phys.*, **45**:10 (2004), 3703.
- [2] В. Г. Дринфельд, *Алгебра и анализ*, **1**:2 (1989), 30.
- [3] М. А. Семенов-Тян-Шанский, *ТМФ*, **93**:2 (1992), 302.
- [4] В. Г. Дринфельд, *ДАН СССР*, **273**:3 (1983), 531.
- [5] A. I. Ooms, *Commun. Alg.*, **8**:1 (1980), 13.
- [6] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, M. A. del Olmo, *J. Phys. A*, **32** (1999), 8671.
- [7] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, *J. Phys. A*, **33** (2000), L279.
- [8] V. D. Lyakhovsky, “Basic twisting factors and the factorization properties of twists”, *Supersymmetries and Quantum symmetries*, Proc. XVII Max Born Symp. (Karpacz, Poland, 21–25 September, 2001), eds. E. Ivanov, S. Krivonos, J. Lukiersky, J. Popovich, World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 2002, 120.
- [9] O. V. Ogievetsky, “Hopf structures on the Borel subalgebra of $sl(2)$ ”, *Proc. Winter School of Geometry and Physics (Zdankov, Czech Republic, January, 1993), Ser. II*, **37**, eds. J. Bures, V. Soucek, Suppl. Rend. Circ. Mat., Circolo Matematico di Palermo, Palermo, 1994, 185.
- [10] P. P. Kulish, V. D. Lyakhovsky, A. I. Mudrov, *J. Math. Phys.*, **40** (1999), 4569.
- [11] N. Yu. Reshetikhin, *Lett. Math. Phys.*, **20**:4 (1990), 331.
- [12] Д. Н. Ананикян, П. П. Кулиш, В. Д. Ляховский, *Алгебра и анализ*, **14**:3 (2002), 27.
- [13] A. Nijenhuis, R. W. Richardson, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**:3 (1964), 406; **72**:1 (1966), 1.
- [14] V. D. Lyakhovsky, *Czech. J. Phys.*, **46** (1996), 227.
- [15] V. D. Lyakhovsky, M. A. del Olmo, *J. Phys. A*, **32** (1999), 5343.
- [16] V. D. Lyakhovsky, M. E. Samsonov, *Journ. Alg. Appl.*, **1**:4 (2002), 413.

Поступила в редакцию 30.10.2005,
после доработки 24.11.2005