Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Демской, В. Г. Марихин, А. Г. Мешков, Представления Лакса для триплетов двумерных скалярных полей кирального типа, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 2, 189–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2080>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 12:49:05

© 2006 г. Д. К. Демской*, В. Г. Марихин†, А. Г. Мешков*

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛАКСА ДЛЯ ТРИПЛЕТОВ ДВУМЕРНЫХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ КИРАЛЬНОГО ТИПА

Рассмотрены двумерные релятивистски-инвариантные системы с трехмерным приводимым конфигурационным пространством и лагранжианом кирального типа, допускающие высшие полиномиальные по производным симметрии не выше пятого порядка. Таких систем известно девять; две из них являются системами лиувиллевого типа, еще для двух найдены представления нулевой кривизны в предыдущих работах. В данной работе приведены представления нулевой кривизны для оставшихся пяти систем. Показано, как можно вывести бесконечные серии законов сохранения из найденных представлений нулевой кривизны. Приведены простейшие из высших симметрий, другие могут быть построены из сохраняющихся плотностей при помощи гамильтонова оператора. Найдены формулировки спектральных задач в скалярной форме.

Ключевые слова: представления нулевой кривизны, высшие симметрии, законы сохранения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена построению представлений нулевой кривизны для лагранжевых релятивистски-инвариантных двумерных систем с лагранжианом вида

$$L = \frac{1}{2}(u_t u_x + \psi(v, w)(v_t w_x + v_x w_t)) + f(u, v, w), \quad (1)$$

где $\psi = (vw + c)^{-1}$, $c \neq 0$, а f принадлежит к следующему списку:

$$f = ave^{\sqrt{2}u} + bwe^{-\sqrt{2}u}, \quad (2a)$$

$$f = av^2 e^{2u} + bw^2 e^{-2u}, \quad (2b)$$

$$f = aw^2 e^{2u} + bve^{-u}, \quad (2c)$$

*Орловский государственный университет, Орел, Россия. E-mail: demskoy@iname.com, meshkov@orel.ru

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: mvg@itp.ac.ru

$$f = ave^u + bwe^{-u}, \quad (2d)$$

$$f = \left(vw + \frac{c}{2}\right)[ae^{\sqrt{2}u} + be^{-\sqrt{2}u}], \quad (2e)$$

$$f = a\left(vw + \frac{c}{2}\right)e^{\sqrt{2}u} + be^{-\sqrt{2}u}, \quad (2f)$$

$$f = a\left(vw + \frac{c}{2}\right)e^{\sqrt{2}u} + be^{-2\sqrt{2}u}. \quad (2g)$$

Здесь u, v, w – функции от t и x , a, b и c – произвольные постоянные. Этот список исчерпывает лагранжевы системы с лагранжианом (1), обладающие высшими полиномиальными по производным симметриями не выше третьего порядка (подробности см. в работах [1], [2]). Для систем (2a) и (2d) представления нулевой кривизны были найдены в работах [2], [3], поэтому здесь мы приводим для этих систем только скалярный L -оператор Лакса.

Скалярные поля с лагранжианом (1) принадлежат к классу полей кирального типа с трехмерным приводимым римановым конфигурационным пространством. В работах [2], [3] цитировались статьи, посвященные изучению подобных систем, и были перечислены задачи, приводящие к таким системам, поэтому здесь мы на этом не останавливаемся. Отметим лишь недавнюю работу [4], в которой проведено исследование интегрируемости векторных гиперболических систем и найдены новые интегрируемые системы вида $\mathbf{u}_{xt} = f_1\mathbf{u} + f_2\mathbf{u}_x + f_3\mathbf{u}_t$, где f_i – скалярные функции от всех скалярных произведений векторов $\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_t$.

Уравнения Эйлера–Лагранжа для лагранжиана (1) записываются в следующем виде:

$$u_{xt} = f_u, \quad v_{xt} = \psi w v_x v_t + \psi^{-1} f_w, \quad w_{xt} = \psi v w_x w_t + \psi^{-1} f_v, \quad (3)$$

где нижними индексами обозначены производные, $f_u = \partial f / \partial u$ и т.д. Если $f_{uv} = f_{uw} = 0$, то система (3) распадается на независимые подсистемы. Поэтому мы считаем, что в выражениях (2a)–(2e) хотя бы одна из постоянных a или b должна быть ненулевой, а в (2f) и (2g) – $a \neq 0$.

Кроме того, если одна из постоянных a или b в выражениях (2a)–(2e) равна нулю, то соответствующие системы (3) будут системами типа Лиувилля. Это означает, что характеристическое уравнение $D_t \omega = 0$ для этих систем имеет три нетривиальных функционально независимых интеграла. Эти интегралы указаны в работе [5].

Отметим, что полевые функции u, v и w могут быть как вещественными, так и комплексными. Кроме того, при помощи масштабного преобразования $u \rightarrow u + \mu$, $v \rightarrow \alpha v$, $w \rightarrow \alpha^{-1} w$ можно получить $a = \pm 1$ и $b = \pm 1$, если эти постоянные ненулевые.

Нам не известны работы других авторов, в которых изучались бы интегрируемые системы с лагранжианом (1).

В разделе 2 рассмотрены обобщенные симметрии систем (3), указаны переменные, в которых все симметрии полиномиальны, и приведены симметрии второго и третьего порядков для всех систем в этих переменных.

В разделе 3 приводятся гамильтонов оператор и гамильтонианы эволюционных систем, являющихся симметриями гиперболических.

В разделе 4 даны представления нулевой кривизны для рассматриваемых систем и указано, как можно вывести рекуррентные соотношения для законов сохранения. Также приведены скалярные L -операторы, входящие в (L, A) -пару.

2. ОБОБЩЕННЫЕ СИММЕТРИИ

Очевидно, что векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} - t \frac{\partial}{\partial t} \quad (4)$$

являются инфинитезимальными операторами однопараметрических групп симметрии системы (3). А именно, X_1 и X_2 – операторы групп трансляций $x' = x + a$ и $t' = t + a$, а X_3 – оператор группы масштабных преобразований $x' = xe^a$, $t' = te^{-a}$. В переменных $x^0 = x + t$, $x^1 = x - t$ масштабное преобразование принимает вид преобразования Лоренца. Хорошо известно (см. например, [6]), что эти три симметрии – нётеровы, т.е. при инфинитезимальных преобразованиях полей, соответствующих этим симметриям, приращение лагранжиана является дивергенцией некоторого векторного поля. Система (3) с функцией f из списка (2a)–(2g) обладает еще одной нётеровой симметрией

$$u' = u + k\alpha, \quad v' = ve^\alpha, \quad w' = we^{-\alpha}, \quad (5)$$

где α – групповой параметр, а k – постоянная, различная для разных систем:

$$k_a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k_b = k_d = -1, \quad k_c = 1, \quad k_e = k_f = k_g = 0. \quad (6)$$

Здесь буквенный индекс указывает на систему, для которой записано значение параметра k . Для доказательства обозначим $\delta u^i = \varepsilon \varphi^i$, $\varphi^i = \{k, v, -w\}$, и вычислим приращение лагранжиана:

$$L(u + \delta u) - L(u) = \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial u^i} \varphi^i + \frac{\partial L}{\partial u_x^i} \partial_x \varphi^i + \frac{\partial L}{\partial u_t^i} \partial_t \varphi^i \right) + o(\varepsilon).$$

Подставляя в это равенство лагранжиан (1), нетрудно проверить, что линейная часть приращения имеет вид

$$\delta L = \varepsilon(kf_u + vf_v - wf_w),$$

а остальные слагаемые уничтожаются. Простые вычисления показывают, что $\delta L = 0$ для каждой функции f из списка (2a)–(2g) при соответствующем значении постоянной k .

Симметрии (5) соответствует следующий закон сохранения:

$$D_t \psi v w_x = D_x (\psi v_t w - k u_t), \quad (7)$$

что нетрудно проверить с учетом равенства $kf_u + vf_v - wf_w = 0$.

Рассматривая высшие симметрии систем (3) как эволюционные системы, мы обнаружили, что все они унаследовали симметрию (5). Поэтому все эти эволюционные

системы обладают сохраняющейся плотностью $\rho = \psi v w_x$. Если перейти к переменным (u, m, n) :

$$m = D_x^{-1} \psi v w_x, \quad n = \ln v, \quad (8)$$

то многие дальнейшие формулы упрощаются. Кроме того, всюду далее в формулах для систем (2а), (2е)–(2г) выполнена подстановка $u \rightarrow \sqrt{2}u$.

Простейшие из высших симметрий для систем (2а)–(2г) в переменных (8) принимают полиномиальный вид (соответствие систем и их симметрий определяется по буквам в номерах формул, например, системе (2а) соответствуют симметрии (9а) и (9а₁); гамильтонианы систем и общий для всех систем гамильтонов оператор приведены в следующем разделе):

$$\begin{aligned} u_t &= m_x n_x, & m_t &= -m_{xx} - m_x^2 + 2m_x n_x + 2m_x u_x, \\ n_t &= n_{xx} + n_x^2 + 2u_x n_x - 2n_x m_x; \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{4} u_{xxx} + \frac{3}{4} (m_x n_{xx} - n_x m_{xx}) + \frac{3}{2} (n_x^2 m_x - m_x^2 n_x) + \frac{3}{2} u_x n_x m_x - \frac{1}{2} u_x^3, \\ m_t &= m_{xxx} - 3m_{xx}(u_x + n_x - m_x) - \frac{3}{2} u_{xx} m_x - 3u_x m_x^2 - \frac{9}{2} m_x^2 n_x + \frac{3}{2} u_x^2 m_x + \\ &\quad + 6u_x n_x m_x + 3n_x^2 m_x + m_x^3, \\ n_t &= n_{xxx} + 3n_{xx}(u_x + n_x - m_x) + \frac{3}{2} u_{xx} n_x + 3u_x n_x^2 - \frac{9}{2} n_x^2 m_x + \frac{3}{2} n_x u_x^2 - \\ &\quad - 6u_x n_x m_x + 3m_x^2 n_x + n_x^3; \end{aligned} \quad (9a_1)$$

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{4} u_{xxx} + \frac{3}{2} (m_x n_{xx} - n_x m_{xx}) + 3n_x^2 m_x - 3m_x^2 n_x + 3u_x n_x m_x - \frac{1}{2} u_x^3, \\ m_t &= m_{xxx} - 3m_{xx}(u_x + n_x - m_x) - \frac{3}{2} m_x u_{xx} - 3u_x m_x^2 + \frac{3}{2} u_x^2 m_x + 6u_x n_x m_x - \\ &\quad - 6m_x^2 n_x + 3n_x^2 m_x + m_x^3, \\ n_t &= n_{xxx} + 3n_{xx}(u_x + n_x - m_x) + \frac{3}{2} u_{xx} n_x + 3u_x n_x^2 - 6n_x^2 m_x + \frac{3}{2} n_x u_x^2 - \\ &\quad - 6u_x n_x m_x + 3m_x^2 n_x + n_x^3; \end{aligned} \quad (9b)$$

$$\begin{aligned} u_t &= 2m_{xx} n_x - m_x n_{xx} + m_x n_x (4u_x + 3m_x - 3n_x), \\ m_t &= m_{xxx} + u_{xx} m_x - 3m_{xx}(n_x - m_x - u_x) + 3m_x n_x (n_x - 2u_x) - \\ &\quad - m_x^2 (5n_x - 3u_x) + m_x (m_x^2 + 2u_x^2), \\ n_t &= n_{xxx} - 2u_{xx} n_x + 3n_{xx}(n_x - m_x - u_x) + 3m_x n_x (m_x + 2u_x) - \\ &\quad - n_x^2 (5m_x + 3u_x) + n_x (n_x^2 + 2u_x^2); \end{aligned} \quad (9c)$$

$$\begin{aligned}
 u_t &= -\frac{1}{2}u_{xxx} + 3n_x^2 m_x + \frac{3}{2}m_x n_{xx} - \frac{3}{2}n_x m_{xx} - 3m_x^2 n_x + \frac{1}{4}u_x^3 + \frac{9}{2}u_x n_x m_x, \\
 m_t &= m_{xxx} - 3m_{xx}(n_x + u_x - m_x) - \frac{3}{2}m_x u_{xx} + \frac{9}{4}u_x^2 m_x - \frac{9}{2}m_x^2 n_x - 3u_x m_x^2 + \\
 &\quad + 6u_x n_x m_x + 3n_x^2 m_x + m_x^3, \\
 n_t &= n_{xxx} + 3n_{xx}(n_x + u_x - m_x) + \frac{3}{2}u_{xx} n_x + \frac{9}{4}u_x^2 n_x - \frac{9}{2}n_x^2 m_x + 3u_x n_x^2 - \\
 &\quad - 6u_x n_x m_x + 3m_x^2 n_x + n_x^3,
 \end{aligned} \tag{9d}$$

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xxx} - 2u_x^3 - 6u_x n_x m_x, \\
 m_t &= m_{xxx} + 3m_{xx}(m_x - n_x) - 6m_x^2 n_x - 6u_x^2 m_x + 3n_x^2 m_x + m_x^3; \\
 n_t &= n_{xxx} - 3n_{xx}(m_x - n_x) - 6n_x^2 m_x - 6u_x^2 n_x + 3m_x^2 n_x + n_x^3;
 \end{aligned} \tag{9e}$$

$$\begin{aligned}
 u_t &= -\frac{1}{2}u_{xxx} + \frac{3}{2}(m_x n_x)_x - 3u_x n_x m_x + u_x^3, \\
 m_t &= m_{xxx} + 3m_{xx}(m_x - n_x) - 3u_{xx} m_x - 3u_x^2 m_x - 3m_x^2 n_x + 3n_x^2 m_x + m_x^3, \\
 n_t &= n_{xxx} - 3n_{xx}(m_x - n_x) - 3u_{xx} n_x - 3u_x^2 n_x - 3n_x^2 m_x + 3m_x^2 n_x + n_x^3;
 \end{aligned} \tag{9f}$$

$$\begin{aligned}
 u_t &= m_x n_{xx} + n_x m_{xx} - 4u_x n_x m_x, \\
 m_t &= m_{xxx} + 3m_{xx}(m_x - n_x) - 2m_x u_{xx} - 4u_x^2 m_x - 4m_x^2 n_x + 3n_x^2 m_x + m_x^3, \\
 n_t &= n_{xxx} - 3n_{xx}(m_x - n_x) - 2u_{xx} n_x - 4u_x^2 n_x - 4n_x^2 m_x + 3m_x^2 n_x + n_x^3.
 \end{aligned} \tag{9g}$$

Все эти эволюционные системы являются точно интегрируемыми и могут представлять самостоятельный интерес. М.В. Павлов обратил наше внимание на то, что система (9а) связана с известной системой Яджимы–Оикавы [7] посредством цепочки дифференциальных подстановок (см. [5]).

3. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА

Система (3) имеет гамильтонову форму при любых ψ и f . Ее гамильтонов оператор был указан в работе [2]. Здесь мы запишем его несколько иначе:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} D_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi^{-1} e^{-m} D_x^{-1} e^m \\ 0 & e^m D_x^{-1} e^{-m} \psi^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $m = D_x^{-1} \psi v w_x$ – введенная выше переменная.

Это позволяет записать систему (3) в явной гамильтоновой форме:

$$u_t = D_x^{-1} \frac{\delta f}{\delta u}, \quad v_t = \psi^{-1} e^{-m} D_x^{-1} e^m \frac{\delta f}{\delta w}, \quad w_t = e^m D_x^{-1} e^{-m} \psi^{-1} \frac{\delta f}{\delta v}. \tag{11}$$

Если же заменить здесь f на одну из сохраняющихся плотностей H системы (3), то мы получим эволюционную гамильтонову систему, возможно, нелокальную. В

частности, системы (9a)–(9g) гамильтоновы, их гамильтонианы приведены ниже, а гамильтонов оператор получается из оператора (10) по формуле

$$\bar{\Gamma}(\bar{u}) = S(u)\Gamma(u)S^+(u), \quad (12)$$

где $S(u)$ – “якобиан” замены переменных, “+” – знак формального сопряжения. Точнее говоря, если независимые переменные (x) не преобразуются, а зависимые (u) преобразуются по формуле $\bar{u}^\alpha = \Phi^\alpha(x, u)$, где Φ – дифференцируемое по Фреше отображение, то оператор преобразования S имеет следующий вид:

$$S(u) = \Phi'(u), \quad (13)$$

где штрих означает частную производную Фреше по u (см. например, [8]; более общий случай рассмотрен в работе [9]).

В случае преобразования переменных (8) введем упорядочение по правилу $u^i = (u, v, w)$, $\bar{u}^i = (u, m, n)$; тогда

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cD_x^{-1}\psi e^{-n}m_x & D_x^{-1}\psi e^{m+n}e^{-m} \\ 0 & v^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразование интегрального оператора Γ довольно утомительно, поэтому мы нашли обратный к S оператор

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v \\ 0 & e^m D_x^{-1} e^{-m-n} \psi^{-1} D_x & -c e^m D_x^{-1} e^{-m-n} m_x \end{pmatrix},$$

а затем $\bar{\Gamma}^{-1} = (S^+)^{-1}\Gamma^{-1}S^{-1} = (S^{-1})^+\Gamma^{-1}S^{-1}$ и $\bar{\Gamma}$:

$$\bar{\Gamma} = \bar{J}^{-1} = A D_x^{-1}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Масштабное преобразование $u \rightarrow \sqrt{2}u$ в случаях (a), (e)–(g) изменяет один матричный элемент: $A_{11} = 1/2$.

В заключение этого раздела приведем гамильтонианы эволюционных систем (9a)–(9g):

$$\begin{aligned} H_a &= m_2 n_1 - m_1 n_1 (2u_1 - m_1 + n_1), \\ H_{a_1} &= m_2 n_2 + \frac{1}{4}u_2^2 + \frac{3}{2}m_2 n_1 (n_1 + u_1) + \frac{3}{2}m_1 n_2 (m_1 - u_1) - \frac{3}{2}m_1 n_1 u_1^2 + \\ &\quad + 3u_1 m_1 n_1 (m_1 - n_1) - n_1 m_1 (m_1^2 + n_1^2) + \frac{9}{4}m_1^2 n_1^2 + \frac{1}{4}u_1^4, \\ H_b &= n_2 m_2 + \frac{1}{8}u_2^2 + \frac{3}{2}n_1 m_2 (n_1 + u_1) + \frac{3}{2}m_1 n_2 (m_1 - u_1) - \frac{3}{2}u_1^2 n_1 m_1 + \\ &\quad + 3u_1 n_1 m_1 (m_1 - n_1) - n_1 m_1 (m_1^2 - 3n_1 m_1 + n_1^2) + \frac{1}{8}u_1^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_c &= m_2 n_2 + n_2 m_1 (u_1 - 3n_1) - m_2 n_1 (3m_1 + 2u_1) + \\
 &\quad + n_1 u_1 m_1 (3n_1 - 3m_1 - 2u_1) - \frac{1}{2} m_1 n_1 (2n_1 - m_1) (n_1 - 2m_1), \\
 H_d &= n_2 m_2 - \frac{1}{4} u_2^2 + \frac{3}{2} m_2 n_1 (n_1 + u_1) + \frac{3}{2} n_2 m_1 (m_1 - u_1) - \frac{1}{16} u_1^4 - \\
 &\quad - \frac{9}{4} u_1^2 n_1 m_1 + 3u_1 m_1 n_1 (m_1 - n_1) - \frac{1}{4} m_1 n_1 (4m_1^2 + 4n_1^2 - 9m_1 n_1), \\
 H_e &= n_2 m_2 + u_2^2 - \frac{3}{2} m_2 n_1 (2m_1 - n_1) - n_1 m_1 (m_1^2 + n_1^2) + 3m_1 n_1 (n_1 m_1 + 2u_1^2) + u_1^4, \\
 H_f &= n_2 m_2 - \frac{1}{2} u_2^2 - \frac{3}{2} m_2 n_1 (2m_1 - n_1) + 3u_2 n_1 m_1 - m_1^3 n_1 - m_1 n_1^3 - \\
 &\quad - \frac{1}{2} u_1^4 + 3u_1^2 n_1 m_1 + \frac{3}{2} m_1^2 n_1^2, \\
 H_g &= n_2 m_2 - \frac{3}{2} m_2 n_1 (2m_1 - n_1) + 2u_2 n_1 m_1 + 2m_1^2 n_1^2 - m_1^3 n_1 - m_1 n_1^3 + 4u_1^2 n_1 m_1.
 \end{aligned}$$

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В этом разделе мы приводим пары матриц U и V , с помощью которых каждую из систем (3) с функцией f из списка (2b)–(2g) можно записать в виде

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \quad (15)$$

где $[,]$ – коммутатор матриц. Такое представление нелинейных систем называется представлением нулевой кривизны. Предполагается, что матрицы U, V зависят от полевых переменных, их производных и некоторого параметра λ . Наличие параметра в матрицах U и V необходимо для решения прямой и обратной задач рассеяния для линейной системы

$$\Psi_x = U\Psi, \quad \Psi_t = V\Psi, \quad (16)$$

поэтому зависимость матриц U и V от λ должна быть существенной. Это означает, в частности, что параметр не может быть устранен никаким калибровочным преобразованием

$$U \rightarrow \tilde{U} = S^{-1}US - S^{-1}S_x, \quad V \rightarrow \tilde{V} = S^{-1}VS - S^{-1}S_t, \quad (17)$$

где S – произвольная невырожденная матрица.

Во многих случаях удобно перейти от матричной системы (16) к скалярной задаче

$$L\Phi = 0, \quad \Phi_t = A\Phi, \quad (18)$$

где L, A – линейные дифференциальные операторы, зависящие от полевых переменных и спектрального параметра, причем $\text{ord } A < \text{ord } L$. Чтобы получить скалярные уравнения (18), достаточно из системы $\Psi_x = U\Psi$, $\Psi^T = (\Psi_1, \dots, \Psi_m)$ исключить $m - 1$ функцию, скажем, $\Psi_2, \dots, \Psi_m$. Это даст нам скалярное уравнение m -го порядка $M\Psi_1 = 0$. Затем, заменив $\Psi_2, \dots, \Psi_m$ их выражениями через Ψ_1 в уравнении $\Psi_{1,t} = \sum_1^m V_{1k}\Psi_k$, мы получим временное уравнение $\Psi_{1,t} = N\Psi_1$, причем

$\text{ord } N < m$. В полученной таким путем системе можно произвести калибровочное преобразование $\Psi_1 = F(u, v, w, \lambda)\Phi$ для упрощения операторов M, N . Это приводит к системе (18), где $L = F^{-1}MF$, $A = F^{-1}NF$. Обратное преобразование к системе (16) можно выполнить при помощи стандартной подстановки $\Phi = \psi_1$, $D_x\Phi = \psi_2, \dots, D_x^{m-1}\Phi = \psi_m$. Это даст матрицу U специального вида, зависящую от сложных дифференциальных выражений. Для упрощения матриц U и V можно произвести калибровочное преобразование (17).

Во всех случаях наряду с матрицами U, V мы приводим и скалярный оператор L , который полезен для изучения спектральной задачи.

Для отыскания U и V мы применяли слегка модифицированный метод Уолквиста-Эстабрука. В оригинальных работах [10] была поставлена задача о построении переопределенной векторной системы уравнений первого порядка

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{f}(t, x, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_t, \dots), \quad \mathbf{y}_x = \mathbf{g}(t, x, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_t, \dots),$$

которая должна быть совместной при условии, что вектор-функция $\mathbf{u}(t, x)$ удовлетворяет некоторому нелинейному дифференциальному уравнению. Компоненты y^i вектора $\mathbf{y}$ называются псевдопотенциалами. Если y – скаляр, то он называется простым псевдопотенциалом. В частности, когда уравнения для $\mathbf{y}$ линейны и однородны, псевдопотенциалы называются линейными (см. например, [11]). Очевидно, что уравнения для линейных псевдопотенциалов совпадают по форме с (16).

Если система, которой удовлетворяет $\mathbf{u}$, задана, то матрицы U и V можно искать при помощи самих уравнений (16). Эта задача решается достаточно легко для эволюционных систем $\mathbf{u}_t = K(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \dots)$. Действительно, после подстановки $\mathbf{u}_t$ в (16) эти уравнения расщепляются по переменным $\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \dots$, и решение записывается в виде

$$U = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \dots) A_i, \quad V = \sum_{i=1}^m g_i(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \dots) B_i,$$

где A_i, B_j – матричные константы интегрирования, удовлетворяющие некоторой системе коммутационных соотношений:

$$[A_i, B_j] = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k A_k + \sum_{k=1}^m b_{ij}^k B_k.$$

Следующим шагом является вложение матриц A_i, B_j в некоторую алгебру Ли, т.е. построение полной таблицы коммутаторов. Построив затем представление этой алгебры Ли, мы получаем U и V в явном виде.

Для гиперболических систем отыскание формы матриц U и V является значительно более сложной задачей (см. [2]). Для упрощения этой задачи мы предположили, что рассматриваемые гиперболические системы (11) являются нелокальными элементами в иерархиях интегрируемых эволюционных систем, которые начинаются с систем (9a)–(9g) (впоследствии это оправдалось). Так как матрица U является, как известно, одной и той же для всех членов иерархии, то мы действовали следующим образом. Сначала вычислялись матрицы U и V для одной из эволюционных

систем (9a)–(9g), а затем по матрице U вычислялась матрица V для соответствующей гиперболической системы.

Для замыкания таблицы коммутаторов использовался следующий прием. Первый шаг состоит в априорном выборе базиса алгебры из N элементов A_i, B_j . Затем в таблицу коммутаторов дописываются недостающие коммутационные соотношения с неопределенными коэффициентами c_i в качестве структурных констант. Следующий шаг заключается в построении присоединенного представления. Матрицы присоединенного представления удовлетворяют, как известно, тем же коммутационным соотношениям, что и элементы алгебры Ли. Поэтому подстановка матрицы присоединенного представления в коммутационные соотношения приводит к системе уравнений S для неопределенных коэффициентов c_i . Степени этих уравнений не выше двух, и они довольно легко решаются. Возможны три случая: а) система S противоречива; б) система S не противоречива, а структурные константы не зависят от параметра; в) система S не противоречива, а структурные константы существенно зависят от параметра. В случае “в” можно приступить к построению представления алгебры с минимальной матричной размерностью. В случаях “а” или “б” возвращаемся к первому шагу и увеличиваем N на единицу (или даже на несколько единиц), объявляя какой-нибудь неизвестный коммутатор новым базисным элементом алгебры, и повторяем процесс.

Через конечное число шагов мы пришли к результату “в” во всех случаях. Однако, как правило, мы получали алгебры, имеющие центр Z . Фактор-алгебры по Z оказались во всех случаях простыми алгебрами. Построив базисы Картана–Вейля в простых алгебрах, мы нашли представления низшей размерности для этих алгебр. Разумеется, чтобы применять описанную процедуру, надо быть заранее уверенным в том, что решение существует.

Вероятно, система (16) не должна интегрироваться в квадратурах, иначе задача рассеяния для такой системы бессодержательна. Если эта гипотеза верна, то матрицы U и V не должны вкладываться в разрешимую или нильпотентную алгебры Ли. По-видимому, не существует общепринятого ясного критерия нетривиальности представления нулевой кривизны. В предыдущих работах мы применяли в качестве такого критерия возможность получения бесконечного множества локальных законов сохранения нелинейной системы из системы (16). Этому критерию удовлетворяют все приводимые ниже матрицы U, V за исключением случая (2e): применив предложенный в работе [12] метод к случаю (2e), мы смогли найти только нелокальные сохраняющиеся плотности. Но прямой расчет показал, что система (2e) имеет высшие локальные сохраняющиеся плотности, например гамильтониан H_e .

Один из возможных выходов из этого затруднения мы видим в том, чтобы получить скалярную систему (18) из матричной (16) и исследовать оператор L . Если никаким калибровочным преобразованием $D_x \rightarrow D_x + f(x, \lambda)$ нельзя устранить параметр λ из оператора L , то этот оператор следует признать, по нашему мнению, нетривиальным. Если L -оператор нетривиален, то и представление нулевой кривизны, очевидно, надо считать нетривиальным. Из вида всех приводимых ни-

же L -операторов очевидно, что никаким калибровочным преобразованием нельзя устранить из них параметр λ .

Так как законы сохранения играют важную роль в математической физике, то мы укажем, как вывести законы сохранения из представления нулевой кривизны. Наиболее простой способ из всех нам известных был предложен в работе [12], где используется аппарат внешних форм. Однако при ближайшем рассмотрении оказалось, что этот способ эквивалентен методу, предложенному в работе [13] (см. также [14]). Этот метод можно описать в нескольких словах: 1) выполняем калибровочное преобразование $\Psi \rightarrow \Psi e^{D_x^{-1}\rho}$ в системе (16) и обозначаем $D_t D_x^{-1}\rho = \theta$, что влечет

$$D_t \rho = D_x \theta; \quad (19)$$

2) полагаем одну из компонент столбца Ψ равной единице; 3) разлагаем функции ρ и Ψ_k в формальные степенные ряды по некоторому параметру ξ :

$$\rho = \xi^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i \xi^i, \quad \Psi_k = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_{ki} \xi^{i+n_k}, \quad n_k \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Параметр разложения для наших систем является некоторой степенью спектрального параметра λ . Разложение для θ однозначно определяется временным уравнением системы (16), и мы получаем, в силу (19), бесконечную последовательность законов сохранения.

Введем вес монома: $W(u_i m_j n_k) = i + j + k$, и назовем полином $P(u_i, m_j, n_k)$ обобщенно-однородным, если он является линейной комбинацией мономов одинакового веса. Тогда можно сформулировать утверждение: не зависящие явно от x и t сохраняющиеся плотности гиперболических систем (3) являются обобщенно-однородными полиномами от переменных u_i, m_j, n_k . Если порядок сохраняющейся плотности ρ равен $k > 2$, то ρ имеет следующую структуру:

$$\rho = m_k n_k + \alpha u_k^2 + u_{k-1}(m_k P_1 + n_k P_2) + (m_k n_{k-1} - n_k m_{k-1})P_3 + \dots,$$

где $P_i = \beta_i u_1 + \gamma_i m_1 + \delta_i n_1$, а многочотиче означает слагаемые более низкого порядка. Для $k = 3$ формулу можно уточнить:

$$\rho = m_3 n_3 + \alpha u_3^2 + u_2(\beta m_3 n_1 + \gamma n_3 m_1) + \delta(m_3 n_2 - n_3 m_2)(m_1 - n_1 + \varepsilon u_1) + \dots,$$

где $\varepsilon = \pm 1, 0$. Отметим, что $\alpha = 0$ в гамильтонианах H_c и H_g , но при $k > 2$ для всех систем $\alpha \neq 0$.

Свойство обобщенной однородности сохраняющихся плотностей является простым следствием масштабной инвариантности гиперболических систем. Правые части эволюционных систем (9a)–(9g) также являются обобщенно-однородными полиномами от переменных u_i, m_j, n_k . В переменных u_i, v_j, w_k свойство обобщенной однородности остается справедливым, но коэффициенты всех многочленов зависят от v_0 и w_0 .

В качестве примеров мы приводим ниже несколько законов сохранения для систем (2b) и (2e). Для остальных систем мы указываем только подстановки для Ψ_i

и λ , которые приводят к рекуррентным соотношениям для сохраняющихся плотностей. Разложение для ρ во всех случаях имеет вид (20).

Случай (2a):

$$\begin{aligned} u_{xt} &= av^{2u} - bwe^{-2u}, \\ v_{xt} &= b\psi^{-1}e^{-2u} + \psi wv_xv_t, \\ w_{xt} &= a\psi^{-1}e^{2u} + \psi vw_xw_t. \end{aligned}$$

Здесь произведена замена $u \rightarrow \sqrt{2}u$. Отметим, что в работе [2] (см. раздел 5) некоторые элементы матриц P и $\tilde{U}$ даны с опечатками. Правильные выражения имеют следующий вид: $P_{13} = -cv^{-2/3}$, $\tilde{U}_{23} = \lambda ae^{\sqrt{2}u}$, $\tilde{U}_{32} = bc^{-1}\psi^{-1}e^{-\sqrt{2}u}$.

Скалярный оператор L имеет следующий вид:

$$L = (D_x - m_x)(D_x + 2u_x - m_x + n_x)(D_x + n_x) - \lambda D_x.$$

Случай (2b):

$$\begin{aligned} u_{xt} &= 2(av^2e^{2u} - bw^2e^{-2u}), \\ v_{xt} &= 2bw\psi^{-1}e^{-2u} + v_xv_tw\psi, \\ w_{xt} &= 2av\psi^{-1}e^{2u} + w_xw_tv\psi. \end{aligned} \tag{21}$$

Матрицы, реализующие представление нулевой кривизны, вкладываются в $\text{sp}(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} m_x - u_x & 1 & -m_x & -1 \\ 0 & n_x + u_x & 0 & -m_x \\ 0 & 1 & -u_x - n_x & -1 \\ \lambda & 0 & 0 & u_x - m_x \end{pmatrix}, \\ V &= \begin{pmatrix} 0 & 2bc\lambda^{-1}we^{-n-2u} & 0 & 2b\lambda^{-1}w^2e^{-2u} \\ 0 & c\psi n_t & 2ae^{2u+2n} & 0 \\ c\psi n_t & -2bc^2\lambda^{-1}e^{-2u-2n} & -c\psi n_t & -2bc\lambda^{-1}we^{-2u-n} \\ 0 & c\psi n_t & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Оператор L , соответствующий системе $\Psi_x = U\Psi$, имеет вид

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \lambda V, \quad V = (D_x + f_1 - m_x)(D_x - f_1 + m_x), \\ L_0 &= (D_x + f_1)(D_x + f_2)(D_x - f_2)(D_x - f_1), \end{aligned}$$

где

$$f_1 = n_x + u_x - \frac{m_{xx}}{m_x}, \quad f_2 = u_x - m_x, \quad \Psi_2 = m_x\Phi.$$

Выполнив в системе (16) калибровочное преобразование $\Psi \rightarrow \Psi e^{D_x^{-1}\rho}$ и подстановки

$$\Psi_1 = -\xi^2(\rho + m_x - u_x), \quad \Psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^{n+1}, \quad \Psi_3 = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \xi^{n+1}, \quad \Psi_4 = 1, \quad \lambda = -\xi^{-2},$$

приходим к рекуррентным соотношениям

$$h_{n+1} = g_n - (D_x + u_x + n_x)h_n - \sum_{i=0}^n \rho_i h_{n-i}, \quad n \geq 0, \quad h_0 = -1,$$

$$g_{n+1} = (u_x + n_x - D_x)g_n - \sum_{i=0}^n \rho_i g_{n-i}, \quad n \geq 0, \quad g_0 = -m_x,$$

$$2\rho_{n+1} = m_x h_{n+1} - g_{n+1} - D_x \rho_n - \sum_{i=0}^n \rho_i \rho_{n-i}, \quad n > 0, \quad \rho_0 = 0,$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2}u_x^2 + m_x n_x + \frac{1}{2}u_2 - m_2, \quad \theta_1 = -c\psi m_x n_t, \quad \theta_n = c\psi n_t g_{n-1}.$$

Очевидно, что ρ_n , g_n , h_n являются полиномами от u_i , m_j , n_k , $i, j, k > 0$. Можно проверить, что ρ_2 и ρ_4 являются полными производными, а ρ_3 совпадает с гамильтонианом H_b с точностью до полных производных. Ведущие члены в сохраняющихся плотностях имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \rho_3 &= \frac{1}{8}u_2^2 + n_2 m_2 + \dots, \\ \rho_5 &= \frac{1}{32}u_3^2 + n_3 m_3 + \frac{15}{8}u_2(m_3 n_1 - m_1 n_3) + \\ &\quad + 5m_3 n_2(u_1 - m_1 + n_1) + F(u_i, m_j, n_k), \quad i, j, k \leq 2. \end{aligned}$$

Мы проверили, что ρ_1 , ρ_3 и ρ_5 являются сохраняющимися плотностями не только для гиперболической системы (21), но и для эволюционной системы (9b).

Случай (2c):

$$\begin{aligned} u_{tx} &= 2aw^2 e^{2u} - bve^{-u}, \\ v_{tx} &= 2awe^{2u}\psi^{-1} + v_t v_x \psi w, \\ w_{tx} &= be^{-u}\psi^{-1} + w_t w_x \psi v. \end{aligned}$$

Матрицы, реализующие представление нулевой кривизны, вкладываются в $\mathfrak{sl}(5, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} -u_x - m_x & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & u_x - n_x & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -m_x & -1 & u_x + m_x & 0 \\ -m_x & 0 & 0 & 0 & n_x - u_x \end{pmatrix}, \\ V &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c\psi n_t \\ -2ac\lambda^{-1}we^{2u-n} & -c\psi n_t & 0 & c\psi n_t & -2ac^2\lambda^{-1}e^{2u-2n} \\ 0 & -be^{n-u} & 0 & 0 & 0 \\ -2a\lambda^{-1}w^2e^{2u} & 0 & 0 & 0 & 2ac\lambda^{-1}we^{2u-n} \\ 0 & 0 & -be^{n-u} & 0 & c\psi n_t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Оператор L , соответствующий системе $\Psi_x = U\Psi$, имеет вид

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \lambda V, \quad V = \left(D_x + f_1 - \frac{p_x}{p}\right)(D_x - f_1), \\ L_0 &= \left[\left(D_x + f_1 - \frac{p_x}{p}\right)(D_x - f_1) + p\right](D_x + f_1 - m_x)D_x(D_x - f_1 + m_x), \end{aligned}$$

где

$$f_1 = u_x + m_x - n_x, \quad p = n_{xx} + n_x^2 - 2n_x(u_x + m_x), \quad \Phi = \Psi_2.$$

Сохраняющиеся токи (ρ_n, θ_n) можно получить из системы (16) при помощи следующих подстановок: $\Psi \rightarrow \Psi e^{D_x^{-1}\rho}$,

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \xi^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^n, & \Psi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n \xi^{n+1}, & \Psi_3 &= 1, \\ \Psi_4 &= -\xi^3(D_x + \rho + m_x + u_x)\Psi_1, & \Psi_5 &= \Psi_1 - \rho, & \lambda &= -\xi^{-3}. \end{aligned}$$

Случай (2d):

$$\begin{aligned} u_{tx} &= ave^u - bwe^{-u}, \\ v_{tx} &= b\psi^{-1}e^{-u} + \psi w v_t v_x, \\ w_{tx} &= a\psi^{-1}e^u + \psi v w_t w_x. \end{aligned}$$

Скалярный L -оператор имеет вид

$$L = L_0 + \lambda(pD_x + D_x p) - \lambda^2, \quad L_0 = (D_x + f_1)(D_x + f_2)(D_x - f_2)(D_x - f_1),$$

где

$$f_1 = \frac{1}{2} \left(2u_x - m_x + n_x - \frac{m_{xx}}{m_x} \right), \quad f_2 = \frac{1}{2} \left(m_x + n_x - \frac{m_{xx}}{m_x} \right), \quad p = u_x + m_x + n_x - \frac{m_{xx}}{m_x}.$$

Случай (2e):

$$\begin{aligned} u_{xt} &= \left(vw + \frac{c}{2} \right) (ae^{2u} - be^{-2u}), \\ v_{xt} &= \psi w v_x v_t + \psi^{-1} v (ae^{2u} + be^{-2u}), \\ w_{xt} &= \psi v w_x w_t + \psi^{-1} w (ae^{2u} + be^{-2u}). \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь произведена замена $u \rightarrow \sqrt{2}u$. Матрицы, реализующие представление нулевой кривизны для этой системы, вкладываются в алгебру $\text{sp}(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} -m_x - n_x & 0 & 1 & 1 \\ -2\lambda m_x & 0 & 0 & \lambda \\ -\lambda & 1 & -m_x - 2u_x - n_x & 0 \\ 0 & -1 & 2m_x & -2u_x \end{pmatrix}, \\ V &= \begin{pmatrix} -u_t - n_t & \frac{1}{2}c\lambda^{-1}\psi n_t & -\frac{1}{2}ac\lambda^{-1}e^{2u} & 0 \\ 0 & -u_t + (c\psi - 1)n_t & 2awe^{n+2u} & -\frac{1}{2}ace^{2u} \\ \frac{1}{2}bce^{-2u} & 0 & -u_t - n_t & -\frac{1}{2}c\psi n_t \\ 2bwe^{n-2u} & \frac{1}{2}\lambda^{-1}bce^{-2u} & 0 & -u_t + (c\psi - 1)n_t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L -оператор соответствующей скалярной задачи $L\Phi = 0$ имеет следующий вид:

$$L = \left[\left(D_x - f_1 - \frac{p_x}{p} \right) \left(D_x + f_1 - \frac{p_x}{p} \right) + \lambda \right] [(D_x + f_2)(D_x - f_2) + \lambda] + \lambda p^2,$$

где

$$f_1 = u_x + \frac{1}{2}(m_x + n_x), \quad f_2 = u_x - \frac{1}{2}(m_x + n_x), \quad p = m_x - n_x, \quad \Phi = e^{u+(m+n)/2}\Psi_1.$$

Система (22) имеет высшие локальные сохраняющиеся плотности, три из них были найдены прямым вычислением. Это $\rho_1 = m_1 n_1 + u_1^2$, $\rho_2 = H_e = m_2 n_2 + u_2^2 + \dots$ и

$$\begin{aligned} \rho_3 = & m_3 n_3 + u_3^2 + \frac{5}{2}(n_2 m_3 - m_2 n_3)(n_1 - m_1) + 10u_2^2(m_1 n_1 + u_1^2) + \\ & + 20u_1 u_2(m_1 n_2 + n_1 m_2) + 5(n_1 - m_1)(m_2^2 n_1 - n_2^2 m_1) - \\ & - 10m_2 n_2(m_1^2 + n_1^2 - u_1^2 - 3m_1 n_1) + 10m_2 m_1^2 n_1(m_1 - 3n_1) + \\ & + 10n_2 m_1 n_1^2(-3m_1 + n_1) + 10u_1^2(n_1 m_2 - m_1 n_2)(n_1 - m_1) - \\ & - 10m_1^2 n_1^2(n_1 - m_1)^2 + m_1 n_1(m_1^4 + n_1^4 + 30u_1^4) + \\ & + 2u_1^6 - 10n_1 m_1 u_1^2(m_1^2 + n_1^2 - 5m_1 n_1). \end{aligned}$$

Из сравнения ρ_2 и ρ_3 ясно, что эволюционная система $\mathbf{u}_t = -\Gamma(\delta\rho_3/\delta\mathbf{u})$ будет иметь единичную матрицу при старших производных в правой части, как и (9e). Это может означать, что коэффициент при старшей степени D_x в рекурсионном операторе – единичная матрица.

В дополнение к изложенному мы вычислили “китайским” методом [13] канонические плотности эволюционной системы (9e) и обнаружили, что почти все они нелокальны. Первые три канонические плотности имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_0 = 0, \quad \rho_1 = u_1^2 + m_1 n_1, \quad \rho_2 = D_x(4pq - \rho_1), \\ p = D_x^{-1}u_1 m_1 e^{m-n}, \quad q = D_x^{-1}u_1 n_1 e^{n-m}, \end{aligned}$$

а ρ_3 и ρ_4 записываются, как и ρ_2 , в виде полных производных от некоторых слабо нелокальных функций. При этом вычисление новых плотностей требует введения все новых и новых нелокальных переменных.

Из общих соображений ясно, что законы сохранения интегрируемой методом обратной задачи системы должны выводиться из данных рассеяния или даже из представления нулевой кривизны, но как это сделать для системы (2e), мы пока не знаем.

Случай (2f):

$$\begin{aligned} u_{xt} &= a\left(vw + \frac{c}{2}\right)e^{2u} - be^{-2u}, \\ v_{xt} &= ae^{2u}v\psi^{-1} + v_x v_t w \psi, \\ w_{xt} &= ae^{2u}w\psi^{-1} + vw_x w_t \psi. \end{aligned}$$

Здесь произведена замена $u \rightarrow \sqrt{2}u$. Матрицы, реализующие представление нулевой кривизны, вкладываются в $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} -u_x & -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & u_x & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda m_x & m_x + n_x + u_x & \lambda \\ 2m_x & 0 & 1 & m_x + n_x - u_x \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \psi w e^n n_t & b e^{-2u} & 0 & -\frac{1}{2} c \psi n_t \\ -\frac{1}{2} a c \lambda^{-1} e^{2u} & \psi w e^n n_t & -\frac{1}{2} c \lambda^{-1} \psi n_t & 0 \\ -2 a w e^{2u+n} & 0 & n_t & \frac{1}{2} a c e^{2u} \\ 0 & 0 & b \lambda^{-1} e^{-2u} & n_t \end{pmatrix}.$$

Скалярный оператор, соответствующий системе $\Psi_x = U\Psi$, имеет вид

$$L = L_0 + \lambda(pD_x + D_x p) - \lambda^2, \quad L_0 = (D_x + f_1)(D_x + f_2)(D_x - f_2)(D_x - f_1),$$

где

$$f_1 = u_x - \frac{1}{2}(m_x + u_x), \quad f_2 = -u_x - \frac{1}{2}(m_x + u_x), \quad p = m_x - n_x, \quad \Psi_2 = e^{(m+n)/2} \Phi.$$

Сохраняющиеся токи (ρ_n, θ_n) можно получить из (16) при помощи следующих подстановок: $\Psi \rightarrow \Psi e^{D_x^{-1} \rho}$,

$$\Psi_1 = \rho - u_x, \quad \Psi_2 = 1, \quad \Psi_3 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^{n-1}, \quad \Psi_4 = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \xi^n, \quad \lambda = -\xi^{-2}.$$

Случай (2g):

$$\begin{aligned} u_{xt} &= a \left(v w + \frac{c}{2} \right) e^{2u} - 2b e^{-4u}, \\ v_{xt} &= a e^{2u} v \psi^{-1} + \psi v_x v_t w, \\ w_{xt} &= a e^{2u} w \psi^{-1} + \psi v w_x w_t. \end{aligned}$$

Здесь произведена замена $u \rightarrow \sqrt{2}u$. Матрицы, реализующие представление нулевой кривизны, вкладываются в $\mathfrak{sl}(5, \mathbb{C})$:

$$U = \begin{pmatrix} m_x + n_x & -n_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -n_x \\ 0 & 0 & 2u_x & \lambda & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2u_x & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -m_x - n_x \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} -c \psi n_t & 0 & 0 & \psi^{-1} a e^{2u} & 0 \\ -2c \psi n_t & 0 & 0 & a c e^{2u} & 0 \\ 0 & a c e^{2u} & 0 & 0 & -a \psi^{-1} e^{2u} \\ 0 & 0 & 4b \lambda^{-1} e^{-4u} & 0 & 0 \\ 0 & -2c \psi n_t & 0 & 0 & c \psi n_t \end{pmatrix}.$$

Оператор L можно представить в двух формах: псевдодифференциальной –

$$\begin{aligned} L &= L_0 + \lambda V, \quad L_0 = (D_x + f_1)(D_x + 2u_x)(D_x - 2u_x)(D_x - f_1), \\ V &= -(D_x - p)D_x^{-1}(D_x + p) = pD_x^{-1}p - D_x, \end{aligned}$$

где

$$f_1 = -m_x - n_x, \quad p = m_x - n_x, \quad \Psi_5 = \Phi,$$

и дифференциальной –

$$\tilde{L} = \left(D_x - \frac{p_x}{p}\right)L_0 - \lambda \left(D_x - p - \frac{p_x}{p}\right)(D_x + p),$$

которая получается дифференцированием уравнения $L\Phi = 0$. Сохраняющиеся токи (ρ_n, θ_n) можно получить из (16) при помощи следующих подстановок: $\Psi \rightarrow \Psi e^{D_x^{-1}\rho}$,

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= 1, & \Psi_3 &= -\rho - n_x \Psi_5, & \Psi_4 &= \xi^3 (D_x + \rho - 2u_x)(\rho + n_x \Psi_5), \\ \Psi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^{n+1}, & \Psi_5 &= 2 + \sum_{n=0}^{\infty} g_n \xi^{n+1}, & \lambda &= -\xi^{-3}. \end{aligned}$$

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Отметим, что если перейти в уравнениях (9a)–(9g) к переменным $U = u_x$, $P = m_x$, $Q = n_x$, то все уравнения примут дивергентный вид, а их гамильтонов оператор станет дифференциальным:

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} D_x,$$

где $\alpha = 1$ в случаях (b)–(d) и $\alpha = 1/2$ во всех остальных случаях. При этом в гамильтонианах надо просто заменить старые переменные на новые.

2. Изложенные в работе результаты могут служить основой для построения точных решений полевых уравнений. Так, например, если записать самый простой оператор (4) в виде $L = D_x^3 + f D_x^2 + (g - \lambda) D_x + h$ и рассмотреть простейший одевающий оператор $S = p^{-1} D_x + 1$, то из определяющего уравнения $\tilde{L}S = \tilde{S}L$, $\tilde{S} = D_x p^{-1} + 1$, нетрудно получить формулы одевания

$$\tilde{f} = f + \frac{2p_x}{p}, \quad \tilde{h} = h + \left(\frac{h}{p}\right)_x, \quad \tilde{g} = g + f_x + f \frac{p_x}{p} + 3 \frac{p_{xx}}{p} - 2 \frac{p_x^2}{p^2} - 2p_x.$$

Правда, выразить исходные функции u , m , n через f , g , h не так-то просто.

3. Существуют системы с лагранжианом (1), имеющие высшие симметрии порядка $n > 4$ и не имеющие высших симметрий второго, третьего или четвертого порядков. Две такие системы приводились в работе [2], а в работе [5] доказано, что они являются лиувиллевскими. По-видимому, список (2a)–(2g) исчерпывает все интегрируемые методом обратной задачи системы с лагранжианом (1).

Благодарности. Авторы благодарны участникам семинара по нелинейным уравнениям в ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН, и в особенности М. В. Павлову и В. В. Соколову, за полезные советы и замечания. Авторы также признательны рецензентам за их замечания, которые помогли улучшить текст статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00775-а).

Список литературы

- [1] D. K. Demskoi, A. G. Meshkov, “New integrable string-like fields in 1+1 dimensions”, *Proc. Second Int. Conf. Quantum Field Theory and Gravity (July 28 – August 2, 1997. Tomsk, Russia)*, eds. I. L. Bukhbinder, K. E. Osetrin, Tomsk Pedagogical University, Tomsk, 1998, 282–285.
- [2] Д. К. Демской, А. Г. Мешков, *ТМФ*, **134**:3 (2003), 401–415.
- [3] D. K. Demskoi, A. G. Meshkov, *Inverse Problems*, **19** (2003), 563–571.
- [4] S. C. Anco, T. Wolf, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12. Suppl. 1** (2005), 13–31.
- [5] Д. К. Демской, *ТМФ*, **141**:2 (2004), 208–227.
- [6] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, М., 1976.
- [7] N. Yajima, M. Oikawa, *Progr. Theor. Phys.*, **56** (1976), 1719–1739.
- [8] B. Fuchssteiner, A. S. Focas, *Physica D*, **4**:1 (1981), 47–66; M. Antonowicz, A. P. Fordy, “Hamiltonian structure of nonlinear evolution equations”, *Soliton theory: Surveys of Results (Nonlinear Sci. Theory Appl.)*, ed. A. P. Fordy, Manchester Univ. Press, Manchester, 1990, 273–312.
- [9] А. Г. Мешков, “Ковариантные свойства операторов Нийенхейса и гамильтоновых операторов”, *Современный групповой анализ: Методы и приложения. Некоторые задачи современной физики*, Препринт № 116, Ленинградский институт информатики и автоматизации АН СССР, Ленинград, 1990, 9–14.
- [10] H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook, *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 1–7; **17** (1976), 1293–1297.
- [11] J. Corones, *J. Math. Phys.*, **17**:5 (1976), 756–759; **18**:1 (1977), 163–164.
- [12] J. M. Alberty, T. Koikawa, R. Sasaki, *Physica D*, **5**:1 (1982), 43–65.
- [13] H. H. Chen, Y. C. Lee, C. S. Liu, *Phys. Scripta*, **20**:3–4 (1979), 490–492.
- [14] A. G. Meshkov, *Inverse Problems*, **10** (1994), 635–653.

Поступила в редакцию 29.08.2005,
после доработки 23.12.2005