Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, Общий вид деформации суперскобки Пуассона, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 2, 163–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2078>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:42:00

© 2006 г. С. Е. Конштейн*, А. Г. Смирнов*, И. В. Тютин*

ОБЩИЙ ВИД ДЕФОРМАЦИИ СУПЕРСКОБКИ ПУАССОНА

С точностью до преобразований эквивалентности найдены все непрерывные формальные деформации алгебры Пуассона, реализованной на гладких грассмано-значных функциях с компактным носителем на $\mathbb{R}^{2n}$ при $2n \geq 4$. Показано, что у рассматриваемых алгебр существуют дополнительные деформации, отличные от скобки Мойалы.

Ключевые слова: алгебра Грассмана, супералгебра Пуассона, центральное расширение, когомологии, деформация, *-коммутатор, квантование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Надежда построить квантовую механику на нетривиальных многообразиях связана с геометрическим, или деформационным, квантованием [1]. С операторами ассоциируются функции на фазовом пространстве, а произведение и коммутатор операторов описываются ассоциативным *-произведением и антисимметричным *-коммутатором функций, удовлетворяющим тождеству Якоби. Эти *-произведение и *-коммутатор являются деформациями обычного произведения и обычной скобки Пуассона. В работе [2] рассмотрены супералгебра Пуассона, реализованная на полиномах, и супералгебра Пуассона с инвертированной четностью (антискобка). Чисто грассманов случай $n = 0$ рассмотрен в работе [3], а чисто бозонный случай – в работе [4] при некоторых дополнительных предположениях.

В настоящей работе найден общий вид *-коммутатора супералгебры Пуассона гладких функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^{2n}$, принимающих значения в алгебре Грассмана, при $2n \geq 4$. Предложенный анализ существенно базируется на результатах работы [5], в которой найдено второе пространство когомологий с коэффициентами в присоединенном представлении рассматриваемой супералгебры Пуассона.

2. ДЕФОРМАЦИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

В этом разделе мы напомним некоторые понятия, связанные с формальными деформациями алгебр (см., например, [6]), применительно к случаю топологических

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: konstein@lpi.ru, smirnov@lpi.ru, tyutin@lpi.ru

супералгебр Ли. Пусть L – топологическая супералгебра Ли над $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с суперскобкой Ли $\{\cdot, \cdot\}$, $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ – кольцо формальных степенных рядов по $\hbar^2$ над $\mathbb{K}$. Обозначим $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -модуль формальных степенных рядов по $\hbar^2$ с коэффициентами в L через $L[[\hbar^2]]$ и снабдим $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ и $L[[\hbar^2]]$ топологией прямого произведения. Градуировка ε в L естественно определяет градуировку в $L[[\hbar^2]]$: элемент $f = f_0 + \hbar^2 f_1 + \dots$ имеет определенную четность $\varepsilon(f)$, если $\varepsilon(f) = \varepsilon(f_j)$ для всех $j = 0, 1, \dots$. Всякое p -линейное раздельно-непрерывное отображение из L^p в L (в частности, скобка $\{\cdot, \cdot\}$) единственным образом продолжается вследствие $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -линейности до p -линейного раздельно-непрерывного отображения над $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ из $L[[\hbar^2]]^p$ в $L[[\hbar^2]]$. (Непрерывная) формальная деформация L – это, по определению, $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -билинейная непрерывная по каждому аргументу в отдельности суперскобка Ли $C(\cdot, \cdot)$ на $L[[\hbar^2]]$ такая, что $C(f, g) = \{f, g\} \bmod \hbar^2$ для любых $f, g \in L[[\hbar^2]]$. Очевидно, что всякая формальная деформация C представима в виде

$$C(f, g) = \{f, g\} + \hbar^2 C_1(f, g) + \hbar^4 C_2(f, g) + \dots, \quad f, g \in L, \quad (1)$$

где C_j – раздельно-непрерывные суперантисимметричные билинейные отображения из $L \times L$ в L (2-коцепи с коэффициентами в присоединенном представлении L). Формальные деформации C^1 и C^2 называются эквивалентными, если существует непрерывный $\mathbb{K}[[\hbar^2]]$ -линейный оператор $T = \text{id} + \hbar^2 T_1 + \hbar^4 T_2 + \dots$ из $L[[\hbar^2]]$ в $L[[\hbar^2]]$ такой, что $TC^1(f, g) = C^2(Tf, Tg)$, $f, g \in L[[\hbar^2]]$.

Задача поиска формальных деформаций L тесно связана с задачей вычисления когомологий Шевалле–Эйленберга супералгебры L с коэффициентами в присоединенном представлении L . Пусть $\mathcal{C}_p(L)$ обозначает пространство p -линейных суперантисимметричных раздельно-непрерывных отображений из L^p в L (пространство p -коцепей с коэффициентами в присоединенном представлении L). Пространство $\mathcal{C}_p(L)$ имеет естественную $\mathbb{Z}_2$ -градуировку: по определению $M_p \in \mathcal{C}_p(L)$ имеет определенную четность $\epsilon(M_p)$, если соотношение

$$\varepsilon(M_p(f_1, \dots, f_p)) = \varepsilon(M_p) + \varepsilon(f_1) + \dots + \varepsilon(f_p)$$

справедливо при любых $f_j \in L$ с определенными четностями $\epsilon(f_j)$.

В настоящей работе мы рассматриваем только четные деформации четной суперскобки Ли, поэтому все C_j в разложении (1) должны быть четными 2-коцепями.

Дифференциал d_p^{ad} определяется как такой линейный оператор из $\mathcal{C}_p(L)$ в $\mathcal{C}_{p+1}(L)$, что

$$\begin{aligned} d_p^{\text{ad}} M_p(f_1, \dots, f_{p+1}) &= \\ &= - \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{1,j-1} + \varepsilon(f_j)\varepsilon_{M_p}} \{f_j, M_p(f_1, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1})\} - \\ &\quad - \sum_{i < j} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{i+1,j-1}} M_p(f_1, \dots, f_{i-1}, \{f_i, f_j\}, f_{i+1}, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}) \end{aligned} \quad (2)$$

для любых $M_p \in C_p(L)$ и $f_1, \dots, f_{p+1} \in L$, имеющих определенные четности. Здесь использовано обозначение

$$|\varepsilon(f)|_{i,j} = \sum_{l=i}^j \varepsilon(f_l)$$

и знак $\smile$ обозначает отсутствие аргумента, над которым он поставлен. Выписывая тождество Якоби для деформации C вида (1),

$$(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} C(f, C(g, h)) + \text{cycle}(f, g, h) = 0, \quad (3)$$

и рассматривая члены порядка $\hbar^2$, мы находим, что

$$d_2^{\text{ad}} C_1 = 0. \quad (4)$$

Таким образом, первый порядок деформации супералгебры L является 2-коциклом дифференциала d^{ad} .

Легко также видеть, что первый порядок разности эквивалентных деформаций является кограницей.

3. СУПЕРАЛГЕБРА ПУАССОНА

Обозначим через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ пространство гладких $\mathbb{K}$ -значных функций на $\mathbb{R}^k$ с компактным носителем, снабженное своей стандартной топологией: последовательность $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$ сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^k)$, если $\partial^\lambda \varphi_k$ сходится равномерно к $\partial^\lambda \varphi$ для любого мультииндекса λ и носители всех φ_k содержатся в некотором компактном множестве. Положим

$$\mathbf{D}_{n_+}^{n_-} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-}, \quad \mathbf{E}_{n_+}^{n_-} = C^\infty(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-},$$

где $\mathbb{G}^{n_-}$ – алгебра Грассмана с n_- образующими. Образующие алгебры Грассмана (соответственно координаты пространства $\mathbb{R}^{n_+}$) мы обозначаем через ξ^α , $\alpha = 1, \dots, n_-$ (соответственно x^i , $i = 1, \dots, n_+$). Мы будем также использовать коллективные переменные z^A , которые равны x^A при $A = 1, \dots, n_+$ и ξ^{A-n_+} при $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$. Пространства $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ и $\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$ обладают естественной градуировкой, определяемой градуировкой алгебры Грассмана. Четность элемента f этих пространств обозначается через $\varepsilon(f)$. Положим также $\varepsilon_A = 0$ для $A = 1, \dots, n_+$ и $\varepsilon_A = 1$ для $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$.

Пусть $\partial_A \equiv \partial/\partial z^A$ и $\overleftarrow{\partial}_A \equiv \overleftarrow{\partial}/\partial z^A$ – операторы левого и правого дифференцирования. Скобка Пуассона определяется соотношением

$$\{f, g\} = f(z) \overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B g(z) = -(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \{g, f\}, \quad (5)$$

где симплектическая метрика $\omega^{AB} = -(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \omega^{BA}$ является постоянной невырожденной матрицей. Для определенности выберем ее в виде

$$\omega^{AB} = \begin{pmatrix} \omega^{ij} & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha \delta^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad \lambda_\alpha = \pm 1, \quad i, j = 1, \dots, n_+, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n_-,$$

где ω^{ij} – каноническая симплектическая форма (если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то можно выбрать $\lambda_\alpha = 1$). Невырожденность матрицы ω^{AB} означает, в частности, что n_+ четно. Скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби

$$(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)}\{f, \{g, h\}\} + \text{cycle}(f, g, h) = 0, \quad f, g, h \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}. \quad (6)$$

Супералгеброй Пуассона $\mathcal{P}$ мы называем пространство $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ со скобкой Пуассона (5) на нем. Соотношения (5) и (6) показывают, что эта скобка действительно определяет структуру супералгебры Ли на $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$.

Интеграл на $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ определяется соотношением

$$\bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} \int dz f(z) = \int_{\mathbb{R}^{n_+}} dx \int d\xi f(z),$$

где интеграл по алгебре Грассмана нормирован условием $\int d\xi \xi^1 \dots \xi^{n_-} = 1$.

4. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Ниже мы будем использовать обозначения

$$\begin{aligned} m_{2|1}(f, g) &\stackrel{\text{def}}{=} f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^3 g(z), \\ m_{2|3}(f, g) &\stackrel{\text{def}}{=} \bar{g} \mathcal{E}_z f(z) - \bar{f} \mathcal{E}_z g(z), \quad \mathcal{E}_z = 1 - \frac{1}{2} z^A \partial_A, \end{aligned} \quad (7)$$

$$m_{2|\zeta}(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta(z), f(z)\} \bar{g} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \{\zeta(z), g(z)\} \bar{f}, \quad \zeta \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}, \quad (8)$$

и, кроме того, обозначение

$$J(P, Q | f, g, h) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} [P(f, Q(g, h)) + Q(f, P(g, h))] + \text{cycle}(f, g, h)$$

для якобиатора 2-форм. Если $P = m_{2|i}$, а $Q = m_{2|j}$, то мы будем писать $J_{i,j}(f, g, h)$ вместо $J(P, Q | f, g, h)$.

Формы $m_{2|1}(f, g)$, $m_{2|3}(f, g)$, и $m_{2|\zeta}(f, g)$ и их якобиаторы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \overline{m_{2|1}(f, g)} &= \overline{m_{2|3}(f, g)} = \overline{m_{2|\zeta}(f, g)} = 0, \\ J_{\zeta, \zeta}(f, g, h) &= J_{\zeta, 3}(f, g, h) = J_{3, 3}(f, g, h) = 0, \\ J_{1, 3}(f, g, h) &= -2(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} m_{2|1}(f, g) \bar{h} + \text{cycle}(f, g, h); \\ J_{1, \zeta}(f, g, h) &= (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} d_2^{\text{ad}} j_{1, \zeta}(f, g, h), \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$j_{1, \zeta}(f, g) = m_{2|1}(f, \zeta) \bar{g} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} m_{2|1}(g, \zeta) \bar{f}.$$

При выводе этих формул мы использовали тождество

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_z [f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^p g(z)] &= (\mathcal{E}_z f(z)) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^p g(z) + \\ &+ f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^p \mathcal{E}_z g(z) + (p-1) f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^p g(z). \end{aligned}$$

Суперскобка Мойала

$$\mathcal{M}_\kappa(f, g) = \frac{1}{\hbar\kappa} f(z) \operatorname{sh}(\hbar\kappa \overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B) g(z) \quad (10)$$

суперантисимметрична, удовлетворяет тождеству Якоби при произвольном $\kappa \in \mathbb{K}[[\hbar^2]]^1$ и, следовательно, является деформацией исходной алгебры Пуассона. Для $\zeta \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$, $\kappa, c \in \mathbb{K}[[\hbar^2]]$, положим

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\kappa, \zeta}(f, g) &= \mathcal{M}_\kappa(f - \hbar^2 \zeta \bar{f}, g - \hbar^2 \zeta \bar{g}), \\ \mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c}(f, g) &= \mathcal{M}_\kappa(f - \hbar^2 \zeta \bar{f}, g - \hbar^2 \zeta \bar{g}) + c \bar{f} \bar{g}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathbf{Z}_{n_+}^{n_-}$ подалгебру $\mathbf{Z}_{n_+}^{n_-} = \mathbf{D}_{n_+}^{n_-} \oplus \mathcal{C}_{\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}}(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}) \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$, где $\mathcal{C}_{\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}}(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-})$ – централизатор $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ в $\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$. Очевидно, что $\mathcal{C}_{\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}}(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-})$ изоморфно $\mathbb{K}$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. 1. Пусть $n_+ \geq 4$, $n_- = 2k$. Тогда всякая непрерывная формальная деформация супералгебры Пуассона $\mathcal{P}$ эквивалентна либо суперскобке $\mathcal{N}_{\kappa, \zeta}(f, g)$ при некоторой четной функции $\zeta \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$ и $\kappa \in \mathbb{K}[[\hbar^2]]$, либо суперскобке

$$C_{\zeta, c}(f, g) = \{f(z), g(z)\} + m_{2|\zeta}(f, g) + cm_{2|3}(f, g)$$

при некоторой четной функции $\zeta \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$ и $c \in \mathbb{K}[[\hbar^2]]$.

Суперскобки $\mathcal{N}_{\kappa_1, \zeta_1}(f, g)$ и $\mathcal{N}_{\kappa_2, \zeta_2}(f, g)$ эквивалентны, если $\kappa_1 = \kappa_2$ и $\zeta_1 - \zeta_2 \in \mathbf{Z}_{n_+}^{n_-}$.

Суперскобки $C_{\zeta_1, c_1}(f, g)$ и $C_{\zeta_2, c_2}(f, g)$ эквивалентны, если $c_1 = c_2$ и $\zeta_1 - \zeta_2 \in \mathbf{Z}_{n_+}^{n_-}$.

2. Пусть $n_+ \geq 4$, $n_- = 2k + 1$. Тогда всякая непрерывная формальная деформация супералгебры Пуассона $\mathcal{P}$ эквивалентна суперскобке $\mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c}(f, g)$ при некоторых $c, \kappa \in \mathbb{K}[[\hbar^2]]$ и нечетной функции $\zeta \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$ таких, что $\hbar^4 \mathcal{M}_\kappa(\zeta, \zeta) + c \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}[[\hbar^2]]$.

Суперскобки $\mathcal{N}_{\kappa_1, \zeta_1, c_1}(f, g)$ и $\mathcal{N}_{\kappa_2, \zeta_2, c_2}(f, g)$ эквивалентны, если $\kappa_1 = \kappa_2$, $c_1 = c_2$ и $\zeta_1 - \zeta_2 \in \mathbf{Z}_{n_+}^{n_-}$.

Оставшаяся часть работы представляет собой доказательство этой теоремы.

5. СЛУЧАЙ $n_- = 2k$

Прежде всего заметим, что суперскобки $\mathcal{N}_{\kappa, \zeta}(f, g)$ и $C_{\zeta, c}(f, g)$ удовлетворяют тождеству Якоби. Для доказательства достаточно заметить, что

$$\int dz f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^p \zeta(z) = 0$$

для всех $p \geq 1$, $f \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, $\zeta \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$.

¹⁾Этот факт хорошо известен для бозонного случая и может быть легко проверен для супер-случая.

Из теоремы 3 работы [5] следует, что общее решение уравнения (1) для первого порядка деформации задается выражением²⁾

$$C_1(f, g) = \frac{1}{6} \kappa_1^2 m_{2|1}(f, g) + m_{2|\zeta_1}(f, g) + c_{31} m_{2|3}(f, g) + d_1^{\text{ad}} t_{D1}(f, g) + c_{41} \delta_{2k-n_+, 4} m_{2|4}(f, g), \quad (11)$$

$$\varepsilon(\kappa_1) = \varepsilon(c_{31}) = \varepsilon(\zeta_1(z)) = 0,$$

где

$$m_{2|4}(f, g) = \int du (\mathcal{E}_u f(u) g(u) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \mathcal{E}_u g(u) f(u)), \quad t_{D1}(f) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}.$$

Условие $C(f, g) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ дает, что $c_{41} = 0$.

Выполнив преобразование эквивалентности $C(f, g) \rightarrow C_T(f, g)$ с $T(f) = f(z) - \hbar^2 t_{D1}(f) + O(\hbar^4)$, мы можем переписать $C(f, g)$ в виде

$$C(f, g) = \mathcal{N}_{\kappa_1, \zeta_1}(f, g) + c_{31} \hbar^2 m_{2|3}(f, g) + \hbar^4 C_2(f, g) + O(\hbar^6).$$

Из тождества Якоби (3) для $C(f, g, h)$ получаем

$$d_2^{\text{ad}} C_2(f, g, h) = -\frac{c_{31} \kappa_1^2}{3} (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} J_{1,3}(f, g, h) - \frac{\kappa_1^2}{6} d_2^{\text{ad}} j_{1, \zeta_1}(f, g, h). \quad (12)$$

Пусть

$$[z \cup \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] \cap \text{supp}(h) = \emptyset.$$

Из уравнения (12) следует, что

$$d_1^{\text{ad}} \widehat{C}_2(f, g, h) = \frac{c_{31} \kappa_1^2}{3} (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} m_{2|1}(f, g) \bar{h} - \frac{\kappa_1^2}{6} d_1^{\text{ad}} j_{\zeta_1}(f, g) \bar{h}, \quad (13)$$

$$j_{\zeta}(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} m_{2|1}(f, \zeta),$$

где дифференциал d_1^{ad} в левой части уравнения (13) действует только на первый аргумент функционала $\widehat{C}_2(f, h)$. Здесь мы, как и в работе [5], используем обозначение $\widehat{}$ для ограничения формы на указанную область.

Как показано в п. 4.3 работы [5], уравнение (13) имеет решение только тогда, когда

$$c_{31} \kappa_1 = 0.$$

Рассмотрим по отдельности следующие три случая.

1. $\kappa_1 = 0$, $c_{31} \neq 0$. В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$d_2^{\text{ad}} C_2(f, g, h) = 0,$$

²⁾ При выводе выражения (11) в работе [5] было использовано утверждение о том, что если форма $M_2(z | f, g)$, рассматриваемая как функция аргумента z , является гладкой и имеет место представление $M_2(z | f, g) = d_1^{\text{ad}} M_1(z | f, g)$, то форма $M_1(z | f)$ также является гладкой по аргументу z . Точная формулировка и доказательство этого утверждения приведены в приложении.

и его общее решение в $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$

$$C_2(f, g) = \kappa_2 m_{2|1}(f, g) + m_{2|\zeta_2}(f, g) + c_{32} m_{2|3}(f, g) + d_1^{\text{ad}} t_{D2}(f, g).$$

Выполняя преобразование эквивалентности $C(f, g) \rightarrow C_T(f, g)$ с $T(f) = f(z) - \hbar^4 t_{D2}(f) + O(\hbar^6)$, перепишем $C(f, g)$ в виде

$$\begin{aligned} C(f, g) &= \{f(z), g(z)\} + \hbar^4 \kappa_2 m_{2|1}(f, g) + m_{2|\zeta_{[2]}}(f, g) + \\ &\quad + c_{3[2]} m_{2|3}(f, g) + \hbar^6 C_3(f, g) + O(\hbar^8), \\ \zeta_{[n]}(z) &= \sum_{k=1}^n \hbar^{2k} \zeta_k(z), \quad c_{3[n]} = \sum_{k=1}^n \hbar^{2k} c_{3k}. \end{aligned}$$

Тождество Якоби (3) для $C(f, g, h)$ дает

$$d_2^{\text{ad}} C_3(f, g, h) = -c_{31} \kappa_2 (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} J_{1,3}(f, g, h) - d_2^{\text{ad}} J_{1,\zeta_1}(f, g, h). \quad (14)$$

Теперь мы можем заключить, что уравнение (14) имеет решение только тогда, когда $c_{31} \kappa_2 = 0$. Из этого следует, что $\kappa_2 = 0$. Продолжая тем же образом, мы находим, что с точностью до преобразования эквивалентности общий вид функционала $C(f, g)$, удовлетворяющего тождеству Якоби (3) (общий вид *-коммутатора), задан выражением

$$C(f, g) = \{f(z), g(z)\} + m_{2|\zeta_{[\infty]}}(f, g) + c_{3[\infty]} m_{2|3}(f, g). \quad (15)$$

Соотношения (9) позволяют провести прямую проверку того, что форма (15) удовлетворяет тождеству Якоби (3).

2. $\kappa_1 \neq 0, c_{31} = 0$. В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$d_2^{\text{ad}} C_2(f, g, h) = -\frac{\kappa_1^2}{6} d_2^{\text{ad}} j_{1,\zeta_1}(f, g, h)$$

и имеет следующее общее решение:

$$C_2(f, g) = -\frac{\kappa_1^2}{6} j_{1,\zeta_1}(f, g) + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{3} m_{2|1}(f, g) + m_{2|\zeta_2}(f, g) + c_{32} m_{2|3}(f, g) + d_1^{\text{ad}} t_{D2}(f, g).$$

Выполнив преобразование эквивалентности $C(f, g) \rightarrow C_T(f, g)$ с $T(f) = f(z) - \hbar^4 t_{D2}(f) + O(\hbar^6)$, мы можем представить $C(f, g)$ в виде³⁾

$$C(f, g) = \mathcal{N}_{\kappa_{[2]}, \zeta_{[2]}}(f, g) + c_{32} \hbar^4 m_{2|3}(f, g) + \hbar^6 C_3(f, g) + O(\hbar^8), \quad (16)$$

где

$$\kappa_{[n]} = \sum_{k=1}^n \hbar^{2(k-1)} \kappa_k.$$

³⁾ При выводе этого соотношения мы использовали равенство

$$\zeta(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^p \zeta(z) = 0,$$

справедливое при $\varepsilon(\zeta) = 0, p = 2k + 1$.

Тождество Якоби (3) для $C(f, g, h)$ дает

$$d_2^{\text{ad}} C_3(f, g, h) = -\frac{c_{32}\kappa_1^2}{6}(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} J_{1,3}(f, g, h). \quad (17)$$

Это уравнение имеет решение только при $c_{32}\kappa_1 = 0$, откуда следует, что $c_{32} = 0$.

Действуя тем же образом, мы находим, что с точностью до преобразования эквивалентности общий вид функционала $C(f, g)$, удовлетворяющего тождеству Якоби (3) (общий вид *-коммутатора), задан выражением

$$C(f, g) = \mathcal{N}_{\kappa_{[\infty]}, \zeta_{[\infty]}}(f, g), \quad \zeta_{[\infty]}(z) \in \mathbf{E}_{n+}^{n-} / \mathbf{Z}_{n+}^{n-}, \quad \varepsilon(\zeta_{[\infty]}) = 0.$$

3. $\kappa_1 = c_{31} = 0$. В этом случае уравнение (12) принимает вид

$$d_2^{\text{ad}} C_2(f, g, h) = 0$$

и имеет общее решение

$$C_2(f, g) = \frac{\kappa_2^2}{6} m_{2|1}(f, g) + m_{2|\zeta_2}(f, g) + c_{32} m_{2|3}(f, g) + d_1^{\text{ad}} t_{D2}(f, g).$$

Выполнив преобразование эквивалентности $C(f, g) \rightarrow C_T(f, g)$ с $T(f) = f(z) - \hbar^4 t_{D2}(f) + O(\hbar^6)$, перепишем $C(f, g)$ в виде

$$C(f, g) = \mathcal{N}_{\hbar\kappa_2, \zeta_{[2]}}(f, g) + c_{32}\hbar^4 m_{2|3}(f, g) + \hbar^6 C_3(f, g) + O(\hbar^8).$$

Тождество Якоби (3) для $C(f, g, h)$ дает

$$\begin{aligned} d_2^{\text{ad}} C_3(f, g, h) &= 0, \\ C_3(f, g) &= \frac{\kappa_2\kappa_3}{3} m_{2|1}(f, g) + m_{2|\zeta_3}(f, g) + c_{33} m_{2|3}(f, g) + d_1^{\text{ad}} t_{D3}(f, g). \end{aligned} \quad (18)$$

Выполнив преобразование эквивалентности $C(f, g) \rightarrow C_T(f, g)$ с $T(f) = f(z) - \hbar^6 t_{D3}(f) + O(\hbar^8)$, перепишем $C(f, g)$ в виде

$$C(f, g) = \mathcal{N}_{\hbar\kappa_{[3]}, \zeta_{[3]}}(f, g) + c_{3[3]} m_{2|3}(f, g) + \hbar^8 C_4(f, g) + O(\hbar^{10}).$$

Тождество Якоби (3) для $C(f, g)$ дает

$$\begin{aligned} d_2^{\text{ad}} C_4(f, g, h) &= -\frac{\kappa_2^2 c_{32}}{6}(-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(h)} J_{1,3}(f, g, h) \implies \\ &\implies \kappa_2 c_{32} = 0 \end{aligned}$$

и т.д.

6. СЛУЧАЙ $n_- = 2k + 1$

В этом случае общее решение уравнения (1) для первого порядка деформации задано выражением

$$\begin{aligned} C_1(f, g) &= \frac{1}{6} \kappa_1^2 m_{2|1}(f, g) + m_{2|\zeta_{C1}}(f, g) + d_1^{\text{ad}} t_{D1}(f, g), \\ \varepsilon(\kappa_1) &= 0, \quad \varepsilon(\zeta_{C1}(z)) = 1. \end{aligned}$$

Заметим, что, в противоположность (11), член $m_{2|3}(f, g)$ не входит в первый порядок деформации, так как из-за нечетности n_- он не имеет необходимой четности.

Рассмотрим форму

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c_2}(f, g) &= \mathcal{M}_{\kappa}(f - \hbar^2 \zeta_C \bar{f}, g - \hbar^2 \zeta_C \bar{g}) + c_2 \bar{f} \bar{g} = \\ &= \mathcal{M}_{\kappa}(f, g) + \mathcal{M}_{\kappa}(f, \zeta_C) \bar{g} - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \mathcal{M}_{\kappa}(g, \zeta_C) \bar{f} + \mathcal{L}_{\kappa, \zeta, c_2}(z) \bar{f} \bar{g},\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{L}_{\kappa, \zeta, c_2}(z) = \mathcal{M}_{\kappa}(\zeta_C, \zeta_C) + c_2, \quad \varepsilon(\zeta_C(z)) = 1.$$

Мы предполагаем, что $\zeta_C(z) \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$, а $\mathcal{L}_{\kappa, \zeta, c_2}(z) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Форма $\mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c_2}(f, g)$ имеет следующие свойства:

- 1) $\mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c_2}(f, g) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$;
- 2) $\overline{\mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c_2}(f, g)} = \int dz \mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c_2}(f, g) = 0$;
- 3) форма $\mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c_2}(f, g)$ удовлетворяет тождеству Якоби.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1 очевиден; пункт 2 верен, так как

$$\int dz \mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c_2}(f, g) = \bar{f} \bar{g} \int dz \mathcal{L}_{\kappa, \zeta, c_2}(z),$$

а интеграл от $\mathcal{L}_{\kappa, \zeta, c_2}(z) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ хорошо определен и равен нулю как интеграл четной функции по нечетному числу нечетных переменных.

Для доказательства пункта 3 заметим, что

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c_2}(f, \mathcal{N}_{\kappa, \zeta, c_2}(g, h)) &= \mathcal{M}_{\kappa}(f - \hbar^2 \zeta_C \bar{f}, \mathcal{M}_{\kappa}(g - \hbar^2 \zeta_C \bar{g}, h - \hbar^2 \zeta_C \bar{h})) + \\ &+ \mathcal{M}_{\kappa}(f - \hbar^2 \zeta_C \bar{f}, c_2 \bar{g} \bar{h}) + [\mathcal{M}_{\kappa}(f - \hbar^2 \zeta_C \bar{f}, \zeta_C) + c_2 \bar{f}] \bar{\mathcal{N}}_{\kappa, \zeta, c_2}(g, h) = \\ &= \mathcal{M}_{\kappa}(f - \hbar^2 \zeta_C \bar{f}, \mathcal{M}_{\kappa}(g - \hbar^2 \zeta_C \bar{g}, h - \hbar^2 \zeta_C \bar{h})),\end{aligned}$$

и тождество Якоби следует из того, что форма $\mathcal{M}_{\kappa}(f, g)$ удовлетворяет тождеству Якоби для любых $f, g, h \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$.

Рассмотрим теперь форму

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\kappa_{[n]}, \zeta_{[n]}, c_{2[n]}}(f, g) &= \mathcal{M}_{\kappa_{[n]}}(f - \hbar^2 \zeta_{C[n]} \bar{f}, g - \hbar^2 \zeta_{C[n]} \bar{g}) + c_{2[n]} \bar{f} \bar{g} = \\ &= \mathcal{M}_{\kappa_{[n]}}(f, g) - \hbar^2 \mathcal{M}_{\kappa_{[n]}}(f, \zeta_{C[n]}) \bar{g} - \hbar^2 (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \mathcal{M}_{\kappa_{[n]}}(g, \zeta_{C[n]}) \bar{f} + \\ &+ \mathcal{L}_{\kappa_{[n]}, \zeta_{[n]}, c_{2[n]}}(z) \bar{f} \bar{g}, \quad n \geq 1,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\kappa_{[n]} &= \sum_{k=1}^n \hbar^{2(k-1)} \kappa_k, & \zeta_{C[n]}(z) &= \sum_{k=1}^n \hbar^{2(k-1)} \zeta_{Ck}(z), \\ \varepsilon(\zeta_{Ck}(z)) &= 1, & c_{2[n]} &= \sum_{k=1}^n \hbar^{2k} c_{2k}, & c_{21} &= 0.\end{aligned}$$

Мы полагаем, что

$$\zeta_{C[n]} \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}, \quad \mathcal{L}_{\kappa_{[n]}, \zeta_{[n]}, c_{2[n]}}|_{[n+1]}(z) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-},$$

где $A(\hbar^2)|_{[n]} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n A(\hbar^2)|_k$, а $A(\hbar^2)|_k$ обозначает член порядка $\hbar^{2k}$ в разложении функции $A(\hbar^2)$ в ряд Тейлора по $\hbar^2$. Тогда легко показать, что якобиатор $J(\mathcal{N}_{\kappa_{[n]}, \zeta_{[n]}, c_{2[n]}}, \mathcal{N}_{\kappa_{[n]}, \zeta_{[n]}, c_{2[n]}} \mid f, g, h)$ формы $\mathcal{N}_{\kappa_{[n]}, \zeta_{[n]}, c_{2[n]}}(f, g)$ обладает следующим свойством:

$$J(\mathcal{N}_{\kappa_{[n]}, \zeta_{[n]}, c_{2[n]}}; \mathcal{N}_{\kappa_{[n]}, \zeta_{[n]}, c_{2[n]}} \mid f, g, h)|_{[n+2]} = 0$$

(в этом якобиаторе члены порядка $\hbar^{2k}$, $k \geq n+3$, могут быть плохо определены).

Выполняя преобразование эквивалентности $C(f, g) \rightarrow C_T(f, g)$ с $T(f) = f(z) - \hbar^2 t_{D1}(f) + O(\hbar^4)$, перепишем $C(f, g)$ в виде

$$C(f, g) = \mathcal{N}_{\kappa_{[1]}, \zeta_{[1]}, c_{2[1]}}(f, g) + \hbar^4 C_2(f, g) - \mathcal{L}_{\kappa_{[1]}, \zeta_{[1]}, c_{2[1]}}(z)|_2 \bar{f} \bar{g} + O(\hbar^6).$$

Из условия $C(f, g) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ следует, что $C_2(f, g) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$.

Тождество Якоби (3) для $C(f, g, h)$ дает

$$d_2^{\text{ad}} C'_2(f, g, h) = 0, \quad C'_2(f, g) = C_2(f, g) - \hbar^{-4} \mathcal{L}_{\kappa_{[1]}, \zeta_{[1]}, c_{2[1]}}(z)|_2 \bar{f} \bar{g}$$

и, следовательно,

$$C_2(f, g) = \hbar^{-4} \mathcal{L}_{\kappa_{[1]}, \zeta_{[1]}, c_{2[1]}}(z)|_2 \bar{f} \bar{g} + \frac{\kappa_1 \kappa_2}{3} m_{2|1}(f, g) + c_{22} \bar{f} \bar{g} + d_1^{\text{ad}} t_2(f, g).$$

Пусть

$$z \cap \text{supp}(f) = z \cap \text{supp}(g) = \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset.$$

Тогда мы имеем

$$\widehat{C}_2(f, g) = [\hbar^{-4} \mathcal{L}_{\kappa_{[1]}, \zeta_{[1]}, c_{2[1]}}(z)|_2 + c_{22}] \bar{f} \bar{g}.$$

Условие $\widehat{C}_2(f, g) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ дает

$$\hbar^{-4} \mathcal{L}_{\kappa_{[1]}, \zeta_{[1]}, c_{2[1]}}(z)|_2 + c_{22} \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}. \quad (19)$$

Таким образом, деформация возможна не для всех функций $\zeta_{C1}(z)$, а только для тех, которые удовлетворяют условию (19).

Далее из условия $d_1^{\text{ad}} t_2(f, g) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ мы находим (см. конец п. 4.3 работы [5]), что

$$t_2(f) = \zeta_{C2}(z) \bar{f} + t_{D2}(f), \\ \zeta_{C2}(z) \in \mathbf{E}_{n+}^{n-} / \mathbf{Z}_{n+}^{n-}, \quad \varepsilon(\zeta_{C2}) = 1, \quad t_{D2}(f) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}.$$

Выполнив преобразование эквивалентности $C(f, g) \rightarrow C_T(f, g)$ с $T(f) = f(z) - \hbar^4 t_{D2}(f) + O(\hbar^6)$, представим $C(f, g)$ в виде

$$C(f, g) = \mathcal{N}_{\kappa_{[2]}, \zeta_{[2]}, c_{2[2]}}(f, g) + \hbar^6 C_3(f, g) - \mathcal{L}_{\kappa_{[2]}, \zeta_{[2]}, c_{2[2]}}(z)|_3 \bar{f} \bar{g} + O(\hbar^8).$$

Из условия $C(f, g) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ следует, что $C_3(f, g) \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$.

Тождество Якоби (3) для $C(f, g, h)$ дает

$$d_2^{\text{ad}} C'_3(f, g, h) = 0, \quad C'_3(f, g) = C_3(f, g) - \hbar^{-6} \mathcal{L}_{\kappa_{[2]}, \zeta_{[2]}, c_{2[2]}}(z)|_3 \bar{f} \bar{g},$$

откуда следует, что

$$C_3(f, g) = \hbar^{-6} \mathcal{L}_{\kappa_{[2]}, \zeta_{[2]}, c_{2[2]}}(z)|_3 \bar{f} \bar{g} + \left(\frac{\kappa_2^2}{6} + \frac{\kappa_1 \kappa_3}{3} \right) m_{2|1}(f, g) + c_{23} \bar{f} \bar{g} + d_1^{\text{ad}} t_3(f, g).$$

Пусть

$$z \cap \text{supp}(f) = z \cap \text{supp}(g) = \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset.$$

Тогда мы имеем

$$\widehat{C}_3(f, g) = [\hbar^{-6} \mathcal{L}_{\kappa_{[2]}, \zeta_{[2]}, c_{2[2]}}(z)|_3 + c_{23}] \bar{f} \bar{g}.$$

Условие $\widehat{C}_3(f, g) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ дает

$$[\hbar^{-6} \mathcal{L}_{\kappa_{[2]}, \zeta_{[2]}, c_{2[2]}}(z)|_3 + c_{22}] \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}.$$

Действуя аналогичным образом, мы окончательно находим, что с точностью до преобразований эквивалентности общий вид функционала $C(f, g)$, удовлетворяющего тождеству Якоби (3) (общий вид *-коммутатора), дается формулой

$$C(f, g) = \mathcal{N}_{\kappa_{[\infty]}, \zeta_{[\infty]}, c_{2[\infty]}}(f, g),$$

$$\zeta_{C\infty}(z) \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-} / \mathbf{Z}_{n_+}^{n_-}, \quad \varepsilon(\zeta_{C\infty}) = 1, \quad [\mathcal{M}_{\kappa_{[\infty]}}(\zeta_{C[\infty]}, \zeta_{C[\infty]}) + c_{2[\infty]}] \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы приведем точную формулировку и доказательство утверждения, о котором говорилось в сноске 2. Доказательство будет охватывать как случай супералгебры, генерируемой суперскобкой Пуассона, так и случай супералгебры, генерируемой антискобкой.

Введем некоторые обозначения. Постоянная симплектическая метрика ω_λ^{AB} несет здесь дополнительный индекс λ , равный 0 или 1 для случаев скобки и антискобки Пуассона, соответственно, невырожденна⁴⁾ и обладает свойствами

$$\omega_\lambda^{BA} = -(-1)^{(\varepsilon_A + \lambda)(\varepsilon_B + \lambda)} \omega_\lambda^{AB}, \quad \varepsilon(\omega_\lambda^{AB}) = \varepsilon_A + \varepsilon_B + \lambda.$$

С помощью метрики ω_λ^{AB} обычным образом определяется скобка

$$[f, g](z) = f(z) \overleftarrow{\partial}_A \omega_\lambda^{AB} \partial_B g(z),$$

$$[g, f] = -(-1)^{(\varepsilon(f) + \lambda)(\varepsilon(g) + \lambda)} [f, g], \quad \varepsilon([f, g]) = \varepsilon(f) + \varepsilon(g) + \lambda,$$

$$\int dz [f, g] h = (-1)^{\lambda + \lambda \varepsilon(g)} \int dz f[g, h] - 2 \int dz f \Delta g h,$$

где $\Delta = 0$ при $\lambda = 0$ и $\Delta = (1/2)(-1)^{\varepsilon_A} \omega_1^{AB} \partial_A \partial_B = \partial_{x^i} \partial_{\xi^i}$ при $\lambda = 1$.

ЛЕММА П.1. Пусть $\mathbf{m}: \mathbf{D}_{n_+}^{n_-} \rightarrow \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$ – непрерывное линейное отображение. Для $g \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ определим функцию $\tilde{\mathbf{m}}(z | g)$ на $\mathbb{R}^{n_+}$ со значениями в $\mathbb{G}^{n_-}$ соотношением $\tilde{\mathbf{m}}(z | g) = \mathbf{m}(z | g(\cdot - z))$. Тогда $\tilde{\mathbf{m}}$ является непрерывным линейным отображением из $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ в $\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$.

⁴⁾При $\lambda = 1$ требование невырожденности симплектической метрики ω_1^{AB} приводит к условию $n_+ = n_-$.

ЛЕММА П.2. Пусть обобщенная функция $m \in \mathbf{D}_{n_1^+ + n_2^+}^{'n_1^- + n_2^-}$ является гладкой по первому аргументу, т.е. существует непрерывное линейное отображение $\mathbf{m}: \mathbf{D}_{n_2^+}^{n_2^-} \rightarrow \mathbf{E}_{n_1^+}^{n_1^-}$ такое, что

$$m(f \otimes' g) \equiv \int dz du m(z, u) g(u) f(z) = \int^L dz \mathbf{m}(z | g) f(z),$$

$$(f \otimes' g)(z, u) = g(u) f(z),$$

для любых $f \in \mathbf{D}_{n_1^+}^{n_1^-}$, $g \in \mathbf{D}_{n_2^+}^{n_2^-}$. Здесь $\int^L$ означает обычный интеграл Лебега при интегрировании по четным переменным. Тогда для любой $\varphi \in \mathbf{D}_{n_1^+ + n_2^+}^{n_1^- + n_2^-}$ имеем

$$m(\varphi) = \int^L dz \mathbf{m}(z | \varphi(\cdot, z)).$$

ЛЕММА П.3. Пусть непрерывные линейные отображения $\mathbf{m}_A: \mathbf{D}_{n_2^+}^{n_2^-} \rightarrow \mathbf{E}_{n_1^+}^{n_1^-}$ таковы, что $\mathbf{m}_A(z | g) \overleftarrow{\partial}_B = (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \mathbf{m}_B(z | g) \overleftarrow{\partial}_A$, $1 \leq A, B \leq n_1^+ + n_1^-$, для любого $g \in \mathbf{D}_{n_2^+}^{n_2^-}$. Тогда существует такое непрерывное линейное отображение $\mathbf{m}: \mathbf{D}_{n_2^+}^{n_2^-} \rightarrow \mathbf{E}_{n_1^+}^{n_1^-}$, что $\mathbf{m}(z | g) \overleftarrow{\partial}_A = \mathbf{m}_A(z | g)$ для любого $g \in \mathbf{D}_{n_2^+}^{n_2^-}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $\mathbf{m}$, определенное формулой

$$\mathbf{m}(z | g) = \int_0^1 \mathbf{m}_A(tz | g) z^A dt,$$

удовлетворяет всем условиям леммы.

Дифференциал

$$d_1^{\text{ad}} M_1(z | f, g) = [M_1(z | f), g(z)] - (-1)^{(\varepsilon(f) + \lambda)(\varepsilon(g) + \lambda)} [M_1(z | g), f(z)] - M_1(z | [f, g])$$

будем рассматривать как оператор из $\mathbf{D}_{2n^+}^{'2n^-}$ в $\mathbf{D}_{3n^+}^{'3n^-}$. Пусть $M_1(z | u)$ – такая обобщенная функция, что $d_1^{\text{ad}} M_1$ является гладкой по первому аргументу, т.е. существует такое непрерывное линейное отображение $\mathbf{M}_2: \mathbf{D}_{n_+}^{n_-} \rightarrow \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$, что

$$(d_1^{\text{ad}} M_1)(h \otimes' \psi) = \int dz d_1^{\text{ad}} M_1(z | \psi) h(z) = \int^L dz \mathbf{M}_2(z | \psi) h(z)$$

для любых $h \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, $\psi \in \mathbf{D}_{2n^+}^{2n^-}$.

Обозначим через S_R и $\bar{S}_R$ соответственно открытый и замкнутый шары радиуса R с центром в начале координат. Обозначим через $\mathbf{D}(\bar{S}_R)$ подпространство $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, состоящее из таких f , что $\text{supp } f \subset \bar{S}_R$.

ЛЕММА П.4. Пусть $R > 0$, $g, h \in \mathbf{D}(\bar{S}_R)$, $\partial_A g(0) = \partial_A \partial_B g(0) = 0$ для всех A, B ; $f_A^R \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ такова, что $f_A^R(z) = -\omega_{\lambda, AB} z^B [\varepsilon(f_A^R) = \varepsilon_A + \lambda]$ в некоторой окрестности $\bar{S}_{2R}$, $\omega_{\lambda, AB} \omega_{\lambda}^{BC} = \delta_A^C$. Тогда

$$\int^L dz \mathbf{M}_2(z | f_A^R \otimes' g(\cdot - z)) h(z) = \int dz du M_1(z | u) g(u - z) \partial_A h(z).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы II.2 имеем

$$\int^L dz \mathbf{M}_2(z | f_A^R \otimes' g(\cdot - z))h(z) = (-1)^{\varepsilon(f_A^R)\varepsilon(g)}(d_1^{\text{ad}} M_1)(\varphi_A), \quad (\text{П.1})$$

где $\varphi_A(v, w, z) = f_A^R(v)g(w - z)h(z)$. Легко видеть, что

$$(d_1^{\text{ad}} M_1)(\varphi) = \int dz du M_1(z | u)L\varphi(u, z),$$

где оператор $L: \mathbf{D}_{3n+}^{3n-} \rightarrow \mathbf{D}_{2n+}^{2n-}$ действует на $\varphi(v, w, z)$ по правилу

$$\begin{aligned} L\varphi(u, z) = \varphi(v, w, z) & \left[\overleftarrow{l}_{wz} \Big|_{v=u, w=z} - (-1)^\lambda \overleftarrow{l}_{vz} \Big|_{v=z, w=u} - (-1)^\lambda \overleftarrow{l}_{v, w} \Big|_{v=w=u} + \right. \\ & + 2\overleftarrow{\Delta}^w \Big|_{v=u, w=z} + 2\overleftarrow{\Delta}^v \Big|_{v=z, w=u} \Big] (-1)^{\lambda(\varepsilon(g)+\varepsilon(h))}, \\ \overleftarrow{l}_{vz} & = \overleftarrow{\partial}_A^v \omega_\lambda^{AB} (-1)^{\varepsilon_B} \overleftarrow{\partial}_B^z. \end{aligned}$$

Применяя L к функции φ_A указанного выше вида и пользуясь условием $\partial g(0) = \partial^2 g(0) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} (L\varphi_A)(u, z) = & -(-1)^{(\lambda+\varepsilon_A)\varepsilon(g)} f_A^R(z) \overleftarrow{\partial}_B \omega_\lambda^{BC} g(u - z) \partial_C h(z) + \\ & + \omega_\lambda^{BC} [f_A^R(z) \overleftarrow{\partial}_B - f_A^R(u) \overleftarrow{\partial}_B] \partial_C^u g(u - z) h(z) + 2f_A^R(z) \overleftarrow{\Delta} g(u - z) h(z). \end{aligned}$$

Из условия для носителей h и g следует, что второй и третий члены отличны от нуля лишь при $|x| \leq R$ и $|y| \leq 2R$. При этих условиях второй и третий члены тождественно равны нулю и, кроме того, $\varepsilon(f_A^R) = \varepsilon_A + \lambda$. Вычисление первого члена дает

$$(L\varphi_A)(u, z) = (-1)^{(\lambda+\varepsilon_A)\varepsilon(g)} g(u - z) \partial_A h(z).$$

Подстановка полученного соотношения в (П.1) приводит к требуемому равенству.

Пусть $\psi(z)$, $\varepsilon(\psi) = 0$ – гладкая функция с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$, равная единице в некоторой окрестности начала координат и нулю при $|x| \geq 1$. Для $g \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$ положим

$$\hat{g}(z) = g(z) - \psi(z) \left[z^A \partial_A + \frac{1}{2} z^A z^B \partial_B \partial_A \right] g(0).$$

Очевидно, что $\partial \hat{g}(0) = \partial^2 \hat{g}(0)$.

ЛЕММА П.5. Существует такое непрерывное линейное отображение $\mathbf{m}_{1A}: \mathbf{D}_{n+}^{n-} \rightarrow \mathbf{E}_{n+}^{n-}$, $f \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$, $\mathbf{m}_{1A}(z|f) \in \mathbf{E}_{n+}^{n-}$, что

$$\int dz du M_1(z | u) \hat{g}(u - z) \partial_A h(z) = \int^L dz \mathbf{m}_{1A}(z | g) h(z) \quad (\text{П.2})$$

для любых $g, h \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $R > 0$ определим линейное отображение $\mathbf{M}_{1A}^R: \mathbf{D}_{n+}^{n-} \rightarrow \mathbf{E}_{n+}^{n-}$ соотношением

$$\mathbf{M}_{1A}^R(z | g) = \mathbf{M}_2(z | f_A^R \otimes g(\cdot - z)), \quad g \in \mathbf{D}_{n+}^{n-},$$

где f_A^R – функция со свойствами, указанными в условии леммы П.4. Из леммы П.1 следует, что отображение $\mathbf{M}_{1A}^R$ непрерывно. Обозначим через P^R линейный оператор из $\mathbf{D}(\bar{S}_R)$ в $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$, переводящий g в $\hat{g}$. Пусть $Q^R: \mathbf{E}_{n+}^{n-} \rightarrow \mathbf{E}(S_R)$ – линейный оператор, ставящий в соответствие гладкой функции на $\mathbb{R}^n$ ее сужение на S_R . Определим линейное отображение $\mathbf{m}_{1A}^R: \mathbf{D}(\bar{S}_R) \rightarrow \mathbf{E}(S_R)$ как композицию: $\mathbf{m}_{1A}^R = Q^R \circ \mathbf{M}_{1A}^R \circ P^R$. Таким образом, $\mathbf{m}_{1A}^R$ переводит $g \in \mathbf{D}(\bar{S}_R)$ в сужение функции $z \rightarrow \mathbf{M}_2(z | f_A^R \otimes' \hat{g}(\cdot - z))$ на шар S_R . Так как все операторы P^R , Q^R и $\mathbf{M}_{1A}^R$ непрерывны, то отображение $\mathbf{m}_{1A}^R$ непрерывно. Если $R > 1$, $g \in \mathbf{D}(\bar{S}_R)$ и $\text{supp } h \subset S_R$, то из леммы П.4 вытекает, что

$$\int_{S_R}^L dz \mathbf{m}_{1A}^R(z | g) h(z) = \int dz du M_1(z | u) \hat{g}(u - z) \partial_A h(z).$$

Из этого равенства следует, что если $R' \geq R > 1$ и $g \in \mathbf{D}(\bar{S}_R)$, то $\mathbf{m}_{1A}^R(z | g)$ является сужением $\mathbf{m}_{1A}^{R'}(z | g)$ на S_R . Таким образом, отображения $\mathbf{m}_{1A}^R$ при разных R согласованны между собой и, следовательно, определяют искомое отображение $\mathbf{m}_{1A}: \mathbf{D}_{n+}^{n-} \rightarrow \mathbf{E}_{n+}^{n-}$.

Из формулы (П.2) следует

$$\begin{aligned} \int_{S_R}^L dz \partial_A \mathbf{m}_{1B}(z | g) h(z) &= -(-1)^{\varepsilon_B} \int dz du M_1(z | u) \hat{g}(u - z) \partial_A \partial_B h(z) = \\ &= (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B + \varepsilon_A + \varepsilon_B} \int_{S_R}^L dz \partial_B \mathbf{m}_{1A}(z | g) h(z). \end{aligned}$$

Это означает, что $\partial_A [(-1)^{\varepsilon_B} \mathbf{m}_{1B}(z | g)]$ и $(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \partial_B [(-1)^{\varepsilon_A} \mathbf{m}_{1A}(z | g)]$ совпадают как обобщенные функции, а следовательно, совпадают и поточечно. Поэтому в силу леммы П.3 существует такое непрерывное линейное отображение $\mathbf{m}_1: \mathbf{D}_{n+}^{n-} \rightarrow \mathbf{E}_{n+}^{n-}$, что $(-1)^{\varepsilon_A} \mathbf{m}_1(z | g) \overleftarrow{\partial}_A = \mathbf{m}_{1A}(z | g)$ для любого $g \in \mathbf{D}_{n+}^{n-}$. Положим $\widetilde{M}(z, u) = M_1(z | u + z)$. В силу (П.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_{S_R}^L dz (-1)^{\varepsilon_A} \mathbf{m}_1(z | g) \overleftarrow{\partial}_A h(z) &= \widetilde{M}(\partial_A h \otimes' \hat{g}) = \widetilde{M}(\partial_A h \otimes' g) - \\ &- (-1)^{\varepsilon(g)[\varepsilon_A + \varepsilon(h)]} \left[\mu^B(\partial_A h) \partial_B g(0) + \frac{1}{2} \mu^{BC}(\partial_A h) \partial_C \partial_B g(0) \right], \quad (\text{П.3}) \end{aligned}$$

где обобщенные функции $\mu^B, \mu^{BC} \in \mathbf{D}_{n+}^{m-}$ определяются соотношениями

$$\mu^B(h) = \int dz du \widetilde{M}(z, u) h(z) \psi(u) u^B, \quad \mu^{BC}(h) = \int dz du \widetilde{M}(z, u) h(z) \psi(u) u^B u^C.$$

Пусть $\tilde{m} \in \mathbf{D}_{2n+}^{2n-}$ – обобщенная функция двух переменных, соответствующая отображению $\mathbf{m}_1$, т.е. обобщенная функция, определяемая соотношением $\tilde{m}(h \otimes' g) = \int_{S_R}^L dz \mathbf{m}_1(z | g) h(z)$. В силу (П.3) имеем

$$\partial_A^z \tilde{m}(z, u) = -\partial_A^z \widetilde{M}(z, u) + \partial_A^z \mu^B(z) \partial_B \delta(u) + \partial_A^z \mu^{BC}(z) \partial_C \partial_B \delta(u).$$

Следовательно, существует такая обобщенная функция $a \in \mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}$, что

$$\widetilde{M}(z, u) = -\widetilde{m}(z, u) + \mu^B(z) \partial_B \delta(u) + \mu^{BC}(z) \partial_C \partial_B \delta(u) + a(u).$$

Пусть $m_1(z | u) = \widetilde{m}(z, u - z)$. Возвращаясь к исходным переменным, находим

$$M_1(z | u) = -m_1(z | u) + \mu^B(z) \partial_B \delta(u - z) + \mu^{BC}(z) \partial_C \partial_B \delta(u - z) + a(u - z).$$

В силу леммы П.2

$$\begin{aligned} m_1(h \otimes' g) &= \int dz du \widetilde{m}(z, u) g(u) h(z) = \int dz du \widetilde{m}(z, u) g(u + z) h(z) = \\ &= \int dz \mathbf{m}_1(z | g(\cdot + z)) h(z), \quad g, h \in \mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Для $g \in \mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}$ определим функцию $\widetilde{\mathbf{m}}(g)$ на $\mathbb{R}^n$ соотношением

$$\widetilde{\mathbf{m}}(g)(z) = \mathbf{m}_1(z | g(\cdot + z)).$$

В силу леммы П.1 (с измененным знаком в формулировке) $\widetilde{\mathbf{m}}$ является непрерывным отображением из $\mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}$ в $\mathbf{E}_{n+}^{\prime n-}$, а из (П.4) следует $m_1(h \otimes' g) = \int dz \widetilde{\mathbf{m}}(g)(z) h(z)$. Это означает, что $m_1(z, u)$ является гладкой по первому аргументу. Так как свертка обобщенной функции с пробной функцией является гладкой функцией, то обобщенная функция $a(u - z)$ является гладкой по z . Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА П.6. Пусть $M_1(z | u)$ – такая обобщенная функция, что $d_1^{\text{ad}} M_1$ является гладкой по первому аргументу. Тогда M_1 представима в виде

$$\begin{aligned} M_1(z | u) &= M_1'(z | u) + M_{1\text{loc}}(z | u), \\ M_{1\text{loc}}(z | u) &= \mu^B(z) \partial_B \delta(u - z) + \mu^{BC}(z) \partial_C \partial_B \delta(u - z), \end{aligned}$$

где $\mu^B, \mu^{B,C} \in \mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}$, а $M' \in \mathbf{D}_{2n+}^{\prime 2n-}$ является гладкой по первому аргументу.

Рассмотрим соотношение

$$M_2(z | f, g) - d_1^{\text{ad}} M_1'(z | f, g) = d_1^{\text{ad}} M_{1\text{loc}}(z | f, g).$$

Так как левая сторона этого соотношения является непрерывным отображением из $\mathbf{D}_{2n+}^{\prime 2n-}$ в $\mathbf{E}_{n+}^{\prime n-}$, форма $d_1^{\text{ad}} M_{1\text{loc}}(z | f, g)$ также является непрерывным отображением из $\mathbf{D}_{2n+}^{\prime 2n-}$ в $\mathbf{E}_{n+}^{\prime n-}$. Записывая явное выражение для $d_1^{\text{ad}} M_{1\text{loc}}(z | f, g)$ и рассматривая коэффициенты перед $\partial^k f \partial^p g$ (или, эквивалентно, выбирая f и g пропорциональными различным степеням переменной z), мы находим, что $\mu^B, \mu^{BC} \in \mathbf{E}_{n+}^{\prime n-}$.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА П.1. Пусть форма $M_2(z | f, g)$ – раздельно-непрерывное отображение из $\mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}$ в $\mathbf{E}_{n+}^{\prime n-}$ (является гладкой по z) и имеет место равенство

$$M_2(z | f, g) = d_1^{\text{ad}} M_1(z | f, g).$$

Тогда форма $M_1(z | f)$ – непрерывное отображение из $\mathbf{D}_{n+}^{\prime n-}$ в $\mathbf{E}_{n+}^{\prime n-}$ (является гладкой по z).

Благодарности. Настоящая работа поддержана РФФИ (гранты № 02-02-16944 (И. Тютин), № 02-02-17067 (С. Конштейн) и № 02-02-16946 (А. Смирнов)) и INTAS (гранты № 03-51-6346 (А. Смирнов) и № 00-00-262 (И. Тютин)), а также грантом LSS-1578.2003.2.

Список литературы

- [1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerovich, D. Sternheimer, *Ann. Phys.*, **111** (1978), 61; 111; М. В. Карасев, В. П. Маслов, *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*, Наука, М., 1991; В. Fedosov, *Deformation Quantization and Index Theory*, Akademie, Berlin, 1996; М. Kontsevich, *Lett. Math. Phys.*, **66**:3 (2003), 157; [q-alg/9709040](#).
- [2] Д. А. Лейтес, И. М. Щепочкина, *ТМФ*, **126**:3 (2001), 339.
- [3] И. В. Тютин, *ТМФ*, **128**:3 (2001), 515.
- [4] I. A. Batalin, I. V. Tyutin, General local solution to the Jacobi cyclic equation (unpublished).
- [5] С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин, *ТМФ*, **143**:2 (2005), 163; [hep-th/0312109](#).
- [6] М. Gerstenhaber, *Ann. Math.*, **79** (1964), 59; **99** (1974), 257.

Поступила в редакцию 12.12.2005