Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пупышев, Ложные решения трехмерных уравнений Фаддеева, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 2, 227–242

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2082>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 04:48:59

© 2006 г.

В. В. Пупышев*

ЛОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА

Получены в явном виде ложные решения трехмерных уравнений Фаддеева, записанных в представлении полного углового момента и полной пространственной четности.

Ключевые слова: задача трех частиц, дифференциальные уравнения Фаддеева, ложные решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сформулируем наиболее важные определения и напомним две известные дифференциальные формулировки задачи трех попарно взаимодействующих квантовых частиц p_1 , p_2 и p_3 .

Пусть H_0 и E – свободный гамильтониан и полная энергия этих трех частиц, а V_1 , V_2 , V_3 – соответствующие центральные взаимодействия между частицами p_2 и p_3 , p_1 и p_3 , p_1 и p_2 . Пусть $H \equiv H_0 + V$ и $V \equiv V_1 + V_2 + V_3$ – полный гамильтониан и полное взаимодействие. Под полным набором ε сохраняющихся квантовых чисел, как обычно, понимается совокупность собственных чисел всех операторов, коммутирующих с полным гамильтонианом H . Обозначим через $\mathcal{A}^\varepsilon$ класс функций, собственных для каждого из таких операторов, а через $\mathcal{A}$ – более широкий класс функций, вообще говоря, не обладающих никакими квантовыми числами, кроме полной энергии.

В формулировке Шредингера [1] волновая функция Ψ трех частиц определяется как решение уравнения Шредингера

$$(H - E)\Psi = 0.$$

В формулировке Фаддеева [2] сначала вычисляются три компоненты Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3 решения $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ системы трех уравнений Фаддеева

$$(H_0 - E)\Psi_i = -V_i\Psi = -V_i \sum_{k=1}^3 \Psi_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: pupyshv@thsun1.jinr.ru

а затем отвечающая этому решению волновая функция Ψ восстанавливается как сумма ее фаддеевских компонент:

$$\Psi = \sum_{k=1}^3 \Psi_k. \quad (2)$$

Уравнения Шредингера и Фаддеева записываются в системе центра масс трех частиц в виде шестимерных дифференциальных уравнений. Редукция шестимерных уравнений Фаддеева к двумерным интегродифференциальным уравнениям Фаддеева в бисферическом базисе в случае трех тождественных частиц описана в известной монографии [2]. В общем случае разных частиц подробное описание такой редукции дано в обзоре [3]. Как впервые показано в работе [4], в случае центральных парных взаимодействий шестимерные уравнения Фаддеева можно свести к конечным системам трехмерных дифференциальных уравнений.

Главный объект наших исследований – особые, а именно ложные, решения уравнений Фаддеева. Мы используем следующее определение ложного решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Нетривиальное решение $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ уравнений (1), сумма (2) всех компонент которого тождественно равна нулю, а каждая из них принадлежит выбранному классу функций, называется *ложным решением уравнений Фаддеева* в этом классе.

Чтобы отличать ложные решения от всех остальных, компоненты Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3 ложного решения обозначим соответствующими символами S_1 , S_2 и S_3 . По определению ложному в данном классе функций решению уравнений Фаддеева отвечает тривиальное решение ($\Psi \equiv 0$) уравнения Шредингера. Поэтому уравнения Фаддеева (1) для ложных решений расщепляются на совокупность трех не связанных друг с другом свободных уравнений Шредингера для компонент ложного решения и условие равенства нулю суммы таких компонент:

$$(H_0 - E)S_i = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad S_1 + S_2 + S_3 \equiv 0. \quad (3)$$

Теперь поясним, зачем необходимо знание ложных решений в явном виде. Для этого обсудим три проблемы.

Первая из них – расчет четырехчастичных систем методом кластерной редукции [5]. В этом методе компоненты четырехчастичной волновой функции подчиняются уравнениям Фаддеева–Якубовского [2], а затем заменяются конечными подсуммами их рядов по избранным собственным функциям гамильтонианов трехчастичных подсистем. К таким базисным функциям относятся и ложные решения трехчастичных уравнений Фаддеева (1).

Вторая и малоизученная проблема – анализ асимптотик решений уравнений Фаддеева в пределах одной, двух и трех больших по модулю констант связи парных взаимодействий. Для примера рассмотрим случай трех одинаковых констант, равных параметру λ . Пусть $V_i = \lambda v_i$, тогда система (1) эквивалентна системе

$$\frac{1}{\lambda}(H_0 - E)\Psi_i = v_i\Psi = v_i \sum_{k=1}^3 \Psi_k.$$

Предположим, что при любом λ имеются регулярные решения, для которых $|H_0\Psi_i| \leq \infty$, $i = 1, 2, 3$. Тогда рассматриваемое семейство уравнений может выродиться в систему (3), определяющую ложное решение:

$$(H_0 - E)\Psi_i \rightarrow 0, \quad \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \rightarrow 0, \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

В этом случае $\Psi_i \rightarrow S_i$, $i = 1, 2, 3$, следовательно, S_i – старший член асимптотики компоненты Ψ_i при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Примеры такой ситуации описаны в работах [6], посвященных точным решениям уравнений Фаддеева с парными взаимодействиями центробежного типа.

Третья проблема – тестирование алгоритмов численного решения уравнений Фаддеева путем решения краевых задач для известных в явном виде ложных решений и последующего сравнения вычисленных решений с ложными как с эталонными. Так как ложные решения не зависят от формы парных взаимодействий, то их можно использовать как эталонные при любых парных взаимодействиях. В этом смысле ложные решения особо значимы как универсальные эталонные решения.

Ложные решения неоднократно обсуждались в обзорах [3], [7], [8]. Поэтому упомянем лишь наиболее интересные результаты, полученные в статьях [9]–[12].

Общие свойства гамильтониана H , порождающие ложные решения класса $\mathcal{A}$, и такие общие вопросы, как полнота пространства ложных и всех остальных решений уравнений Фаддеева, исследовались в работах [9], [10].

Наиболее значимое для спектральной теории уравнений Фаддеева утверждение доказано в работе [10] для случая гамильтониана H с чисто дискретным спектром. В этом случае матричные операторы, соответствующие уравнениям Фаддеева и сопряженным уравнениям, имеют два типа инвариантных пространств. На пространствах первого типа спектр операторов совпадает со спектром гамильтониана H , на пространствах второго типа эти же операторы эквивалентны гамильтониану H_0 .

Для уравнений Фаддеева в бисферическом базисе известны два способа построения всех ложных решений в явном виде.

Первый способ предложен в работе [11], но лишь для систем из трех тождественных частиц с нулевым полным угловым моментом. Этим способом ложное решение получается как вполне определенный перестановочный образ собственной функции гамильтониана H_0 . Простое обобщение такого подхода к построению ложных решений на случай нетождественных частиц с произвольным полным угловым моментом дано в обзоре [8].

Второй способ построения всех ложных решений уравнений Фаддеева в бисферическом базисе в классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ в самом общем случае нетождественных частиц и произвольного углового момента предложен в статье [12] и реализуется решением конечных систем линейных уравнений.

Ложные решения трехмерных дифференциальных уравнений Фаддеева еще не исследовались. Этот пробел восполняет настоящая работа. В ней сначала выводятся трехмерные дифференциальные уравнения Фаддеева в представлении полного углового момента и полной пространственной четности, а затем описывается предлагаемый метод построения ложных решений таких уравнений в явном виде.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ ФОРМУЛЫ

В трехмерном координатном пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксируем правую декартову систему координат S_3 с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ и начальной точкой O , совпадающей с центром масс исследуемой системы $\{p_1, p_2, p_3\}$ трех частиц p_1 , p_2 и p_3 с массами m_1 , m_2 и m_3 .

В системе S_3 стандартным образом [2] введем три пары приведенных трехмерных векторов Якоби $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$. Векторы $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$ объединим в двухкомпонентный вектор-столбец $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)^T$ и в шестимерный вектор $\mathbf{r}_i \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in \mathbb{R}^6$ с обычными гиперсферическими координатами (r, Ω_i) , где $r \equiv (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}$ – гиперрадиус, а $\Omega_i \equiv (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i)$ – набор из пяти углов: $\hat{x}_i \equiv (\theta_{x_i}, \varphi_{x_i})$ и $\hat{y}_i \equiv (\theta_{y_i}, \varphi_{y_i})$ – пары сферических углов векторов $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$ в системе S_3 , а $\varphi_i \equiv \arctg(y_i/x_i)$. Переход от представления $\langle \mathbf{r}_i | = \langle r_i, \Omega_i |$ к другому представлению $\langle \mathbf{r}_k | = \langle r_k, \Omega_i |$, $k \neq i$, называется кинематическим преобразованием [3], [13] и характеризуется кинематическим углом:

$$\gamma_{ki} \equiv g_{ki} \arctg \left[\frac{m_j(m_1 + m_2 + m_3)}{m_k m_i} \right]^{1/2}. \quad (4)$$

По определению таких шести углов, если $(k, i) = (1, 2), (3, 1), (2, 3)$, то

$$\begin{aligned} g_{ki} = -g_{ik} = 1, \quad \gamma_{ki} = -\gamma_{ik}, \quad 0 \leq \gamma_{ki} \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sum_{(k,i)} \gamma_{ki} = \pi, \quad \sum_{(i,k)} \gamma_{ik} = -\pi. \end{aligned} \quad (5)$$

Для краткости записи положим $\gamma \equiv \gamma_{ki}$, у всех координат опустим индекс i , а индекс k заменим штрихом. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_i = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), \quad \mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}_k = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \equiv (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k), \\ \Omega = (\hat{x}, \hat{y}, \varphi) \equiv \Omega(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i), \quad \Omega' = (\hat{x}', \hat{y}', \varphi') \equiv \Omega_k = (\hat{x}_k, \hat{y}_k, \varphi_k), \end{aligned}$$

u и u' – косинусы углов θ и θ' между векторами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$, а $u_{xx'}$ и $u_{yy'}$ – косинусы углов $\theta_{xx'}$ и $\theta_{yy'}$ между векторами $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$. Также для краткости записи введем совокупности $q \equiv q_i = (r, \varphi, u)$ и $q' \equiv q_k = (r, \varphi', u')$ троек аргументов r , φ , u и r , φ' , u' .

Так как столбцы $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T$ и $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')^T$ кинематически связаны:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} +c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \quad c \equiv \cos \gamma, \quad s \equiv \sin \gamma, \quad (6)$$

то все гиперуглы набора Ω' можно представить функциями $\Omega' = \Omega'(\Omega; \gamma)$ параметра γ и гиперуглов набора Ω . По той же причине длины x' и y' векторов $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, углы θ' , φ' и косинусы u' , $u_{xx'}$ и $u_{yy'}$ нетрудно выразить как функции параметра γ

и совокупности q трех аргументов: гиперрадиуса r , угла φ и косинуса u . Например,

$$\begin{aligned} x'(q; \gamma) &= r[(c \cos \varphi)^2 + csu \sin 2\varphi + (s \sin \varphi)^2]^{1/2}, \\ y'(q; \gamma) &= r[(c \cos \varphi)^2 - csu \sin 2\varphi + (s \sin \varphi)^2]^{1/2}, \\ \varphi'(q; \gamma) &= \arccos\{[\cos(\gamma - \varphi)]^2 + cs(u - 1) \sin 2\varphi\}^{1/2}, \\ u'(q; \gamma) &\equiv \cos \theta_{x'y'} = \frac{(c^2 - s^2)u \sin 2\varphi - 2cs \cos 2\varphi}{\sin(2\varphi'(q; \gamma))}, \\ u_{xx'}(q; \gamma) &\equiv \cos \theta_{xx'} = -\frac{c \cos \varphi + su \sin \varphi}{\cos(\varphi'(q; \gamma))}, \\ u_{yy'}(q; \gamma) &\equiv \cos \theta_{yy'} = \frac{su \cos \varphi - c \sin \varphi}{\sin(\varphi'(q; \gamma))}. \end{aligned} \quad (7)$$

Предположим, что $u \neq \pm 1$. Введем в $\mathbb{R}^3$ две ($t = x, y$) правые, декартовы и “подвижные” системы координат S_3^t с ортами $\mathbf{e}_1^t, \mathbf{e}_2^t, \mathbf{e}_3^t$. Пусть начальные точки O^x, O^y и O систем S_3^x, S_3^y и S_3 совпадают и

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_1^x > 0, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_2^x = 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3^x = x; \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1^y < 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2^y = 0, \quad \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_3^y = y.$$

Тогда орты $\mathbf{e}_2^x$ и $\mathbf{e}_2^y$ коллинеарны нормали $\mathbf{N} \equiv \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ к плоскости $\mathcal{P}$ трех частиц и эта плоскость совпадает с плоскостями $\mathcal{P}_{13}^t$ ортов $\mathbf{e}_1^t$ и $\mathbf{e}_3^t$, $t = x, y$.

Система S_3^y получается поворотом системы S_3^x вокруг орта $\mathbf{e}_2^x = \mathbf{e}_2^y$ на угол θ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Так как в S_3 ориентация этих векторов задана углами $\hat{x} = (\theta_x, \varphi_x)$ и $\hat{y} = (\theta_y, \varphi_y)$, а в S_3^t — углами $\hat{x}^t$ и $\hat{y}^t$:

$$\begin{aligned} \hat{x}^t &= (\theta_x^t, \varphi_x^t) = (0, 0), & \hat{y}^t &= (\theta_y^t, \varphi_y^t) = (\theta, 0), & t &= x; \\ \hat{x}^t &= (\theta_x^t, \varphi_x^t) = (\theta, \pi), & \hat{y}^t &= (\theta_y^t, \varphi_y^t) = (0, 0), & t &= y, \end{aligned}$$

то переход $S_3 \rightarrow S_3^t$ определяется углами Эйлера [14] $\omega^t = (\varphi_t, \theta_t, \gamma^t)$, где

$$\cos \gamma^t = \operatorname{ctg} \theta \cos \theta_t - \operatorname{cosec} \theta \cos \theta_{t'}, \quad t, t' = x, y, \quad t' \neq t.$$

В качестве угловых базисных функций [14] в задаче трех частиц наиболее часто используются сферические функции

$$Y_{c\delta}(\hat{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\delta\varphi_q} \Theta_{c\delta}(\cos \theta_q), \quad \hat{q} = \hat{x}, \hat{y}, \quad (8)$$

бисферические гипергармоники

$$\langle \hat{x}, \hat{y} \mid \ell m a b \rangle \equiv \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \equiv \sum_{\alpha} C_{a\alpha b\beta}^{\ell m} Y_{a\alpha}(\hat{y}) Y_{b\beta}(\hat{x}), \quad (9)$$

гипергармоники

$$\begin{aligned} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega) &\equiv W_{Lab}(\varphi) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \\ W_{Lab}(\varphi) &\equiv N_{Lab}(\sin \varphi)^a (\cos \varphi)^b P_n^{(a+1/2, b+1/2)}(\cos 2\varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

D -функции Вигнера $D_{mm'}^{\ell*}$ и D^σ -функции [15]

$$D_{mn'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) \equiv \left[\frac{2\ell+1}{16\pi^2(1+\delta_{n'0})} \right]^{1/2} [D_{mn'}^{\ell*}(\omega^t) + \sigma(-1)^{\ell-n'} D_{m,-n'}^{\ell*}(\omega^t)]. \quad (11)$$

В формулах (8)–(11) обозначения стандартные: $\Theta_{a\alpha}$ – нормированные присоединенные полиномы Лежандра, $P_n^{(a,b)}$ – полиномы Якоби, $C_{a\alpha b\beta}^{\ell m}$ – коэффициенты Клебша–Гордана, N_{Lab} – известные множители, δ_{ab} – символ Кронекера. Индексы могут принимать только следующие значения:

$$\begin{aligned} \ell &= 0, 1, \dots; & m &= -\ell, -\ell+1, \dots, \ell; & |a-b| &\leq \ell \leq a+b; \\ L &= a+b+2n, & n &= 0, 1, \dots; & \alpha &= -a, -a+1, \dots, a; \\ \sigma &= \pm(-1)^\ell, & \mu(\sigma) &\equiv \frac{1-(-1)^\ell\sigma}{2}, & n' &= \mu(\sigma), \mu(\sigma)+1, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Система S_3^y получается переходом $S_3 \rightarrow S_3^x \rightarrow S_3^y$, причем второй переход – это поворот системы S_3^x на угол θ вокруг орта $\mathbf{e}_2^x$. Поэтому, используя известную формулу [14], описывающую результирующий поворот, получаем

$$\begin{aligned} D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) &= \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} D_{mm''}^{\ell\sigma*}(\omega^q) d_{m''m'}^{\ell\sigma t}(u), & t \neq q = x, y, \\ d_{m''m'}^{\ell\sigma t}(u) &\equiv \left[\frac{2\ell+1}{16\pi^2(1+\delta_{m'0})} \right]^{1/2} D_{m''m'}^{\ell\sigma*}(0, \theta, 0) \begin{cases} (-1)^{m'+m''}, & t = x, \\ 1, & t = y. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Бисферические гармоники (9) – это известные суммы по D^σ -функциям [16]:

$$\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} \langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) | \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \rangle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t), \quad (13)$$

где

$$\langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) | \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \rangle = \begin{cases} T_{ab}^{\ell m'} \Theta_{am'}(u), & t = x, \\ (-1)^{m'} T_{ba}^{\ell m'} \Theta_{bm'}(u), & t = y, \end{cases} \quad (14)$$

а $T_{ab}^{\ell m'}$ – коэффициенты Ченга–Фано [17]:

$$T_{ab}^{\ell m'} \equiv \left(\frac{1+\sigma(-1)^{a+b}}{1+\delta_{m'0}} \right)^{1/2} (-1)^{a+m'} C_{a-m'\ell m'}^{b0}. \quad (15)$$

Как известно [3], [18], любая гипергармоника $Y_{La'b'}^{\ell m}$, зависящая от гиперуглов Ω' , выраженных через гиперуглы Ω и кинематический угол γ , представима в виде конечной суммы

$$Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega'(\Omega; \gamma)) = Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega'(\Omega; \gamma)) = \sum_{ab} \langle ab | K(\gamma) | a'b' \rangle_{L\ell} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega), \quad (16)$$

а коэффициенты Рейнала–Реваи $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ подчиняются соотношениям

$$\sum_{ab} \langle a'b'|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell} \langle ab|K(-\gamma)|a''b''\rangle_{L\ell} = \delta_{a'a''} \delta_{b'b''}, \quad (17)$$

$$\langle a'b'|K(\gamma_1 + \gamma_2)|a''b''\rangle_{L\ell} = (-1)^L \sum_{ab} \langle a'b'|K(\gamma_1)|ab\rangle_{L\ell} \langle ab|K(\gamma_2)|a''b''\rangle_{L\ell}. \quad (18)$$

Поэтому трехмерные вектор-столбцы

$$\mathbf{Y}_{Lab}^{\ell mg} \equiv (Y_{Lab}^{\ell mg}(\Omega_1), Y_{Lab}^{\ell mg}(\Omega_2), Y_{Lab}^{\ell mg}(\Omega_3))^T, \quad g = u, s, v,$$

с компонентами

$$\begin{aligned} Y_{Lab}^{\ell mu}(\Omega_i) &\equiv \frac{1}{3} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) + \frac{1}{3} \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle a'b'|K(\gamma_{ki})|ab\rangle_{L\ell} Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega_i), \\ Y_{Lab}^{\ell ms}(\Omega_i) &\equiv Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) - Y_{Lab}^{\ell mu}(\Omega_i), \\ Y_{Lab}^{\ell mv}(\Omega_i) &\equiv \sum_{k \neq i} \text{sign } \gamma_{ki} \sum_{a'b'} \langle a'b'|K(\gamma_{ki})|ab\rangle_{L\ell} Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega_i), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (19)$$

в общем случае ортонормированны:

$$\langle \mathbf{Y}_{Lab}^{\ell mg} | \mathbf{Y}_{L'a'b'}^{\ell mg} \rangle = \delta_{LL'} \delta_{aa'} \delta_{bb'} \delta_{gg'}, \quad g = u, s, v, \quad g' = u, s, v. \quad (20)$$

Если массы трех частиц равны, то функции $Y_{Lab}^{\ell mu}$ с четным или нечетным индексом b – известные использующиеся в методе гипергармоник [18] симметричные ($Y_{Lab}^{\ell m+}$) или антисимметричные ($Y_{Lab}^{\ell m-}$) относительно любых перестановок частиц гипергармоники:

$$Y_{Lab}^{\ell m\pm}(\Omega_i) \equiv \frac{1}{3} \sum_{a'b'} [\delta_{aa'} \delta_{bb'} + 2 \langle a'b'|K(\pi/3)|ab\rangle_{L\ell}] Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega_i),$$

где b и b' одновременно четные, если берется знак “+”, или нечетные, если берется знак “–”; функции $Y_{Lab}^{\ell ms}$ не обладают такой симметрией; функции $Y_{Lab}^{\ell mv}$ – тривиальные: $Y_{Lab}^{\ell mv}(\Omega_i) \equiv 0 \quad \forall \Omega_i$.

Пусть $\mathbf{l}_x$ и $\mathbf{l}_y$ – операторы угловых моментов, сопряженные векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, а $\mathbf{l} \equiv \mathbf{l}_x + \mathbf{l}_y = l_1 \mathbf{e}_1 + l_2 \mathbf{e}_2 + l_3 \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{L}$ – операторы полного углового момента и гипермомента, P – оператор инверсии $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow -\mathbf{r} = (-\mathbf{x}, -\mathbf{y})$.

Функции $D_{mm'}^{\ell \sigma*}$, в отличие от функций $D_{mm'}^{\ell*}$, являются собственными функциями оператора инверсии: $(P - \sigma) D_{mm'}^{\ell \sigma*} = 0$, а собственное число σ называется полной пространственной четностью.

Для свободного гамильтониана H_0 верны два ($t = x, y$) представления:

$$H_0(\mathbf{r}) = \sum_{\ell m \sigma} \sum_{m' = m-1}^{m+1} |D_{mm'}^{\ell \sigma*}(\omega^t)\rangle H_{0m'm}^{\ell \sigma t}(r, \varphi, u) \langle D_{m'm}^{\ell \sigma*}(\omega^t)|. \quad (21)$$

Доказательство в случае $t = x$, когда S^x – подвижная система, детально описано в обзоре [15] и основано на представлении $\mathbf{l}_x = \mathbf{l} - \mathbf{l}_y$. В случае $t = y$, когда S^y –

подвижная система, доказательство дается аналогичным способом, но с использованием представления $\mathbf{l}_y = \mathbf{l} - \mathbf{l}_x$. В обоих ($t = x, y$) случаях операторы $H_{0mm'}^{\ell\sigma t}$, $m' = m, m \pm 1$, действуют на любую функцию $(xy \sin \theta)^{-1} f(r, \varphi, u)$, где $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$, по следующим правилам:

$$\begin{aligned} [H_{0mm'}^{\ell\sigma t}(r, \varphi, u)(xy \sin \theta)^{-1} + (xy \sin \theta)^{-1} \tilde{H}_{0mm'}^{\ell\sigma t}(r, \varphi, u)] f(r, \varphi, u) &= 0, \\ \tilde{H}_{0mm'}^{\ell\sigma t}(r, \varphi, u) &\equiv \partial_r^2 + r^{-1} \partial_r - \left(\frac{2}{\sin 2\varphi} \right)^2 \tilde{Q}_{mm}(u) + \frac{m^2 - \ell(\ell + 1)}{(qr)^2}, \\ \tilde{H}_{0mm'}^{\ell\sigma t}(r, \varphi, u) &\equiv \frac{\gamma_{mm'}^{\ell\sigma}}{(rq)^2} \tilde{Q}_{mm'}(u). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $q = \cos \varphi$ при $t = x$ и $q = \sin \varphi$ при $t = y$, а также введены операторы

$$\tilde{Q}_{mm}(u) \equiv (1 - u^2) \partial_u^2 + \frac{1 - m^2}{1 - u^2}, \quad \tilde{Q}_{m', m' \pm 1}(u) \equiv (1 - u^2)^{1/2} \left(\mp \partial_u - \frac{m'u}{1 - u^2} \right)$$

и коэффициенты

$$\begin{aligned} \gamma_{m', m'+1}^{\ell\sigma} &\equiv \{[1 + \delta_{m'0} \sigma (-1)^\ell][\ell(\ell + 1) - m'(m' + 1)]\}^{1/2}, \\ \gamma_{m', m'-1}^{\ell\sigma} &\equiv (1 - \delta_{m'0}) \{[1 + \delta_{m'1} \sigma (-1)^\ell][\ell(\ell + 1) - m'(m' - 1)]\}^{1/2}. \end{aligned}$$

В квантовой механике свободным уравнением Шредингера для системы $\{p_1, p_2, p_3\}$ трех частиц называется уравнение [1]

$$H_0(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^6. \quad (23)$$

Ограниченное всюду в $\mathbb{R}^6$ решение Ψ этого уравнения называют регулярным, а тождественно равное нулю – тривиальным. Так как любая гипергармоника $Y_{Lab}^{\ell m}$ является собственной функцией оператора H_0 , то фундаментальное решение $\Psi = \Psi_0^\varepsilon$ уравнения (23)

$$\Psi_0^\varepsilon(\mathbf{r}) = r^{-2} Z_{L+2}(z) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega), \quad z \equiv r\sqrt{E}, \quad \varepsilon = \{L, a, b, \ell, m, \sigma\}, \quad (24)$$

обладает тем же набором квантовых чисел ε , что и гипергармоника $Y_{Lab}^{\ell m}$, и содержит решение Z_ν , $\nu = L + 2$, уравнения Бесселя

$$(z^2 \partial_z^2 + z \partial_z + z^2 - \nu^2) Z_\nu(z) = 0.$$

Поэтому при $E < 0$ не существует никакого регулярного решения Ψ , отличного от тривиального, а при $E \geq 0$ фундаментальное регулярное решение дается формулой (24), в которой Z_{L+2} – регулярная функция Бесселя J_{L+2} . Любое регулярное решение уравнения (23) можно представить линейной комбинацией функций (24) и некоторых коэффициентов B_{ab}^L . Например, решение $\Psi = \Psi_0^\varepsilon$ с квантовыми числами $\varepsilon = \{L, \ell, m, \sigma\}$ – сумма

$$\Psi_0^\varepsilon(\mathbf{r}) = r^{-2} J_{L+2}(z) \sum_{ab} B_{ab}^L Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega), \quad (-1)^{a+b} = \sigma, \quad (25)$$

а решение Ψ^ε с квантовыми числами $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\}$ – ряд

$$\Psi_0^\varepsilon(\mathbf{r}) = r^{-2} \sum_L \sum_{ab} B_{ab}^L J_{L+2}(z) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega). \quad (26)$$

3. ТРЕХМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА

Пусть правые декартовы и подвижные системы координат $S_3^{x'}$ и $S_3^{y'}$ получены поворотами системы S_3 на углы Эйлера $\omega^{x'} = (\varphi_{x'}, \theta_{x'}, \gamma^{x'})$ и $\omega^{y'} = (\varphi_{y'}, \theta_{y'}, \gamma^{y'})$, где

$$\cos \gamma^t = \operatorname{ctg} \theta \cos \theta_t - \operatorname{cosec} \theta \cos \theta_{t'}, \quad t \neq t' = x', y',$$

или же как последовательности двух поворотов $S_3 \rightarrow S_3^x \rightarrow S_3^{x'}$ и $S_3 \rightarrow S_3^y \rightarrow S_3^{y'}$, вторые из которых – повороты систем S_3^x и S_3^y соответственно на углы $\theta_{xx'}$ и $\theta_{yy'}$ вокруг коллинеарных ортов $\mathbf{e}_2^x$ и $\mathbf{e}_2^y$. Поэтому для функций $D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^{t'})$, $t' = x', y'$, описывающих результирующий поворот, имеет место разложение типа (12):

$$D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\varphi_{t'}, \theta_{t'}, \gamma^{t'}) = \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} D_{mm''}^{\ell\sigma*}(\varphi_t, \theta_t, \gamma^t) d_{m''m'}^{\ell\sigma t}(u_{tt'}), \quad (27)$$

где $t = x$ и $t' = x'$ или $t = y$ и $t' = y'$ и, как и прежде, $u_{tt'} \equiv \cos \theta_{tt'}$.

Далее вместо принятых ранее сокращенных обозначений $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_i$, $\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}_i$; $\mathbf{x}' \equiv \mathbf{x}_k$, $\mathbf{y}' \equiv \mathbf{y}_k$, u , u' и $q \equiv (r, \varphi, u)$ придется использовать полные обозначения с индексами, например, $q_i = q = (r, \varphi_i, u_i)$, $q_k = q' = (r, \varphi_k, u_k)$. Для $t = x, y$ положим $\omega_i^t \equiv (\varphi_{ti}, \theta_{ti}, \gamma_i^t) = \omega^t$ и $u_{ik}^t \equiv \cos \theta_{ik}^t$, поэтому $u_{ik}^x = u_{xx'}$, а $u_{ik}^y = u_{yy'}$.

В рассматриваемом случае центральных парных взаимодействий полный гамильтониан H системы трех частиц всегда коммутирует с тремя операторами $\mathbf{l}^2$, l_3 и P . Следовательно, полный набор ε сохраняющихся квантовых чисел состоит из собственных значений этих трех операторов $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\}$. Поэтому уравнения Фаддеева могут иметь всюду регулярные в $\mathbb{R}^6$ решения такие, что компоненты $\Psi_i = \Psi_i^\varepsilon$ и их сумма $\Psi = \Psi^\varepsilon$ являются собственными функциями операторов $\mathbf{l}^2$, l_3 и P .

Запишем искомые компоненты $\Psi_i = \Psi_i^\varepsilon$ как D^σ -ряды:

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = 2[r^2(\sin 2\varphi_i)(1 - u_i^2)^{1/2}]^{-1} \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} U_{im'}^{\varepsilon t}(q_i) D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega_i^t), \quad (28)$$

где $t = x_i$ или $t = y_i$ при каждом $i = 1, 2, 3$, а функции $U_{im'}^{\varepsilon t}$ называются приведенными D^σ -компонентами. Применив к рядам (28) правила (27), находим для их суммы $\Psi^\varepsilon \equiv \Psi_1^\varepsilon + \Psi_2^\varepsilon + \Psi_3^\varepsilon$ три ($i = 1, 2, 3$) представления в виде D^σ -рядов с аргументами $q_i \equiv (r, \varphi_i, u_i)$:

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) &= 2[r^2(\sin 2\varphi_i)(1 - u_i^2)^{1/2}]^{-1} \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} U_{m'}^{\varepsilon t}(q_i) D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega_i^t), \\ U_{m'}^{\varepsilon t}(q_i) &\equiv U_{im'}^{\varepsilon t}(q_i) + \sum_{k \neq i} \left[\frac{\sin 2\varphi_i}{\sin(2\varphi_k(q_i; \gamma_{ki}))} \right] \left[\frac{1 - u_i^2}{1 - u_k^2(q_i; \gamma_{ki})} \right]^{1/2} \times \\ &\times \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} d_{m'm''}^{\ell\sigma t}(u_{ki}^t) U_{km''}^{\varepsilon t}(r, \varphi_k(q_i; \gamma_{ki}), u_k(q_i; \gamma_{ki})), \end{aligned} \quad (29)$$

где $\varphi_k = \varphi'$ и $u_k = u'$ – функции (7) параметра $\gamma_{ki} = \gamma$ и аргументов $\varphi_i = \varphi$ и $u = u_i$. В исходных уравнениях (1), записанных в собственных представлениях $\langle \mathbf{r}_i | = \langle r, \Omega_i |$,

все искомые компоненты $\Psi_i = \Psi_i^\varepsilon$ и их сумму $\Psi = \Psi^\varepsilon$ заменим соответствующими D^σ -рядами (28) и (29). Используя (21) и (22), спроецируем полученные уравнения на их собственные D^σ -базисы и получим систему трехмерных уравнений Фаддеева в D^σ -базисе или в представлении полного углового момента и полной пространственной четности:

$$\sum_{m''=m'-1}^{m'+1} [\tilde{H}_{0m'm''}^{\ell\sigma t}(q_i) + \delta_{m'm''} E] U_{im''}^{\varepsilon t}(q_i) = V_i(r \cos \varphi_i) U_{m'}^{\varepsilon t}(q_i). \quad (30)$$

Ранг этой системы равен $3[\ell - \mu(\sigma)]$ и при $t = x$, и при $t = y$, потому что $m' = \mu(\sigma), \dots, \ell$ при каждом $i = 1, 2, 3$.

Следует отметить, что уравнения Фаддеева в D^σ -базисе, но в координатах $x_i, y_i, \theta_i, i = 1, 2, 3$, и только в случае $t = x$, впервые получены в работе [4].

4. ЛОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ

По определению ложное решение $\{S_1, S_2, S_3\}$ обращает в нуль и левую, и правую части уравнений Фаддеева:

$$[H_0(\mathbf{r}_i) - E] S_i(\mathbf{r}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad (31)$$

$$S_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} S_k(\mathbf{r}_k(\mathbf{r}_i; \gamma_{ki})) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (32)$$

Наша основная задача такова: доказать, что в любом классе $\mathcal{A}^\varepsilon, \varepsilon = \{\ell, m, \sigma\}$, ложные решения существуют всегда, и получить явные выражения всех ложных решений через коэффициенты Рейнала–Реваи. Ключевыми для предлагаемого ниже доказательства нетривиальной совместности системы уравнений (31), (32) в классе функций $\mathcal{A}^\varepsilon$ будут соотношения (16)–(18), (25), (26) и тот факт, что в этом классе индексы a и b любой базисной гипергармоники $Y_{Lab}^{\ell m}$ принимают все допустимые при данных L, ℓ и σ значения. Отметив, что число $N = N(L, \ell, \sigma)$ всех пар (a, b) этих индексов конечно и зависит от L, ℓ и σ , приступим к доказательству.

В качестве фундаментального решения S_i^L каждого $(i = 1, 2, 3)$ из уравнений (31) используем соответствующий ряд (25):

$$S_i^L(\mathbf{r}_i) = r^{-2} J_{L+2}(r\sqrt{E}) \sum_{ab} B_{iab}^L Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad (33)$$

где коэффициенты B_{iab}^L пока не определены, а индексы a и b пробегает все возможные при данных L, ℓ, m и σ значения. Вследствие правила (16) из всех функций (33) системе (32) удовлетворяют только те функции, коэффициенты B_{iab}^L которых подчиняются однородной системе линейных уравнений

$$B_{iab}^L + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell} B_{ka'b'}^L = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (34)$$

где число пар (a, b) , как и число пар (a', b') , равно N . Поэтому матрица $\mathbf{M}^L$ этой системы имеет конечную размерность: $\dim \mathbf{M}^L = 3N < \infty$. Далее, $\text{rank } \mathbf{M}^L = N$,

потому что благодаря соотношениям (17) и (18) все уравнения (34) выполняются при любых B_{2ab}^L и B_{3ab}^L , если для всех a и b положить

$$B_{1ab}^L = - \sum_{k=2}^3 \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{k1}) | a'b' \rangle_{L\ell} B_{ka'b'}^L. \quad (35)$$

Поэтому исследуемая система (34) имеет $\dim \mathbf{M}^L - \text{rank } \mathbf{M}^L = 2N$ линейно независимых решений. Найдем их нормальную фундаментальную совокупность [19], последовательно полагая все коэффициенты B_{2ab}^L и B_{3ab}^L , кроме одного из них, равными нулю. Сначала для удобства записи введем сокращенные обозначения. Пусть $\{a, b\}_{n=1}^N$ – некоторая выбранная последовательность всех разных пар (a, b) индексов a и b . Номер n или n' элемента (a, b) или (a', b') этой последовательности используем для обозначения совокупности индексов a и b или a' и b' . Например, $Y_{Ln}^{\ell m} \equiv Y_{Lab}^{\ell m}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Определим расширенную последовательность $\{a, b\}_{f=1}^{2N}$. Пусть ее элемент с номером $f \leq N$ или $f > N$ – элемент последовательности $\{a, b\}_{n=1}^N$ с номером $n = f$ или $n = f - N$. Номер f или f' элемента (a, b) или (a', b') расширенной последовательности используем для обозначения совокупности индексов a и b или a' и b' . Например, $Y_{Lf}^{\ell m} \equiv Y_{Lab}^{\ell m}$, если $f = 1, 2, \dots, N$, но $Y_{Lf}^{\ell m} \equiv Y_{L, N-f}^{\ell m}$, если $f = N + 1, \dots, 2N$.

Теперь можно записать равенства (35) как

$$B_{1n}^L = - \sum_{k=2}^3 \sum_{n'=1}^N \langle n | K(\gamma_{k1}) | n' \rangle_{L\ell} B_{kn'}^L,$$

затем ввести три столбца $\mathbf{B}_i^L$, $i = 1, 2, 3$, и столбец $\mathbf{B}^L$:

$$\mathbf{B}_i^L \equiv (B_{i1}^L, \dots, B_{iN}^L)^T, \quad \mathbf{B}^L \equiv ((\mathbf{B}_1^L)^T, (\mathbf{B}_2^L)^T, (\mathbf{B}_3^L)^T)^T,$$

и, наконец, определить частное решение $\mathbf{B}^L = \mathbf{B}^L$ системы (35) как

$$B_{1n}^{Lf} \equiv - \frac{\langle n | K(\gamma_{k1}) | f \rangle_{L\ell}}{\sqrt{2}} = - \frac{\langle f | K(-\gamma_{k1}) | n \rangle_{L\ell}}{\sqrt{2}},$$

$$B_{2n}^{Lf} = \frac{\delta_{nf}}{\sqrt{2}}, \quad B_{3n}^{Lf} = \frac{\delta_{n+N, f}}{\sqrt{2}}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Все столбцы $\mathbf{B}^{Lf}$, $f = 1, 2, \dots, 2N$, образуют нормальную совокупность фундаментальных решений $\{\mathbf{B}^{Lf}\}$ системы (35). Столбцы $\mathbf{B}^{Lf}$ и $\mathbf{B}^{Lf'}$ при $f, f' \leq N$ или $f, f' > N$ ортонормированны:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{Lf} \cdot \mathbf{B}^{Lf'} &\equiv (\mathbf{B}^{Lf})^T \mathbf{B}^{Lf'} = \sum_{i=1}^3 \sum_{n=1}^N B_{in}^{Lf} B_{in}^{Lf'} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [\langle f | K(\gamma_{k1}) | n \rangle_{L\ell} \langle n | K(-\gamma_{k1}) | f' \rangle_{L\ell} + \delta_{fn} \delta_{f'n}] = \delta_{ff'}, \end{aligned}$$

где $k = 2$ при $f, f' \leq N$ и $k = 3$ при $f, f' > N$, а сумма от произведений матричных элементов оказалась равной $\delta_{ff'}$ благодаря соотношению ортогональности (17).

Если же $f \leq N$, но $f' > N$, или, наоборот, $f > N$, но $f' \leq N$, то столбцы $\mathbf{B}^{Lf}$ и $\mathbf{B}^{Lf'}$ неортогональны. Действительно, так как согласно (5) $\gamma_{12} + \gamma_{31} = \pi - \gamma_{23}$, то по формуле сложения (18) имеем

$$2\mathbf{B}^{Lf} \cdot \mathbf{B}^{Lf'} = \sum_{n=1}^N \langle f|K(\gamma_{12})|n\rangle_{L\ell} \langle n|K(\gamma_{31})|f'\rangle_{L\ell} = \langle f|K(\gamma_{23})|f'\rangle_{L\ell}.$$

Положив $B_{iab}^L = B_{in}^{Lf}$ в формуле (33), получаем отвечающее столбцу $\mathbf{B}^{Lf}$ нормальное фундаментальное ложное решение

$$\mathbf{S}^{Lf} = (S_1^{Lf}, S_2^{Lf}, S_3^{Lf})^T, \quad S_i^{Lf}(\mathbf{r}_i) = r^{-2} J_{L+2}(r\sqrt{E}) \sum_{ab} B_{iab}^{Lf} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i). \quad (36)$$

В классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ базис таких решений является полным. Для любого ложного в этом классе решения $\mathbf{S}^\varepsilon \equiv (S_1^\varepsilon, S_2^\varepsilon, S_3^\varepsilon)^T$ верно разложение

$$\mathbf{S}^\varepsilon = \sum_L \sum_{f=1}^{2N} C_{Lf} \mathbf{S}^{Lf}, \quad C_{Lf} \equiv \int_{\mathbb{R}^6} r^5 dr d\Omega (\mathbf{S}^{Lf*})^T \mathbf{S}^\varepsilon, \quad (37)$$

и, наоборот, при любых коэффициентах C_{Lf} совокупность $\{S_1^\varepsilon, S_2^\varepsilon, S_3^\varepsilon\}$ компонент суммы $\mathbf{S}^\varepsilon$ является ложным решением системы уравнений Фаддеева (1). Фаддеевские компоненты S_i^ε любой конечной суммы $\mathbf{S}^\varepsilon$ – конечные бисферические и гиперсферические ряды

$$\begin{aligned} S_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) &= 2r^{-2} \operatorname{cosec} 2\varphi_i \sum_{ab} U_{iab}^\ell(r, \varphi_i) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}_i, \hat{y}_i), \\ U_{iab}^\ell(r, \varphi_i) &= \frac{1}{2} \sin 2\varphi_i \sum_L J_{L+2}(r\sqrt{E}) \sum_{f=1}^{2N} C_{Lf} B_{iab}^{Lf} W_{Lab}(\varphi_i); \\ S_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) &= r^{-2} \sum_L \sum_{ab} U_{iLab}^\ell(r) Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad U_{iLab}^\ell(r) = J_{L+2}(r\sqrt{E}) \sum_{f=1}^{2N} C_{Lf} B_{iab}^{Lf}, \end{aligned}$$

где функции $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}$, $Y_{Lab}^{\ell m}$ и W_{Lab} определены формулами (8)–(10).

Используя (13)–(15), компоненты S_i^ε можно представить как D^σ -ряды:

$$\begin{aligned} S_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) &= r^{-2} \sum_{m'=\mu(\sigma)}^\ell U_{im'}^{\varepsilon x}(r, \theta_i, \varphi_i) D_{mm'}^{\ell \sigma*}(\omega^x), \\ U_{im'}^{\varepsilon x}(r, \theta_i, \varphi_i) &= \sum_L J_{L+2}(\sqrt{E}r) \sum_{f=1}^{2N} C_{Lf} \sum_{ab} B_{iab}^{Lf} T_{ab}^{\ell m'} \Theta_{am}(\theta_i) W_{Lab}(\varphi_i). \end{aligned} \quad (38)$$

При любых центральных взаимодействиях V_i , $i = 1, 2, 3$, совокупность $\{U_{im'}^{\varepsilon x}\}$ всех $(m' = \mu(\sigma), \dots, \ell)$ проекций $U_{im'}^{\varepsilon x}$ компонент S_i^ε на D^σ -базис представляет собой ложное и точное решения системы (30) в случае $t = x$.

Получим два других представления ложных решений. Для этого уже найденную нормальную фундаментальную систему решений $\{\mathbf{B}^L\}$ системы (34) обозначим символом $\{\mathbf{1} \mathbf{B}^L\}$. При ее выводе независимыми считались коэффициенты B_{kn}^L , $k = 1, 2$.

Полагая теперь независимыми коэффициенты B_{kn}^L , $k = 1, 3$, или же коэффициенты B_{kn}^L , $k = 2, 3$, аналогичным образом определим еще две нормальные фундаментальные системы решений $\{ {}_2\mathbf{B}^L \}$ и $\{ {}_3\mathbf{B}^L \}$, состоящие из $2N$ столбцов ${}_2\mathbf{B}^{Lf}$ и ${}_3\mathbf{B}^{Lf}$, соответственно, $f = 1, 2, \dots, 2N$. Столбец ${}_2\mathbf{B}^{Lf}$ имеет элементы

$${}_2B_{1n}^{Lf} = \frac{\delta_{nf}}{\sqrt{2}}, \quad {}_2B_{2n}^{Lf} \equiv -\frac{\langle n|K(\gamma_{k2})|f\rangle_{L\ell}}{\sqrt{2}}, \quad {}_2B_{3n}^{Lf} = \frac{\delta_{n+N,f}}{\sqrt{2}},$$

а элементы столбца ${}_3\mathbf{B}^{Lf}$ таковы:

$${}_3B_{1n}^{Lf} = \frac{\delta_{nf}}{\sqrt{2}}, \quad {}_3B_{2n}^{Lf} = \frac{\delta_{n+N,f}}{\sqrt{2}}, \quad {}_3B_{3n}^{Lf} = -\frac{\langle n|K(\gamma_{k3})|f\rangle_{L\ell}}{\sqrt{2}},$$

где $n = 1, 2, \dots, N$. Для каждого $f = 1, 2, \dots, N$ введем две линейные комбинации $\mathbf{B}^{Lfs}$ и $\mathbf{B}^{Lfv}$ трех столбцов ${}_i\mathbf{B}^{Lf}$:

$$\mathbf{B}^{Lfs} \equiv \sum_{i=1}^3 [{}_i\mathbf{B}^{Lf} + {}_i\mathbf{B}^{L,f+N}], \quad \mathbf{B}^{Lfv} \equiv \sum_{i=1}^3 (-1)^{i-1} [{}_i\mathbf{B}^{Lf} - {}_i\mathbf{B}^{L,f+N}].$$

По построению столбцы $\mathbf{B}^{Lfs}$, $f = 1, 2, \dots, N$, состоят из элементов B_{in}^{Lfs} , $i = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, \dots, N$, и линейно независимы, а столбцы $\mathbf{B}^{Lfv}$ имеют элементы B_{in}^{Lfv} , $i = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, \dots, N$, и также линейно независимы. Следовательно, подстановка $B_{iab}^L = B_{iab}^{Lfs}$ или $B_{iab}^L = B_{iab}^{Lfv}$ в формулу (33) дает компоненты фундаментальных ложных решений двух ($g = s, v$) типов

$$S_i^{Lfg}(\mathbf{r}_i) = r^{-2} J_{L+2}(z) Y_{Lf}^{\ell mg}(\Omega_i), \quad g = s, v, \quad f = 1, 2, \dots, N,$$

где $Y_{Lf}^{\ell mg} \equiv Y_{Lab}^{\ell mg}$ – суммы (19) гипергармоник (10).

В силу свойств (20) таких сумм при любых коэффициентах C_{Lf}^s и C_{Lf}^v суммы

$$\mathbf{S}^g = r^{-2} \sum_L J_{L+2}(z) \sum_{f=1}^N C_{Lf}^g \mathbf{Y}_{Lf}^{\ell mg}, \quad g = s, v, \quad (39)$$

являются ортогональными ложными решениями ($\mathbf{S}^s \cdot \mathbf{S}^v = 0$) разных типов, а любое ложное решение $\mathbf{S}^\varepsilon$ можно представить их суммой $\mathbf{S}^\varepsilon = \mathbf{S}^s + \mathbf{S}^v$.

Сформулируем доказанную теорему существования: *В любом классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ множество $\mathcal{A}^{\varepsilon s}$ ложных решений не пустое, любой элемент $\mathbf{S}^\varepsilon$ этого множества – сумма (37) или сумма $\mathbf{S}^\varepsilon = \mathbf{S}^s + \mathbf{S}^v$ слагаемых (39).*

Теперь рассмотрим частные случаи двух и трех тождественных частиц и выделим подмножества $\mathcal{A}^{\varepsilon s\pm} \subset \mathcal{A}^{\varepsilon s}$ ложных решений, все элементы $\mathbf{S}^{\varepsilon\pm}$ которых подчиняются условиям перестановочной симметрии. Символом P_{ij} обозначим оператор перестановки частиц p_i и p_j .

Пусть для определенности частицы p_2 и p_3 – одинаковые, а p_1 и p_2 – разные. Тогда, согласно (4) $\gamma_{12} = \gamma_{31}$, но $\gamma_{12} \neq \gamma_{23}$, а компоненты $S_i^{\varepsilon\pm}$ искомых ложных решений $\mathbf{S}^{\varepsilon\pm}$ подчиняются не только системе уравнений (31), (32), но и аналогам известных условий перестановочной симметрии [2]:

$$S_1^{\varepsilon\pm}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = \pm S_1^{\varepsilon\pm}(-\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), \quad S_3^{\varepsilon\pm}(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3) = \pm P_{23} S_2^{\varepsilon\pm}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = \pm S_2^{\varepsilon\pm}(-\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3).$$

Из всех фундаментальных решений (33) подсистемы (31) этим дополнительным условиям удовлетворяют только решения с коэффициентами $B_{iab}^L \equiv B_{iab}^{L\pm}$ такими, что $B_{2ab}^{L\pm} = \pm(-1)^b B_{3ab}^{L\pm}$ при любых a и b , но $B_{1ab}^{L+} = 0$ при нечетном b и $B_{1ab}^{L-} = 0$ при четном b . Этими свойствами обладают все компоненты $B_{iab}^{Lf\pm}$ линейных комбинаций $\mathbf{B}^{Lf\pm}$, составленных из фундаментальных решений $\mathbf{B}^{Lf}$ системы (34) по правилам

$$\mathbf{B}^{Lf\pm} \equiv \mathbf{B}^{L,f+N} \pm (-1)^b \mathbf{B}^{Lf}, \quad f = \{a, b\} = 1, 2, \dots, N, \quad (40)$$

$$B_{1a'b'}^{Lf\pm} = -\frac{[(-1)^{b'} \pm 1] \langle a'b' | K(\gamma_{12}) | ab \rangle_{L\ell}}{2\sqrt{2}}, \quad (41)$$

$$B_{2a'b'}^{Lf\pm} = \pm(-1)^b B_{3a'b'}^{Lf\pm}, \quad B_{3a'b'}^{Lf\pm} = \frac{\delta_{a'a} \delta_{b'b}}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому имеется N фундаментальных ложных решений $\mathbf{S}^{Lf+}$ или $\mathbf{S}^{Lf-}$:

$$\mathbf{S}^{Lf\pm} = \mathbf{S}^{L,f+N} \pm (-1)^b \mathbf{S}^{Lf}, \quad f = 1, 2, \dots, N, \quad (42)$$

$$S_i^{Lf\pm} = r^{-2} J_{L+2}(z) \sum_{a'b'} B_{ia'b'}^{Lf\pm} Y_{La'b'}(\Omega_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Линейная оболочка всех решений $\mathbf{S}^{Lf+}$ или $\mathbf{S}^{Lf-}$ является искомым множеством $\mathcal{A}^{\varepsilon s+}$ или $\mathcal{A}^{\varepsilon s-}$ ложных решений, симметричных или антисимметричных относительно перестановки двух частиц p_2 и p_3 .

Пусть теперь все три частицы тождественные, N^+ или $N^- = N - N^+$ – число гипергармоник $Y_{Lab}^{\ell m}$ с четными или нечетными b , а индекс $f = 1, 2, \dots, N^\pm$ нумерует все разные пары (a, b) с четным или нечетным b . В этом случае по определению (4) $|\gamma_{ki}| = \pi/3$ для всех $k \neq i$, а все компоненты $S_i^{\varepsilon\pm}$ искомым ложных решений $\mathbf{S}^{\varepsilon\pm}$ симметричны или антисимметричны относительно перестановок любых двух частиц:

$$S_3^{\varepsilon\pm} = \pm P_{23} S_2^{\varepsilon\pm}, \quad S_3^{\varepsilon\pm} = \pm P_{13} S_1^{\varepsilon\pm}, \quad S_2^{\varepsilon\pm} = \pm P_{12} S_1^{\varepsilon\pm}.$$

При выборе знака плюс (минус) таким условиям удовлетворяют только те фундаментальные решения (33) подсистемы (31), у которых $B_{iab}^L \equiv B_{iab}^{L\pm}$, где $B_{iab}^L = 0$ при нечетном (четном) b и $B_{1ab}^{L\pm} = B_{2ab}^{L\pm} = B_{3ab}^{L\pm} \neq 0$ в противном случае. Эти свойства имеют все компоненты $B_{iab}^{Lf\pm}$ линейных комбинаций $\mathbf{B}^{Lf\pm}$, составленных из решений $\mathbf{B}^{Lf}$ системы (34) по правилам

$$\mathbf{B}^{Lf\pm} \equiv \sum_{i=1}^3 ({}_i \mathbf{B}^{Lf} + {}_i \mathbf{B}^{L,N+f}), \quad f = (a, b) = 1, 2, \dots, N^\pm;$$

$$B_{ia'b'}^{Lf\pm} = 2\delta_{aa'}\delta_{bb'} - [1 + (-1)^{b+b'}] \langle a'b' | K(\pi/3) | ab \rangle_{L\ell}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заменив B_{iab}^L на $B_{iab}^{Lf\pm}$ в суммах (33) и используя определения (19), получаем все фундаментальные ложные решения

$$\mathbf{S}_i^{Lf\pm} = r^{-2} J_{L+2}(z) \mathbf{Y}_{Lab}^{\ell ms}, \quad f = (a, b) = 1, 2, \dots, N^\pm.$$

Линейная оболочка всех решений $\mathbf{S}^{Lf+}$ или $\mathbf{S}^{Lf-}$ является искомым множеством $\mathcal{A}^{\varepsilon s+}$ или $\mathcal{A}^{\varepsilon s-}$ ложных решений, симметричных или антисимметричных относительно любой перестановки в системе трех частиц.

Для примера опишем два ложных решения класса $\mathcal{A}^\varepsilon$.

Пусть $\ell = 0$ и $L = 0$. При таких ℓ и L существует всего одна гипергармоника $Y_{Lab}^{\ell m} = \pi^{-3/2}$, $a = b = 0$. Эта гипергармоника инвариантна относительно кинематического преобразования, и поэтому для нее в формуле (16) $\langle 00|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L\ell} = 1$ при всех $k \neq i$. Следовательно, матрица $\mathbf{M}^0$ системы (34) имеет размер 3×3 , а все ее элементы равны единице. Значит нормальная фундаментальная система решений этой системы состоит из двух столбцов $\mathbf{B}^{Lf}$, $f = 1, 2$:

$$\mathbf{B}^{L1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)^T, \quad \mathbf{B}^{L2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T,$$

и согласно (36) имеется два фундаментальных ложных решения:

$$\mathbf{S}^{Lf} = \frac{1}{4\pi} r^{-2} J_2(\sqrt{E}r) \mathbf{B}^{Lf}, \quad f = 1, 2.$$

Их линейные комбинации (37) имеют вид

$$\mathbf{S}^\varepsilon = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} r^{-2} J_2(\sqrt{E}r) (-C_{L2} - C_{L3}, C_{L2}, C_{L3})^T,$$

не зависят от масс частиц и являются примером двухпараметрического множества ложных решений с числовыми параметрами C_{L2} и C_{L3} .

Пусть теперь три частицы тождественные, а $\ell = 0$. Тогда полный набор сохраняющихся квантовых чисел $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\} = \{0, 0, 1\}$. Согласно (38), (40) и (42) фундаментальное ложное решение $\mathbf{S}^{Lf+}$ с индексами $L = 2$ и $f = (a = 0, b = 0)$ имеет компоненты

$$S_i^{Lf+}(\mathbf{r}_i) = 2[r^2(\sin 2\varphi_i)(1 - u_i^2)^{1/2}]^{-1} U_{im'}^{\varepsilon x}(r, \varphi_i, u_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

а их D^σ -проекции $U_{im'}^{\varepsilon x}$, $m' = 0$, функционально одинаковые:

$$U_{im'}^{\varepsilon x}(r, \varphi_i, u_i) = J_4(z)(1 - u_i^2)^{1/2} \left[\sin 4\varphi_i + \frac{\sqrt{3}}{4} (\sin 2\varphi_i)^2 u_i \right],$$

и удовлетворяют системе трехмерных уравнений Фаддеева (30) в случае $t = x$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем основные результаты работы. Выведены уравнения Фаддеева (30) в представлении полного углового момента и полной пространственной четности. Показано, что в случае центральных взаимодействий такие уравнения всегда имеют ложные решения, обладающие наперед заданным полным набором $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\}$ трех сохраняющихся квантовых чисел. Предложен и проиллюстрирован элементарными примерами простой способ построения ложных решений как линейных комбинаций нормальных фундаментальных ложных решений.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-16828).

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, М., 1974.
- [2] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*, Наука, М., 1985.
- [3] В. В. Пупышев, *ЭЧАЯ*, **30** (1999), 1562.
- [4] V. V. Kostykin, A. A. Kvitsinsky, S. P. Merkuriev, *Few-Body Syst.*, **6**:2 (1989), 97.
- [5] С. Л. Яковлев, И. Н. Филихин, *ЯФ*, **56** (1993), 98; **58** (1995), 817; **60** (1997), 1926.
- [6] В. В. Пупышев, *ТМФ*, **128**:2 (2001), 268; *ЯФ*, **66** (2003), 64.
- [7] S. K. Adhikari, W. Glöckle, *Phys. Rev. C*, **19** (1979), 616; F. S. Levin, *Ann. Phys.*, **130** (1980), 139; В. В. Пупышев, *ЭЧАЯ*, **33** (2002), 844.
- [8] В. В. Пупышев, *ЭЧАЯ*, **35** (2004), 257.
- [9] J. W. Evans, *J. Math. Phys.*, **22** (1981), 1672; J. W. Evans, D. K. Hoffman, *J. Math. Phys.*, **22** (1981), 2858.
- [10] С. Л. Яковлев, *ТМФ*, **102**:3 (1995), 323.
- [11] В. А. Руднев, С. Л. Яковлев, *ЯФ*, **58** (1995), 1762.
- [12] В. В. Пупышев, *ТМФ*, **107**:3 (1996), 501.
- [13] F. T. Smith, *J. Chem. Phys.*, **31** (1959), 1352.
- [14] Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Наука, М., 1975.
- [15] С. И. Веницкий, Л. И. Пономарев, *ЭЧАЯ*, **13** (1982), 1336.
- [16] В. В. Пупышев, *ТМФ*, **136**:1 (2003), 90.
- [17] E. S. Chang, U. Fano, *Phys. Rev. A*, **6** (1972), 173.
- [18] Р. И. Джибути, Н. Б. Крупенникова, *Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел*, Мецниереба, Тбилиси, 1984.
- [19] В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, М., 1984.

Поступила в редакцию 10.10.2005,
после доработки 28.02.2006