Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Пронько, $\mathbb{C}^2$ -формулировка эйлеровой жидкости,
ТМФ, 2006, том 148, номер 1, 126–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2063>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 06:39:59

© 2006 г.

Г. П. Пронько*

С²-ФОРМУЛИРОВКА ЭЙЛЕРОВОЙ ЖИДКОСТИ

С использованием представления через переменные Эйлера в фазовом пространстве $\mathbb{C}^2 \times \infty$ построен гамильтонов формализм для непрерывных сред.

Ключевые слова: гидродинамика, канонический формализм.

Посвящается дорогому другу Юрию Викторовичу Новожилову

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории таких непрерывных сред, как жидкость, газ или плазма, существуют два типа описания динамики среды, которые обычно называют лагранжевым и эйлеровым. В лагранжевом описании используются траектории частиц, из которых состоит среда, тогда как в эйлеровом описании роль динамических переменных играют скорость $\vec{v}(x, t)$ и плотность $\rho(x, t)$. Как было отмечено в работе [1], лагранжевый подход, использующий координаты частиц, которые образуют среду, очень удобен для введения взаимодействия между частицами и для построения гамильтонова формализма, выглядящего как обычный теоретико-полевой канонический формализм. Единственной проблемой в этом случае является построение зависящих от x канонических переменных. Эта задача была решена в работе [1], и в результате получилась механическая система, в которой эволюция описывается каноническими уравнениями Гамильтона в $(2d \times \infty)$ -мерном фазовом пространстве (для d -мерной жидкости). Эйлеровы переменные можно выразить через канонические переменные, и алгебра их скобок Пуассона имеет следующий вид для любой размерности пространства:

$$\begin{aligned} \{v_j(x), v_k(y)\} &= -\frac{1}{m\rho(x)} (\nabla_j v_k(x) - \nabla_k v_j(x)) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{v_j(x), \rho(y)\} &= \frac{1}{m} \nabla_j \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{\rho(x), \rho(y)\} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь m – масса частиц, из которых состоит жидкость. Обычно в эйлеровом описании этот параметр не возникает, однако в данном случае он наследуется из лагранжева описания. Мы полагаем его равным единице. Связь между лагранжевым и

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская Область, Россия; Departamento de Física Teórica, Atomica y Óptica, Universidad de Valencia, Valencia, Spain.
E-mail: George.Pronko@ihep.ru

эйлеровым описаниями в динамике жидкости была рассмотрена во многих учебниках и статьях (см. работу [2], где также можно найти многочисленные ссылки на более ранние исследования [3]–[6]), и мы не будем обсуждать ее здесь. Типичный гамильтониан идеальной жидкости можно выразить в терминах эйлеровых переменных:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \rho(x) \vec{v}(x)^2 + V(\rho(x)) \right]. \quad (2)$$

Здесь функция $V(\rho(x_i))$ описывает “потенциальную” энергию жидкости и может быть выбрана феноменологически [7]:

$$V(\rho(x)) = \frac{\kappa}{2\rho_0} (\delta\rho(x))^2 + \lambda(\nabla\rho(x))^2 + \dots, \quad (3)$$

где

$$\delta\rho(x) = \rho(x) - \rho_{as} \quad (4)$$

– отклонение распределения плотности от однородного ρ_{as} на бесконечности. Первый член в уравнении (3) отвечает за звуковую волну в жидкости (κ – скорость звука), второй член описывает дисперсию звуковых волн. Уравнения движения для переменных $\vec{v}(x, t), \rho(x, t)$ можно записать в каноническом виде

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}}(x, t) &= \{H, \vec{v}(x, t)\}, \\ \dot{\rho}(x, t) &= \{H, \rho(x, t)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Скобки Пуассона, использованные в этих уравнениях, заданы в (1). Ситуация, которую мы описали, выглядит вполне стандартной для механической системы, однако важно, что переменные $\vec{v}(x, t), \rho(x, t)$ нельзя рассматривать как координаты в фазовом пространстве, поскольку скобки Пуассона (1) вырождены. Этот тип алгебры Пуассона можно анализировать с помощью подхода Кириллова–Костанта [8]. Центр алгебры (1) зависит от размерности конфигурационного пространства. Например, в двумерном случае центр порожден функциями

$$I_n = \int d^2x \rho(x)^{1-n} (\partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x))^n, \quad (6)$$

см. обсуждение в работах [3], [4]. Трехмерный случай будет более подробно рассмотрен ниже. Здесь одним из функционалов Казимира является функционал “спиральности”

$$Q = \int d^3x \epsilon_{jkl} v_j(x) \nabla_k v_l(x). \quad (7)$$

Другим функционалом Казимира является полное число частиц N (что верно для любой размерности):

$$N = \int d^3x \rho(x), \quad (8)$$

для $d = 2$ имеем $N = I_0$.

2. $\mathbb{C}^2$ -ГИДРОДИНАМИКА

Очень важный для приложений трехмерный случай рассматривался многими авторами. Практически невозможно перечислить все ссылки. Насколько нам известно, первая попытка построения гамильтонова формализма для трехмерного случая была предпринята в работе [7]. Недавно этот вопрос обсуждался в работе [3] (см. также [2] по поводу более ранних ссылок), в которой было предложено построить этот формализм для трехмерной эйлеровой жидкости, используя параметризацию Клебша [9] для скорости:

$$\vec{v}(x, t) = \vec{\partial}\alpha(x, t) + \beta(x, t)\vec{\partial}\gamma(x, t), \quad (9)$$

где новые функции $\alpha(x, t)$, $\beta(x, t)$, $\gamma(x, t)$, а также плотность $\rho(x, t)$ используются для построения координат в фазовом пространстве. Здесь мы собираемся предложить альтернативный подход, обладающий некоторыми преимуществами.

Рассмотрим механическую систему, описываемую комплексными координатами $u_\alpha(x, t)$, $\bar{u}_\alpha(x, t)$, $\alpha = 1, 2$, принадлежащих $\mathbb{C}^2 \times \infty$. Возьмем лагранжиан этой системы в виде

$$L = \int d^3x \left\{ \frac{i}{2}(\bar{u}(x, t)\dot{u}(x, t) - \dot{\bar{u}}(x, t)u(x, t)) + \frac{(\bar{u}(x, t)\vec{\partial}u(x, t) - \vec{\partial}\bar{u}(x, t)u(x, t))^2}{8\bar{u}(x, t)u(x, t)} - V(\bar{u}(x, t)u(x, t)) \right\}, \quad (10)$$

где предполагается суммирование по индексам, которые мы опустили. Канонические импульсы, соответствующие переменным $u_\alpha(x)$, $\bar{u}_\alpha(x)$, задаются равенствами

$$p_\alpha^u(x) = \frac{i}{2}\bar{u}_\alpha(x), \quad p_\alpha^{\bar{u}}(x) = -\frac{i}{2}u_\alpha(x). \quad (11)$$

Как и следовало ожидать, для лагранжиана, являющегося линейной функцией скоростей, уравнения (11) определяют связи для канонических переменных:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha^1(x) &= p_\alpha^u(x) - \frac{i}{2}\bar{u}_\alpha(x) \sim 0, \\ \lambda_\alpha^2(x) &= p_\alpha^{\bar{u}}(x) + \frac{i}{2}u_\alpha(x) \sim 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Скобки Пуассона связей невырождены,

$$\{\lambda_\alpha^1(x), \lambda_\beta^2(y)\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (13)$$

и с помощью этих связей можно исключить канонические импульсы $p_\alpha^u(x)$, $p_\alpha^{\bar{u}}(x)$, используя процедуру Дирака [10]. Получающиеся в результате скобки Пуассона (Дирака) для оставшихся координат в фазовом пространстве $\tilde{\Gamma}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \{u_\alpha(x), \bar{u}_\beta(y)\} &= i\delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{u_\alpha(x), u_\beta(y)\} &= 0, \quad \{\bar{u}_\alpha(x), \bar{u}_\beta(y)\} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Гамильтониан, соответствующий лагранжиану (10), имеет вид

$$H = \int d^3x \left[-\frac{(\bar{u}(x)\vec{\partial}u(x) - \vec{\partial}\bar{u}(x)u(x))^2}{8\bar{u}(x)u(x)} + V(\bar{u}(x)u(x)) \right]. \quad (15)$$

Теперь объясним, почему мы рассматриваем именно эту систему. Образует следующие объекты:

$$\begin{aligned} \vec{v}(x) &= \frac{\bar{u}(x)\vec{\partial}u(x) - \vec{\partial}\bar{u}(x)u(x)}{2i\bar{u}(x)u(x)}, \\ \rho(x) &= \bar{u}(x)u(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначения, которые мы здесь используем, не случайны. Важно, что если мы будем вычислять скобки Пуассона для (16), используя (14), то результат совпадет с выражением (1). Гамильтониан H , определяемый соотношением (15), если его выразить через $\vec{v}(x)$ и $\rho(x)$, будет иметь вид

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\rho(x)\vec{v}(x)^2 + V(\rho(x)) \right], \quad (17)$$

который совпадает с видом гамильтониана, определяемого соотношением (2).

Уравнения движения для переменных $u_\alpha(x)$, $\bar{u}_\alpha(x)$ записываются в обычной форме:

$$\begin{aligned} \dot{u}_\alpha(x) &= \{H, u_\alpha(x)\}, \\ \dot{\bar{u}}_\alpha(x) &= \{H, \bar{u}_\alpha(x)\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Очевидно, корректные уравнения движения, включающие уравнение непрерывности для переменных $\vec{v}(x)$ и $\rho(x)$, следуют из уравнений (18).

Как мы ранее отмечали, описание жидкости в терминах $u_\alpha(x)$, $\bar{u}_\alpha(x)$ схоже с описанием, использующим параметризацию Клебша. Действительно, эти переменные можно представить в виде

$$u_\beta(x) = \sqrt{\rho(x)}e^{i\phi(x)/2} \begin{pmatrix} e^{-i\psi(x)/2} \cos \frac{\alpha(x)}{2} \\ e^{i\psi(x)/2} \sin \frac{\alpha(x)}{2} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

откуда мы получаем представление для скорости через углы $\phi(x)$, $\psi(x)$ и $\alpha(x)$:

$$\vec{v}(x) = \frac{1}{2}(\vec{\partial}\phi(x) - \vec{\partial}\psi(x) \cos \alpha(x)). \quad (20)$$

Это уравнение определяет скорость, если известны параметры Клебша. Также, как хорошо известно (см., например, [3], [6]), любое дифференцируемое векторное поле $\vec{v}(x)$ имеет локальное представление (20). Другими словами, зная $\vec{v}(x)$, можно построить параметры Клебша $\alpha(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ с некоторой неоднозначностью, проявляющейся в наличии набора постоянных интегрирования. В нашем построении

эту неоднозначность можно понять следующим образом. Рассматриваемая функция Лагранжа (10) инвариантна относительно группы преобразований симметрии $U(2)$, действие которой задано как

$$u_\alpha(x) \rightarrow \tilde{u}_\alpha(x) = T_{\alpha\beta} u_\beta(x), \quad T^+ T = 1, \quad (21)$$

и согласно теореме Нетер интегралы движения, являющиеся генераторами этих преобразований, имеют вид

$$t^0 = \int d^3x \frac{1}{2} \bar{u}(x) u(x), \quad t^a = \int d^3x \bar{u}(x) \frac{\sigma^a}{2} u(x). \quad (22)$$

Преобразования, порождаемые (22), изменяют переменные Клебша, но не действуют на эйлеровы переменные. Поэтому, в частности, постоянный сдвиг угла $\phi(x)$ порождается функционалом N , который в редуцированном фазовом пространстве $\tilde{\Gamma}$ уже не является функционалом Казимира, генератор t^3 сдвигает угол $\psi(x)$, два других генератора перемешивают углы $\psi(x)$ и $\alpha(x)$. Таким образом, система, описываемая переменными $u_\alpha(x)$, $\bar{u}_\alpha(x)$, является гамильтоновой системой с симметрией, и можно редуцировать ее фазовое пространство с помощью процедуры, предложенной в работах [11]. Редуцированное фазовое пространство представляет собой пространство, где существуют почти все эйлеровы переменные. Последнее означает, что процедура редукции предлагает, в частности, фиксацию интегралов движения. Таким образом, переменная $t^0 = N/2$, а также и t^a исключаются из числа координат фазового пространства.

Теперь единственную проблему для нас представляет функционал “спиральности”, который все еще является функционалом Казимира и остается после редукции. Для конечномерных систем из существования функционала Казимира следует вырождение скобок Пуассона. Это легко понять из следующих рассуждений. По определению функционал Казимира C должен иметь обращающиеся в нуль скобки со всеми переменными,

$$\{p_k, C\} = 0, \quad \{q_k, C\} = 0, \quad (23)$$

где p_k, q_k – координаты в фазовом пространстве. Если скобки Пуассона невырождены, уравнения (23) означают, что C является константой. Вследствие существования так называемых функционалов с нулевой вариацией ситуация для бесконечномерной системы иная. Рассмотрим, например, бесконечномерную систему, описываемую набором канонических переменных $p(x), q(x)$, где $x \in \mathbb{R}$. Скобки Пуассона невырождены:

$$\{p(x), q(y)\} = \delta(x - y). \quad (24)$$

В этом случае легко построить нетривиальный функционал, который будет иметь обращающиеся в нуль скобки Пуассона со всеми переменными $p(x), q(x)$. Он записывается как

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{p^2(x) + q^2(x)} \quad (25)$$

и имеет смысл числа накрытий для фазы комплексной переменной $a(x) = p(x) + iq(x)$, т.е. C является тем, что физики обычно называют топологическим зарядом. Заметим, что для того чтобы C был функционалом Казимира, не обязательно налагать условие $a(x)|_{x \rightarrow -\infty} = a(x)|_{x \rightarrow +\infty}$ и компактифицировать $\mathbb{R}$. В компактифицированном случае C будет принимать целочисленные значения и действительно будет являться числом накрытий.

Функционал “спиральности” имеет то же происхождение, что и функционал C в данном примере. Чтобы показать это, введем единичный четырехвектор F_k [12] такой, что

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{u}(x)u(x)}} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x) + iF_2(x) \\ F_3(x) + iF_4(x) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Этот четырехвектор осуществляет отображение $S^3 \rightarrow S^3$, если мы наложим на переменные $\bar{u}_\alpha(x)$, $u_\alpha(x)$ асимптотические условия $u_\alpha(x) \rightarrow u_\alpha^0$ при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ и компактифицируем $\mathbb{R}^3$. Функционал спиральности Q , определяемый уравнением (7), можно записать в виде

$$Q = \frac{1}{3} \int d^3x \epsilon_{abcd} \epsilon_{ijk} F_a \partial_i F_b \partial_j F_c \partial_k F_d, \quad (27)$$

являющемся стандартным представлением (с точностью до константы нормировки) для числа накрытий отображения $S^3 \rightarrow S^3$ — так называемого инварианта Хопфа [13]. Здесь мы снова должны заметить, что даже если мы пренебрегаем асимптотическими условиями на $u_\alpha(x)$ и компактификацией $\mathbb{R}^3$, Q по-прежнему будет инвариантным относительно локальных вариаций, и поэтому будет иметь обращающиеся в нуль скобки Пуассона с $\bar{u}_\alpha(x)$, $u_\alpha(x)$. Таким образом, для бесконечномерных механических систем из существования функционалов Казимира не обязательно следует вырождение скобок Пуассона, если эти функционалы Казимира связаны с геометрическими свойствами фазового пространства. Функционал спиральности принадлежит к классу “дружественных” функционалов Казимира.

Предложенное нами описание очень удобно для различных применений и обобщений. Прежде всего, оно хорошо подходит для исследования задачи устойчивости, поскольку вторая вариация гамильтониана (15), выраженная в терминах переменных $\bar{u}_\alpha(x)$, $u_\alpha(x)$, является достаточно компактной и простой. В качестве обобщений можно рассмотреть “релятивизацию” лагранжиана (10) или суперсимметричное расширение переменных $\bar{u}_\alpha(x)$, $u_\alpha(x)$. Увеличив число компонент, можно провести анализ динамики среды с внутренними степенями свободы и т.д. Предложенная формулировка также очень удобна при квантовании жидкости. Мы планируем рассмотреть некоторые из этих вопросов в будущих публикациях.

Благодарности. Автор хотел бы поблагодарить профессоров А.В. Разумова, Л. Ньюто и Х. Негро за ценные обсуждения, профессоров М. Гаделла, Х. Негро и Л. Ньюто за гостеприимство, оказанное ему в Университете г. Вальядолид. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-01-00352), Программы поддержки ведущих научных школ (грант 1303.2003.2) и фонда Spanish MEC (грант SAB2004-0169).

Список литературы

- [1] Я. Антонио, Г. П. Пронько, *ТМФ*, **141**:3 (2004), 392.
- [2] R. Salmon, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **20** (1988), 225.
- [3] R. Jackiw, V. P. Nair, S.-Y. Pi, A. P. Polychronatos, *J. Phys. A*, **37** (2004), R327.
- [4] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974; V. I. Arnold, B. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Springer, Berlin, 1998.
- [5] J. Marsden, A. Weinstein, *Physica D*, **4** (1982), 394; D. D. Holm, B. Kupershmidt, C. D. Levermore, *Phys. Lett. A*, **98** (1983), 389; J. Marsden, A. Weinstein, *Physica D*, **7** (1983), 305; D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu, A. Weinstein, *Phys. Rep.*, **123**:1, 2 (1985), 1; К. Ландош, *Вариационные принципы механики*, Мир, М., 1965.
- [6] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Dover, N.Y., 1932.
- [7] В. Е. Захаров, *ЖЭТФ*, **60**:5 (1971), 1714.
- [8] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1978; B. Kostant, *Adv. Math.*, **34**:3 (1979), 195.
- [9] A. Clebsch, *J. Reine Angew. Math.*, **56**:1, 1859.
- [10] П. А. М. Дирак, *Лекции по квантовой механике*, Мир, М., 1968.
- [11] J.-M. Souriau, *Structure des Systemes Dynamiques. Maitrises de Mathématiques*, Dunod., Paris, 1970; J. Marsden, A. Weinstein, *Rep. Math. Phys.*, **5**:1 (1974), 121.
- [12] L. D. Faddeev, A. J. Niemi, *Toroidal configurations as stable solitons*, [hep-th/9705176](#).
- [13] L. D. Faddeev, A. Niemi, *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000), 3416; [physics/0003083](#).

Поступила в редакцию 13.02.2006