Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Рабинович, Точные осесимметричные волновые решения уравнений Янга–Миллса, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 2, 243–248

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2083>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:01:55

© 2006 г.

А. С. Рабинович*

ТОЧНЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА

Найден класс точных осесимметричных волновых решений уравнений Янга–Миллса с $SU(2)$ -симметрией. Решения из этого класса описывают бегущие волны, распространяющиеся в вакууме со скоростью света, и содержат две произвольные дифференцируемые функции их фазы. Рассматриваются свойства источников поля, которые могут генерировать такие бегущие волны.

Ключевые слова: уравнения Янга–Миллса, потенциалы поля Янга–Миллса, осесимметричные волновые решения, $SU(2)$ -симметрия.

Рассмотрим следующие уравнения, описывающие поля Янга–Миллса с $SU(2)$ -симметрией вне их источников [1]:

$$\partial_\mu F^{k,\mu\nu} + g\varepsilon_{klm} F^{l,\mu\nu} A_\mu^m = 0, \quad (1)$$

$$F^{k,\mu\nu} = \partial^\mu A^{k,\nu} - \partial^\nu A^{k,\mu} - g\varepsilon_{klm} A^{l,\mu} A^{m,\nu}, \quad (2)$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $k, l, m = 1, 2, 3$, $A^{k,\nu}$ и $F^{k,\mu\nu}$ – соответственно потенциалы и напряженности поля Янга–Миллса, ε_{klm} – антисимметричный тензор, $\varepsilon_{123} = 1$, g – константа связи электрослабых взаимодействий, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ где x^μ – прямоугольные пространственно-временные координаты геометрии Минковского.

Уравнения Янга–Миллса с $SU(2)$ -симметрией играют значительную роль в различных моделях электрослабых взаимодействий [1], [2], однако математические свойства их решений не являются хорошо изученными ввиду нелинейности этих уравнений.

Известен ряд точных решений уравнений Янга–Миллса в сферически-симметричном случае [3], но проблема поиска решений в более сложных случаях является до сих пор актуальной.

Наша цель – найти новые точные осесимметричные волновые решения уравнений Янга–Миллса (1), (2), описывающие бегущие волны, которые распространяются со скоростью света в вакууме.

*Московский государственный университет приборостроения и информатики, Москва, Россия. E-mail: rabial@dol.ru

Такие решения уравнений (1), (2) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 A^{k,0} &= \alpha^{k,0}, & A^{k,1} &= \frac{\alpha^{k,1}x + \alpha^{k,2}y}{\rho}, \\
 A^{k,2} &= \frac{\alpha^{k,1}y - \alpha^{k,2}x}{\rho}, & A^{k,3} &= \alpha^{k,3}, \\
 \alpha^{k,\nu} &= \alpha^{k,\nu}(\tau, \rho, z), & \tau &\equiv x^0, & \rho &\equiv (x^2 + y^2)^{1/2}, \\
 x &\equiv x^1, & y &\equiv x^2, & z &\equiv x^3.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Видно, что каждый из трех двумерных векторов $(A^{k,1}, A^{k,2})$, $k = 1, 2, 3$, является суммой взаимно ортогональных векторов $(\alpha^{k,1}/\rho) \cdot (x, y)$ и $(\alpha^{k,2}/\rho) \cdot (y, -x)$. Поэтому рассматриваемые потенциалы $A^{k,\nu}$ ковариантны относительно пространственных вращений координатной системы (x, y, z) вокруг оси z и, следовательно, осесимметричны.

Подставляя формулы (3) в выражения (2) для напряженностей поля $F^{k,\mu\nu}$, получаем

$$\begin{aligned}
 F^{k,01} &= \frac{f^{k,1}x + f^{k,2}y}{\rho}, & F^{k,12} &= f^{k,4}, & F^{k,13} &= \frac{f^{k,5}x + f^{k,6}y}{\rho}, \\
 F^{k,02} &= \frac{f^{k,1}y - f^{k,2}x}{\rho}, & F^{k,23} &= \frac{f^{k,5}y - f^{k,6}x}{\rho}, \\
 F^{k,03} &= f^{k,3}, & f^{k,q} &= f^{k,q}(\tau, \rho, z), & q &= 1, 2, \dots, 6,
 \end{aligned} \tag{4}$$

где функции $f^{k,q}(\tau, \rho, z)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
 f^{k,1} &= \alpha_{\tau}^{k,1} + \alpha_{\rho}^{k,0} - g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,0}\alpha^{m,1}, & f^{k,4} &= \alpha_{\rho}^{k,2} + \frac{\alpha^{k,2}}{\rho} + g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,1}\alpha^{m,2}, \\
 f^{k,2} &= \alpha_{\tau}^{k,2} - g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,0}\alpha^{m,2}, & f^{k,5} &= \alpha_z^{k,1} - \alpha_{\rho}^{k,3} - g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,1}\alpha^{m,3}, \\
 f^{k,3} &= \alpha_{\tau}^{k,3} + \alpha_z^{k,0} - g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,0}\alpha^{m,3}, & f^{k,6} &= \alpha_z^{k,2} - g\varepsilon_{klm}\alpha^{l,2}\alpha^{m,3},
 \end{aligned} \tag{5}$$

где $\alpha_{\rho}^{k,\nu} \equiv \partial\alpha^{k,\nu}/\partial\rho$, $\alpha_{\tau}^{k,\nu} \equiv \partial\alpha^{k,\nu}/\partial\tau$, $\alpha_z^{k,\nu} \equiv \partial\alpha^{k,\nu}/\partial z$.

Подставим выражения (3) и (4) для $A^{k,\nu}$ и $F^{k,\mu\nu}$ в левую часть уравнения (1) для поля Янга–Миллса, которую обозначим через $J^{k,\nu}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 J^{k,\nu} &\equiv \partial_{\mu}F^{k,\mu\nu} + g\varepsilon_{klm}F^{l,\mu\nu}A_{\mu}^m, \\
 J^{k,0} &= j^{k,0}, & J^{k,1} &= \frac{j^{k,1}x + j^{k,2}y}{\rho}, \\
 J^{k,2} &= \frac{j^{k,1}y - j^{k,2}x}{\rho}, & J^{k,3} &= j^{k,3}, & j^{k,\nu} &= j^{k,\nu}(\tau, \rho, z),
 \end{aligned} \tag{6}$$

где функции $j^{k,\nu}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} j^{k,0} &= -f_{\rho}^{k,1} - \frac{f^{k,1}}{\rho} - f_z^{k,3} + g\varepsilon_{klm}(f^{l,1}\alpha^{m,1} + f^{l,2}\alpha^{m,2} + f^{l,3}\alpha^{m,3}), \\ j^{k,1} &= f_{\tau}^{k,1} - f_z^{k,5} + g\varepsilon_{klm}(f^{l,1}\alpha^{m,0} - f^{l,4}\alpha^{m,2} + f^{l,5}\alpha^{m,3}), \\ j^{k,2} &= f_{\tau}^{k,2} - f_{\rho}^{k,4} - f_z^{k,6} + g\varepsilon_{klm}(f^{l,2}\alpha^{m,0} + f^{l,4}\alpha^{m,1} + f^{l,6}\alpha^{m,3}), \\ j^{k,3} &= f_{\tau}^{k,3} + f_{\rho}^{k,5} + \frac{f^{k,5}}{\rho} - g\varepsilon_{klm}(f^{l,5}\alpha^{m,1} + f^{l,6}\alpha^{m,2} - f^{l,3}\alpha^{m,0}). \end{aligned} \quad (7)$$

Из уравнения (1) для поля Янга–Миллса и формул (6) получаем следующую систему уравнений:

$$j^{k,\nu}(\tau, \rho, z) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (8)$$

где $j^{k,\nu}$ определяются формулами (5) и (7).

Будем искать компоненты $\alpha^{k,\nu}$ потенциалов поля, которые удовлетворяют уравнениям (8), в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha^{1,0} &= 0, \quad \alpha^{2,0} = P(\eta, \rho), \quad \alpha^{3,0} = Q(\eta, \rho), \quad \eta = \tau - z, \\ \alpha^{1,2} &= \frac{\varphi(\rho)}{g}, \quad \alpha^{2,2} = \alpha^{3,2} = 0, \\ \alpha^{k,1} &= 0, \quad \alpha^{k,3} = \alpha^{k,0}, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (9)$$

где $P(\eta, \rho)$, $Q(\eta, \rho)$ и $\varphi(\rho)$ являются некоторыми дифференцируемыми функциями.

Тогда из (5) найдем

$$\begin{aligned} f^{1,1} &= 0, \quad f^{2,1} = P_{\rho}, \quad f^{3,1} = Q_{\rho}, \\ f^{1,2} &= 0, \quad f^{2,2} = -\varphi Q, \quad f^{3,2} = \varphi P, \\ f^{k,3} &= 0, \quad f^{1,4} = \frac{\varphi' + \varphi/\rho}{g}, \quad f^{2,4} = f^{3,4} = 0, \\ f^{k,5} &= -f^{k,1}, \quad f^{k,6} = -f^{k,2}, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (10)$$

здесь и далее $P_{\rho} \equiv \partial P / \partial \rho$, $P_{\rho\rho} \equiv \partial^2 P / \partial \rho^2$ и аналогично для Q .

Подставляя формулы (9) и (10) в выражения (7) для $j^{k,\nu}$, получаем

$$\begin{aligned} j^{1,0} &= 0, \quad j^{2,0} = -(P_{\rho\rho} + P_{\rho}/\rho - \varphi^2 P), \quad j^{3,0} = -(Q_{\rho\rho} + Q_{\rho}/\rho - \varphi^2 Q), \\ j^{1,2} &= -\frac{(\varphi' + \varphi/\rho)'}{g}, \quad j^{2,2} = j^{3,2} = 0, \\ j^{k,1} &= 0, \quad j^{k,3} = j^{k,0}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (8) и (11) вытекают уравнения

$$P_{\rho\rho} + \frac{P_{\rho}}{\rho} - \varphi^2 P = 0, \quad Q_{\rho\rho} + \frac{Q_{\rho}}{\rho} - \varphi^2 Q = 0, \quad (12)$$

$$\left(\varphi' + \frac{\varphi}{\rho}\right)' = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет следующее ненулевое решение, исчезающее на бесконечности:

$$\varphi = \frac{b}{\rho}, \quad b = \text{const} \neq 0. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (12), получаем два дифференциальных уравнения для функций P и Q :

$$P_{\rho\rho} + \frac{P_\rho}{\rho} - \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 P = 0, \quad Q_{\rho\rho} + \frac{Q_\rho}{\rho} - \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 Q = 0. \quad (15)$$

Легко проверить, что функции ρ^b и ρ^{-b} удовлетворяют уравнениям (15). Следовательно, решения уравнений (15), стремящиеся к нулю при $\rho \rightarrow \infty$, имеют вид

$$P = \frac{G(\tau - z)}{\rho^{|b|}}, \quad Q = \frac{H(\tau - z)}{\rho^{|b|}}, \quad b \neq 0, \quad (16)$$

где G и H являются произвольными дифференцируемыми функциями.

Из формул (3), (9), (14) и (16) получаем следующие выражения для потенциалов поля $A^{k,\nu}$:

$$\begin{aligned} A^{1,0} &= 0, & A^{2,0} &= \frac{G(\tau - z)}{\rho^{|b|}}, & A^{3,0} &= \frac{H(\tau - z)}{\rho^{|b|}}, \\ A^{1,1} &= \frac{b}{g} \frac{y}{\rho^2}, & A^{2,1} &= A^{3,1} = 0, & A^{1,2} &= -\frac{b}{g} \frac{x}{\rho^2}, & A^{2,2} &= A^{3,2} = 0, \\ A^{k,3} &= A^{k,0}, & k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (17)$$

Формулы (4), (10), (14) и (16) дают следующие выражения для напряженностей поля $F^{k,\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F^{1,01} &= 0, & F^{2,01} &= -\frac{|b|G(\tau - z)x + bH(\tau - z)y}{\rho^{2+|b|}}, \\ F^{3,01} &= \frac{bG(\tau - z)y - |b|H(\tau - z)x}{\rho^{2+|b|}}, \\ F^{1,02} &= 0, & F^{2,02} &= -\frac{|b|G(\tau - z)y - bH(\tau - z)x}{\rho^{2+|b|}}, \\ F^{3,02} &= -\frac{bG(\tau - z)x + |b|H(\tau - z)y}{\rho^{2+|b|}}, \\ F^{k,03} &= F^{k,12} = 0, & F^{k,13} &= -F^{k,01}, & F^{k,23} &= -F^{k,02}, & k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\tau = x^0 = ct$, где t – время.

Таким образом, мы нашли класс точных цилиндрически-симметричных решений рассматриваемых уравнений Янга–Миллса. Эти решения содержат две произвольные дифференцируемые функции $G(\tau - z)$ и $H(\tau - z)$ и произвольную ненулевую константу b и описывают бегущие волны, распространяющиеся со скоростью света в направлении оси z .

Как следует из (18), векторы $F^{k,01}$ и $F^{k,02}$ ортогональны. Следовательно, полученные решения рассматриваемых уравнений Янга–Миллса являются нетривиальными.

Рассмотрим теперь выражения (6) и (11) для компонент $J^{k,\nu}$ источников поля, которые могут генерировать исследуемые бегущие волны. Они могут быть представлены как

$$\begin{aligned} J^{1,0} &= 0, & J^{2,0} &= j^{2,0}(\tau - z, \rho), & J^{3,0} &= j^{3,0}(\tau - z, \rho), \\ J^{1,1} &= \frac{j^{1,2}(\rho)y}{\rho}, & J^{2,1} &= J^{3,1} = 0, \\ J^{1,2} &= -\frac{j^{1,2}(\rho)x}{\rho}, & J^{2,2} &= J^{3,2} = 0, \\ J^{k,3} &= J^{k,0}, & k &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) легко находим, что компоненты $J^{k,\nu}$ данных источников поля удовлетворяют дифференциальным уравнениям сохранения заряда

$$\partial_\nu J^{k,\nu} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Как видно из (19), компоненты источника $J^{1,\nu}$ соответствуют вращению носителей тока вокруг оси z . Что касается компонент источника $J^{2,\nu}$ и $J^{3,\nu}$, они удовлетворяют релятивистски-инвариантным соотношениям $J^{2,\nu} J^2_\nu = 0$, $J^{3,\nu} J^3_\nu = 0$.

Рассмотрим теперь свойства тех источников поля, расположенных на оси z , которые могут генерировать осесимметричные волновые решения вида (17). Вначале обратимся к уравнению для функции $P(\tau - z, \rho)$ (см. формулы (11)), которое приобретает следующий вид, если учесть (14):

$$P_{\rho\rho} + \frac{P_\rho}{\rho} - \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 P = -j^{2,0}. \quad (21)$$

Зная два частных решения ρ^b и ρ^{-b} линейного дифференциального уравнения (21) при $j^{2,0} = 0$, мы можем легко найти решение при ненулевой функции $j^{2,0}$ методом вариации постоянных. Применяя этот метод, получаем следующее решение уравнения (21), стремящееся к нулю при $\rho \rightarrow \infty$:

$$P = \frac{1}{2|b|} \left[\rho^{-|b|} \int_0^\rho \rho^{1+|b|} j^{2,0} d\rho + \rho^{|b|} \int_\rho^\infty \rho^{1-|b|} j^{2,0} d\rho \right]. \quad (22)$$

Пусть $\delta(\rho)$ является дельта-функцией с вращательной симметрией в плоскости (x, y) :

$$\delta(\rho) = 0, \quad \rho > 0, \quad \delta(0) = \infty, \quad \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta(\rho) dx dy = 2\pi \int_0^\infty \rho \delta(\rho) d\rho = 1. \quad (23)$$

Тогда из формулы (22) находим функцию $j^{2,0}(\tau - z, \rho)$, обеспечивающую вид функции $P(\tau - z, \rho)$ при $\rho > 0$, приведенный в (16):

$$j^{2,0} = \frac{4\pi|b|G(\tau - z)\delta(\rho)}{\rho^{|b|}}. \quad (24)$$

Совершенно аналогично находим функцию $j^{3,0}(\tau - z, \rho)$, обеспечивающую вид, приведенный в (16), для функции $Q(\tau - z, \rho)$ при $\rho > 0$:

$$j^{3,0} = \frac{4\pi|b|H(\tau - z)\delta(\rho)}{\rho^{|b|}}. \quad (25)$$

Рассмотрим уравнение в (11) для функции $\varphi(\rho)$, которое может быть представлено как

$$\varphi'' + \frac{\varphi'}{\rho} - \frac{\varphi}{\rho^2} = -gj^{1,2}. \quad (26)$$

Это уравнение имеет вид, сходный с (21) при $b = 1$. Поэтому аналогичным образом находим следующую функцию $j^{1,2}(\rho)$, обеспечивающую вид (14) для функции $\varphi(\rho)$ при $\rho > 0$:

$$j^{1,2} = \frac{4\pi b}{g} \frac{\delta(\rho)}{\rho}. \quad (27)$$

Таким образом, искомые источники поля, которые расположены на оси z и генерируют потенциалы $A^{k,\nu}$ и напряженности $F^{k,\mu\nu}$ поля вида (17) и (18), соответственно, определяются формулами (19), (23)–(25) и (27).

Список литературы

- [1] Л. Райдер, *Квантовая теория поля*, Мир, М., 1987; Н.Ф. Нелипа, *Физика элементарных частиц. Калибровочные поля*, Высшая школа, М., 1985.
- [2] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Наука, М., 1988; A. S. Rabinowitch, *Int. J. Theor. Phys.*, **39** (2000), 2447.
- [3] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **79** (1974), 276; А. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ*, **20** (1974), 430; Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Мир, М., 1988; A. S. Rabinowitch, *Russ. J. Math. Phys.*, **12** (2005), 379.

Поступила в редакцию 10.11.2005,
после доработки 6.02.2006