Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Горжини, Д. П. Санкович, Двусторонние оценки для внутренней энергии тепловых фотонов, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 1, 158–163

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:14:56

© 2003 г.

М. Горжини*, Д. П. Санкович†

ДУСТОРОНННЕ ОЦЕНКИ ДЛН ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ ТЕПЛОВЫХ ФОТОНОВ

Получены верхние и нижние оценки для термодинамических средних от операторов чисел заполнения в случае модельной нелинейной системы фотонов, находящихся в тепловом равновесии с термостатом. На основе найденных оценок построены двусторонние неравенства для внутренней энергии такой системы.

Ключевые слова: фотон, гнббсовское состояние, внутреннее произведение, числа заполнения, фоковское представление.

В данной работе изучаются равновесные термодинамические свойства системы фотонов, гамильтониан которой в представлении вторичного квантования записывается в виде суммы свободного гамильтониана и определенного нелинейного возмущения. Известно [1], что взаимодействие электромагнитных полей с вакуумом электронно-позитронного поля должно приводить к взаимодействию фотонов друг с другом. Такое взаимодействие описывается нелинейными уравнениями квантовой электродинамики. Соответственно плотность функции Лагранжа электромагнитного поля в этом случае не может быть квадратичной функцией полей. Различные модели нелинейных фотонов имеют важное применение в космологии [2] и квантовой оптике [3]. Отсутствие закона сохранения числа фотонов приводит к тому, что фотоны могут рождаться и поглощаться в процессе их взаимодействия с веществом. Данный механизм является важнейшим в процессе установления равновесия фотонного газа. В то же время он приводит к существенному отличию критических свойств фотонного газа от случая массивных бозонов, например отсутствует характерное для бозонных систем явление бозе-конденсации.

Однофотонный свободный гамильтониан равен квадратному корню оператора $D_\Delta = -\Delta$, где Δ – лапласиан. Оператор D_Δ определен в открытом подмножестве $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ объема $|\Lambda|$ с граничными условиями Дирихле, для которых он становится положительным самосопряженным оператором в пространстве $L^2(\Lambda)$. Любое локальное состояние тепловых фотонов, т.е. состояние, в котором частицы сосредоточены в ограниченной области, задается оператором плотности, определенным в фоковском пространстве вторичного квантования в терминах локального однофотонного гамильтониана. Исследо-

*Departamento de Matemáticas, Universidad de La Serena, La Serena, Chile.
E-mail: mcorgini@userena.cl

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: sankovch@mi.ras.ru

ванию термодинамических свойств этих локальных состояний в евклидовых пространствах и изучению соответствующей динамики с помощью алгебраических методов посвящены работы [4], [5].

Ниже рассматривается простая нелинейная модель фотонного газа и получены верхние и нижние оценки для внутренней энергии системы. Для этого мы используем разработанный ранее метод [6], основанный на неравенствах Фолька–Брука [7] и Репсторфа [8], с помощью которого строятся двусторонние оценки для средних чисел заполнения.

Локальный гамильтониан однофотонной системы, сосредоточенной в области Λ , определяется оператором

$$H_\Lambda = u(\sqrt{D_\Lambda}) + K \quad (1)$$

для некоторых положительных симметричного оператора K и функции u . Обозначим через $\beta > 0$ обратную температуру, а через $L^2(\Lambda, \mathbb{C}^3)$ – пространство квадратично интегрируемых по мере Лебега комплексных вектор-функций на Λ . Локальное гиббсовское состояние на алгебре Вейля $\mathcal{W}(L^2(\Lambda, \mathbb{C}^3))$ для фотонного поля задается как

$$\omega_\Lambda(A) = \frac{\text{tr}[e^{-\beta d\Gamma(u(\sqrt{D_\Lambda})+K)} \Pi_{\mathcal{F}}(A)]}{\text{tr} e^{-\beta d\Gamma(\sqrt{D_\Lambda}+K)}}$$

для всех $A \in \mathcal{W}(L^2(\Lambda, \mathbb{C}^3))$, где tr – оператор взятия следа в бозонном пространстве Фока $\mathcal{F}_+(L^2(\Lambda, \mathbb{C}^3))$, а $d\Gamma(B)$ – обозначение Сигала для вторичного квантования самосопряженного оператора B . Обозначим через $\omega_{0,\Lambda}$ локальное гиббсовское состояние для гамильтониана (1) с $K = 0$ (свободная система). Принадлежность оператора $e^{-\beta d\Gamma(H_\Lambda)}$ tr -классу следует из положительности K и того факта, что $e^{-\beta d\Gamma(u(\sqrt{D_\Lambda}))}$ является оператором tr -класса [4]. Алгебра Вейля $\mathcal{W}(L^2(\Lambda, \mathbb{C}^3))$ генерируется ненулевыми элементами $W(f)$, $f \in L^2(\Lambda, \mathbb{C}^3)$, удовлетворяющими стандартным соотношениям Вейля. Оператор $\Pi_{\mathcal{F}}$ определяется формулой $\Pi_{\mathcal{F}}(W(f)) = W_{\mathcal{F}}(f)$, где $W_{\mathcal{F}}(f)$ – оператор Фока–Вейля. В этом случае представление Фока соответствует представлению Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС) $(\Pi_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}_+(L^2(\Lambda, \mathbb{C}^3)), \Omega_{\mathcal{F}})$, где вектор $\Omega_{\mathcal{F}} = (1, 0, 0, \dots)$ отвечает так называемому фоковскому состоянию $\rho_{\mathcal{F}} = \langle \Omega_{\mathcal{F}}, W_{\mathcal{F}}(f) \Omega_{\mathcal{F}} \rangle = e^{-\|f\|^2/4}$ на алгебре $\mathcal{W}(L^2(\Lambda, \mathbb{C}^3))$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\|\cdot\|$ – соответственно внутреннее произведение и норма, определенные на пространстве $\mathcal{F}_+$.

Для каждой открытой и ограниченной области $\Lambda \in \mathbb{R}^3$ локальное состояние ω_Λ может быть продолжено на все полиномы от операторов рождения и уничтожения как для представления ГНС, так и для фоковского представления. Эти продолжения будут совпадать [9], в частности $\omega_\Lambda(a_\Lambda^\dagger(f)a_\Lambda(g)) = \omega_\Lambda(a_{\mathcal{F}}^\dagger(f)a_{\mathcal{F}}(g))$, где $a_\Lambda^\dagger(f)$, $a_\Lambda(g)$ и $a_{\mathcal{F}}^\dagger(f)$, $a_{\mathcal{F}}(g)$ – операторы рождения и уничтожения соответственно для представлений ГНС и Фока, а функции $f, g \in L^2(\Lambda, \mathbb{C}^3)$.

Пусть векторы $\{e_n^\Lambda: n \in N\}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L^2(\Lambda, \mathbb{C}^3)$ собственных векторов оператора $\sqrt{D_\Lambda}$ с собственными значениями E_n^Λ , т.е. $\sqrt{D_\Lambda}e_n^\Lambda = E_n^\Lambda e_n^\Lambda$. Тогда

$$u(\sqrt{D_\Lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty} u(E_n^\Lambda) P_{e_n^\Lambda},$$

где $P_{e_n^\Lambda}$ представляет собой проектор на вектор e_n^Λ . Оператор энергии, соответствующий свободной бозе-системе в представлении вторичного квантования, принимает в нашем случае вид

$$d\Gamma(u(\sqrt{D_\Lambda})) = \sum_{n=0}^{\infty} u(E_n^\Lambda) a_{\mathcal{F}}^\dagger(e_n^\Lambda) a_{\mathcal{F}}(e_n^\Lambda),$$

где ряд сходится в сильном резольвентном смысле. Будем предполагать, что фоковское представление локального оператора энергии (1) имеет вид

$$d\Gamma(u(\sqrt{D_\Lambda}) + K) = \sum_{n=0}^{\infty} u(E_n^\Lambda) a_{\mathcal{F}}^\dagger(e_n^\Lambda) a_{\mathcal{F}}(e_n^\Lambda) + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (a_{\mathcal{F}}^\dagger(e_n^\Lambda))^2 (a_{\mathcal{F}}(e_n^\Lambda))^2. \quad (2)$$

Такой вид локального гамильтониана, включающего ангармоническое возмущение свободного оператора энергии, представляет собой, с одной стороны, простейшее модельное взаимодействие фотонов и, с другой стороны, является исходным (так называемым затравочным) гамильтонианом при изучении стохастической динамики квантовых систем [10], [11].

Нас будет интересовать вычисление среднего значения $\omega_\Lambda(d\Gamma(u(\sqrt{D_\Lambda}) + K))$ внутренней энергии рассматриваемого локального гамильтониана.

Боголюбов ввел [12] внутреннее произведение

$$(A, B)_{d\Gamma(H_\Lambda)} = \int_0^1 \omega_\Lambda(A(x)B) dx,$$

где

$$A(x) = e^{\beta x d\Gamma(H_\Lambda)} A e^{-\beta x d\Gamma(H_\Lambda)},$$

для произвольных операторов A, B в фоковском представлении. Данное внутреннее произведение является положительной эрмитовой невырожденной формой.

Легко доказать следующее равенство:

$$\omega_\Lambda([A, B]) = ([A, \beta d\Gamma(H_\Lambda)], B)_{d\Gamma(H_\Lambda)}, \quad (3)$$

справедливое для любых операторов A, B . Положив в равенстве (3) $B = A^\dagger$ и заменив A на $a_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)$, найдем

$$1 = \beta u(E_m^\Lambda) (a_{\mathcal{F}}^\dagger(e_m^\Lambda), a_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))_{d\Gamma(H_\Lambda)} + 2\beta\gamma (a_{\mathcal{F}}^\dagger(e_m^\Lambda), n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda) a_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))_{d\Gamma(H_\Lambda)},$$

где $n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda) = a_{\mathcal{F}}^\dagger(e_m^\Lambda) a_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)$. Поскольку оператор чисел заполнения $n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)$ положителен, самосопряжен и коммутирует с оператором $d\Gamma(H_\Lambda)$, то

$$\begin{aligned} (a_{\mathcal{F}}^\dagger(e_m^\Lambda), n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda) a_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))_{d\Gamma(H_\Lambda)} &= \\ &= (a_{\mathcal{F}}^\dagger(e_m^\Lambda) (n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))^{1/2}, (n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))^{1/2} a_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))_{d\Gamma(H_\Lambda)} \geq 0. \end{aligned}$$

С учетом последнего неравенства находим

$$(a_{\mathcal{F}}^\dagger(e_m^\Lambda), a_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))_{d\Gamma(H_\Lambda)} \leq \frac{1}{\beta u(E_m^\Lambda)}. \quad (4)$$

Замечая, что

$$[(a_{\mathcal{F}}^{\dagger}(e_m^{\Lambda}))^2(a_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda}))^2, a_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda})] = -2a_{\mathcal{F}}^{\dagger}(e_m^{\Lambda})(a_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda}))^2,$$

легко получить следующее равенство:

$$\omega_{\Lambda}([a_{\mathcal{F}}^{\dagger}(e_m^{\Lambda}), [d\Gamma(H_{\Lambda}), a_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda})]]) = u(E_m^{\Lambda}) + 4\gamma\omega_{\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda})). \quad (5)$$

Чтобы найти оценку сверху для среднего $\omega_{\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda}))$, воспользуемся неравенством Фолька–Брука [7]

$$\omega_{\Lambda}(A^{\dagger}A + AA^{\dagger}) \leq \sqrt{c_0 b_0} \operatorname{cth} \sqrt{\frac{c_0}{4b_0}},$$

где $(A^{\dagger}, A)_{d\Gamma(H_{\Lambda})} \leq b_0$, $\omega_{\Lambda}([A^{\dagger}, [\beta d\Gamma(H_{\Lambda}), A]]) \leq c_0$. Используя оценки (4), (5), получаем для рассматриваемого нами случая

$$\begin{aligned} \omega_{\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda})) &\leq \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{u(E_m^{\Lambda}) + 4\gamma\omega_{\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda}))}{u(E_m^{\Lambda})}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{cth} \frac{\beta}{2} \sqrt{u(E_m^{\Lambda})[u(E_m^{\Lambda}) + 4\gamma\omega_{\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda}))]} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Из неравенства (6) непосредственно вытекает следующая

ЛЕММА 1. Для модельной системы (2) равномерно по β выполняется неравенство

$$\omega_{\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda})) \leq g_m \equiv g(u(E_m^{\Lambda}), \beta),$$

где функция g_m является корнем трансцендентного уравнения

$$g_m = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + 4\gamma \frac{g_m}{u(E_m^{\Lambda})} \operatorname{cth} \frac{\beta}{2} \sqrt{u(E_m^{\Lambda})[u(E_m^{\Lambda}) + 4\gamma g_m]} - 1} \right].$$

С помощью неравенства (6) можно получить явные оценки сверху для рассматриваемого среднего. В области больших $u(E_m^{\Lambda})$ удобно использовать оценку

$$\omega_{\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda})) \leq g^{(\infty)}(u(E_m^{\Lambda}), \beta), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} g^{(\infty)}(u(E_m^{\Lambda}), \beta) &= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\gamma}{u(E_m^{\Lambda})} \operatorname{cth}^2 \frac{\beta u(E_m^{\Lambda})}{2} - 1 \right)^2 + \operatorname{cth}^2 \frac{\beta u(E_m^{\Lambda})}{2} - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{u(E_m^{\Lambda})} \operatorname{cth}^2 \frac{\beta u(E_m^{\Lambda})}{2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Неравенство (7) следует из того, что функция $\operatorname{cth} x$ является монотонно убывающей функцией x . Поэтому неравенство (6) можно заменить на более слабое неравенство

$$\omega_{\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda})) \leq \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{u(E_m^{\Lambda}) + 4\gamma\omega_{\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^{\Lambda}))}{u(E_m^{\Lambda})} \operatorname{cth} \frac{\beta u(E_m^{\Lambda})}{2} - 1} \right],$$

из которого и получается оценка (7). В области малых $u(E_m^\Lambda)$ удобно воспользоваться неравенством $\text{cth } x < 1 + x^{-1}$. В этом случае будем иметь

$$\omega_\Lambda(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)) \leq g^{(0)}(u(E_m^\Lambda), \beta), \quad (8)$$

где

$$g^{(0)}(u(E_m^\Lambda), \beta) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{\gamma}{u(E_m^\Lambda)}\right)^2 + \frac{4\gamma}{\beta u^2(E_m^\Lambda)}} + \frac{2}{\beta u(E_m^\Lambda)} + \frac{\gamma}{u(E_m^\Lambda)} - 1 \right].$$

Очевидно, что $g_m \leq g^{(0)}(u(E_m^\Lambda), \beta)$ и $g_m \leq g^{(\infty)}(u(E_m^\Lambda), \beta)$.

ЛЕММА 2 [6]. Для рассматриваемой модельной системы (2) выполняется неравенство

$$\sum_{m=0}^{\infty} \omega_\Lambda(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda) - 1)) \leq \sum_{m=0}^{\infty} [\omega_{0,\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))]^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся неравенствами Боголюбова [13], выражающими факт выпуклости вверх функции свободной энергии,

$$\frac{1}{|\Lambda|} \omega_\Lambda(d\Gamma(K)) \leq f_\beta[d\Gamma(u(\sqrt{D_\Lambda}) + K)] - f_\beta[d\Gamma(u(\sqrt{D_\Lambda}))] \leq \frac{1}{|\Lambda|} \omega_{0,\Lambda}(d\Gamma(K)),$$

где

$$d\Gamma(K) = \gamma \sum_{n=0}^{\infty} (a_{\mathcal{F}}^\dagger(e_n^\Lambda))^2 (a_{\mathcal{F}}(e_n^\Lambda))^2 = \gamma \sum_{m=0}^{\infty} n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda) - 1),$$

а

$$f_\beta[d\Gamma(T)] = -\frac{1}{|\Lambda|} \ln \text{tr } e^{-\beta d\Gamma(T)}$$

представляет собой свободную энергию, отвечающую самосопряженному оператору T . Для свободного состояния имеем

$$\begin{aligned} \omega_{0,\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)) &= \frac{1}{e^{\beta u(E_m^\Lambda)} - 1}, \\ \omega_{0,\Lambda}((n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))^2) - [\omega_{0,\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))]^2 &= \omega_{0,\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)) + [\omega_{0,\Lambda}(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))]^2. \end{aligned}$$

Из неравенств Боголюбова и последних тождеств следует утверждение леммы.

Для получения оценки снизу среднего $\omega_\Lambda(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))$ воспользуемся неравенством Репсторфа [8]

$$\frac{1}{2} \omega_\Lambda(B^\dagger B + B B^\dagger) \geq \frac{1}{2} \omega_\Lambda([B, B^\dagger]) \text{cth} \left(\frac{\beta \omega_\Lambda([C^\dagger, [d\Gamma(H_\Lambda), C]]) \omega_\Lambda([B, B^\dagger])}{2 |\omega_\Lambda([B, C^\dagger])|^2} \right),$$

где B, C — произвольные операторы.

ЛЕММА 3. Для модельной системы (2) выполняется равномерно по β следующая оценка снизу для среднего числа заполнения:

$$\omega_\Lambda(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)) \geq (e^{\beta(u(E_m^\Lambda) + 4\gamma g(u(E_m^\Lambda), \beta))} - 1)^{-1} \equiv h(u(E_m^\Lambda), \beta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из неравенства Репсторфа, в котором операторы B и $C^\dagger$ заменяются на $a_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)$, и оценки сверху для среднего $\omega_\Lambda(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))$, вытекающей из леммы 1.

Внутренняя энергия единицы объема определяется формулой

$$\frac{1}{|\Lambda|} \omega_\Lambda(d\Gamma(H_\Lambda)) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{m=0}^{\infty} u(E_m^\Lambda) \omega_\Lambda(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)) + \gamma \omega_\Lambda(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda)) (n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda) - 1).$$

ТЕОРЕМА. Для модельной системы (2) имеют место следующие оценки для внутренней энергии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Lambda|} \omega_\Lambda(d\Gamma(H_\Lambda)) &\leq \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{m=0}^{\infty} u(E_m^\Lambda) g(u(E_m^\Lambda), \beta) + 2\gamma [e^{\beta u(E_m^\Lambda)} - 1]^{-2}, \\ \frac{1}{|\Lambda|} \omega_\Lambda(d\Gamma(H_\Lambda)) &\geq \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{m=0}^{\infty} u(E_m^\Lambda) h(u(E_m^\Lambda), \beta) + \gamma [(h(u(E_m^\Lambda), \beta))^2 - g(u(E_m^\Lambda), \beta)]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху для внутренней энергии следует из лемм 1 и 2, а оценка снизу — из лемм 1 и 3 и очевидного неравенства $\omega_\Lambda(n_{\mathcal{F}}^2(e_m^\Lambda)) \geq \omega_\Lambda^2(n_{\mathcal{F}}(e_m^\Lambda))$.

В термодинамическом пределе следует заменить ряды в полученных неравенствах соответствующими интегралами, которые могут быть вычислены с использованием известной функции распределения фотонов. При этом функция $u(E_m^\Lambda) \mapsto ck$, где k — модуль волнового вектора фотона, c — скорость света в вакууме. Из оценок (7) и (8) следует, что рассматриваемые интегралы будут сходиться.

Благодарности. Работа поддержана Cátedra Presidencial en Análisis Cualitativo de Sistemas Dinámicos Cuánticos (Chile) и РФФИ (проект № 02-01-00795).

Список литературы

- [1] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.
- [2] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. Строение и эволюция Вселенной. М.: Наука, 1975.
- [3] Г. М. Заславский. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
- [4] J. Hertle, R. Honneger. J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 143.
- [5] J. Hertle, R. Honneger. J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 343.
- [6] M. Corgini, D. P. Sankovich. Int. J. Mod. Phys. B. 2002. V. 16. № 3. P. 497.
- [7] H. Falk, J. W. Bruck. Phys. Rev. 1969. V. 180. № 1. P. 442.
- [8] G. Roepstorff. Commun. Math. Phys. 1977. V. 53. P. 143.
- [9] O. Brattelli, D. W. Robinson. Operators Algebras and Quantum Statistical Mechanics. V. II. New York: Springer, 1981.
- [10] Г. П. Берман, Г. М. Заславский, А. Р. Коловский. ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 506.
- [11] G. Bergman, N. Bulgakov, D. Holm. Crossover-Time in Quantum Boson and Spin Systems. Lect. Notes in Phys. V. m21. Berlin: Springer, 1994.
- [12] N. N. Bogolubov. Phys. Abh. Sow. 1962. V. 1. P. 113.
- [13] N. N. Bogolubov (Jr.). Physica. 1966. V. 32. P. 933.

Поступила в редакцию 26.IX.2002 г.