Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Сердобольский, Спектры бесконечномерных выборочных ковариационных матриц, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 2, 309–322

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2088>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 03:20:31

© 2006 г.

В. И. Сердобольский*

СПЕКТРЫ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЫБОРОЧНЫХ КОВАРИАЦИОННЫХ МАТРИЦ

Спектральные функции бесконечномерных случайных матриц Грама вида RR^T , где R – прямоугольная матрица с бесконечным числом строк и числом столбцов $N \rightarrow \infty$, а также спектральные функции бесконечных выборочных ковариационных матриц, подсчитанных по выборкам объема $N \rightarrow \infty$, изучаются в условиях, аналогичных асимптотике Колмогорова. Предполагается, что следы d математических ожиданий этих матриц возрастают вместе с числом N так, что отношение d/N стремится к константе. Найдено нелинейное предельное уравнение, связывающее спектральные функции случайных и неслучайных матриц и установлено асимптотическое выражение для резольвенты случайных матриц.

Ключевые слова: спектры случайных матриц, спектральные функции выборочных ковариационных матриц, спектры бесконечномерных случайных матриц.

Интерес к спектрам случайных матриц большой размерности возник в теоретической физике около полувека назад в связи с изучением спектров тяжелых ядер [1]. В настоящее время существует направление в теоретической физике, называемое “физика случайных матриц” (см. обзоры [2]). Случайные матрицы высокой размерности используются также в теории нейронных сетей и в теории случайных графов (см. ссылки в [3]).

Асимптотическая теория спектральных свойств случайных матриц растущей размерности основана Марченко и Пастуром в 1967 г. [4] и развита Гирко в серии монографий [5]–[7], а также другими авторами. Ее главным содержанием является вывод “канонических” уравнений, связывающих предельные спектры выборочных случайных матриц с предельными спектрами исходных неслучайных матриц. Методы, развитые в этой теории, были применены в [5], [8]–[10] к выборочным ковариационным матрицам при условии Колмогорова, когда вместе с ростом объема выборки N растет размерность матриц n , причем $n/N \rightarrow y > 0$. Были получены уравнения (мы будем называть их дисперсионными), связывающие главные части спектральных функций выборочных ковариационных матриц и неизвестных истинных ковариационных матриц, в том числе уравнения, связывающие резольвенты

*Московский государственный институт электроники и математики, Москва, Россия.
E-mail: vvserd@mail.ru

этих матриц. С помощью этих уравнений была разработана методика построения улучшенных и неулучшаемых методов многомерного статистического анализа [9], [10].

В последние годы возрос интерес к статистическим задачам с настолько большим числом неизвестных параметров, что оно намного превосходит объем выборки. Методы решения таких “существенно многопараметрических” задач еще не созданы. Для их создания необходимо продвижение спектральной теории случайных матриц в область размерности, намного превосходящей объем выборки. Это также представляет интерес для развития спектральной теории случайных линейных операторов в гильбертовом пространстве.

Предлагаемая статья посвящена исследованию спектральных свойств выборочных ковариационных матриц для бесконечномерных наблюдений и изучению уравнений, связывающих их спектры со спектрами неслучайных истинных ковариационных матриц.

Пусть $\mathfrak{A}$ – бесконечномерная совокупность и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \mathfrak{A}$ – бесконечномерный вектор наблюдений. Пусть $\mathfrak{X} = \{\mathbf{x}_m\}$, $m = 1, 2, \dots, N$, – выборка объема N из $\mathfrak{A}$. Ограничим распределение случайного вектора $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$ следующими двумя требованиями.

1. Пусть существуют четыре первых момента у всех компонент вектора $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$ и математическое ожидание $\mathbf{E}\mathbf{x} = 0$; обозначим $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots$ собственные значения матрицы $\Sigma = \text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

2. Пусть сходится ряд $d_1 + d_2 + d_3 + \dots$ собственных значений матрицы Σ , т.е. существует $d \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr } \Sigma > 0$.

Введем три параметра, характеризующие совокупности. Положим

$$M = \sup_{|\mathbf{e}|=1} \mathbf{E}(\mathbf{e}^T \mathbf{x})^4 > 0, \quad (1)$$

здесь и далее $\mathbf{e}$ означает неслучайный бесконечномерный единичный вектор;

$$k = \frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}^2)^2}{\mathbf{E}\mathbf{x}^2}, \quad (2)$$

здесь и далее квадрат вектора означает квадрат его длины, $\mathbf{x}^2 = |\mathbf{x}|^2$;

$$\gamma = \sup_{\|\Omega\|=1} \frac{\text{var}(\mathbf{x}^T \Omega \mathbf{x})}{\mathbf{E}(\mathbf{x}^2)^2}, \quad (3)$$

где Ω – неслучайные неотрицательно определенные симметричные бесконечномерные матрицы единичной нормы (здесь и ниже используются только спектральные нормы матриц). Очевидно, что $k \geq 1$, $\gamma \leq 1$. Введем также обозначения $\rho_i = d_i/d$, $i = 1, 2, \dots$, и $\rho = \rho_1$.

В частном случае нормально распределенного $\mathbf{x} \sim \mathbf{N}(0, \Sigma)$ имеем $M = 3\|\Sigma\|^2$, $k = 3$ и

$$\gamma = 2 \frac{\text{tr } \Sigma^2}{\text{tr } \Sigma^2 + 2 \text{tr}^2 \Sigma} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho_i^2}{1 + 2\rho_i^2} \leq 2\rho.$$

Пусть n компонент вектора $\mathbf{x} \sim \mathbf{N}(0, \Sigma)$ имеют дисперсию 1, а дисперсия остальных равна нулю. В этом случае $\rho = 1/n$ и

$$\gamma = \frac{2\overline{r_{ij}^2}}{1 + 2\overline{r_{ij}^2}}, \quad \text{где} \quad \overline{r_{ij}^2} = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n r_{ij}^2,$$

а $r_{ij} = \Sigma_{ij} / \sqrt{d_i d_j}$ – коэффициенты корреляции.

Чтобы применить методы, развитые в [9], [10], к бесконечномерным векторам, введем асимптотику, сохраняющую основную идею асимптотики Колмогорова: при $N \rightarrow \infty$ суммарная дисперсия переменных d имеет тот же порядок величины, что и объем выборки N . Будем считать, что величины N и d стремятся к бесконечности, при этом величины M , $d_1 \leq \sqrt{M}$, k и $b = d/N$ ограничены, а γ и ρ стремятся к нулю.

1. ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦ ГРАМА

Сначала исследуем спектральные свойства простых случайных матриц вида

$$S = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T, \quad (4)$$

где $\mathbf{x}_m$ – случайные независимые одинаково распределенные бесконечномерные векторы, $m = 1, 2, \dots, N$. Эти матрицы представляют собой специальные выборочные ковариационные матрицы, построенные по выборке объема N в случае, когда математические ожидания векторов наблюдений известны априори, и, следовательно, их можно положить равными нулю.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{N} &= b\rho, & \frac{\text{tr } \Sigma}{N} &= b, & \frac{\text{tr } \Sigma^2}{N^2} &\leq b^2 \rho, & \Sigma &= \mathbf{E}S, & \mathbf{E}(\mathbf{x}^2)^2 &\leq k d^2, \\ \text{var} \left(\frac{\mathbf{x}^2}{N} \right) &\leq k b^2 \gamma, \end{aligned}$$

причем для $\mathbf{x} \sim \mathbf{N}(0, \Sigma)$ справедлива оценка $\text{var}(\mathbf{x}^2/N) \leq 2b^2 \rho$.

Как в [9], [10], для исследования спектральных функций применим метод попеременного исключения независимых векторов $\mathbf{x}_m$. Пусть

$$\begin{aligned} R_0 &= R_0(t) = (S + tI)^{-1}, & H_0 &= H_0(t) = S R_0(t), & t &> 0, \\ S^m &= S - \frac{1}{N} \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T, & R_0^m(t) &= (S^m + tI)^{-1}, \\ \phi_m &= \phi_m(t) = \frac{1}{N} \mathbf{x}_m^T R_0^m(t) \mathbf{x}_m, & \psi_m &= \psi_m(t) = \frac{1}{N} \mathbf{x}_m^T R_0(t) \mathbf{x}_m, \\ v_m &= v_m(t) = \mathbf{e}^T R_0^m(t) \mathbf{x}_m, & u_m &= u_m(t) = \mathbf{e}^T R_0(t) \mathbf{x}_m, \end{aligned} \quad (5)$$

$m = 1, 2, \dots$. Получаем тождества

$$R_0 = R_0^m - \frac{1}{N} R_0^m \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T R_0, \quad \psi_m = \phi_m - \phi_m \psi_m, \quad u_m = v_m - \psi_m v_m, \quad (6)$$

и неравенства

$$|\psi_m| \leq 1, \quad |u_m| \leq |v_m|, \quad \|R_0\| \leq \|R_0^m\| \leq \frac{1}{t}, \quad \mathbf{E}v_m^4 \leq \frac{M}{t^4}$$

для всех $m = 1, 2, \dots$. Для оценки дисперсии функционалов, равномерно зависящих от большого числа независимых переменных, воспользуемся техникой разложения в сумму мартингал-разностей. Нам будет достаточно сослаться на неравенство Буркхолдера. Приведем следующее утверждение без доказательства.

ЛЕММА 1. Пусть дано множество $\mathfrak{X} = \{X_1, \dots, X_N\}$ случайных независимых переменных. Рассмотрим функцию $\varphi(\mathfrak{X})$ такую, что $\varphi(\mathfrak{X}) = \varphi^m(\mathfrak{X}) + \Delta_m(\mathfrak{X})$, где $\varphi^m(\mathfrak{X})$ не зависит от X_m при каждом $m = 1, \dots, N$. Если при всех m существуют вторые моменты функций $\varphi(\mathfrak{X})$ и $\Delta_m = \Delta_m(\mathfrak{X})$, то

$$\text{var } \varphi(\mathfrak{X}) \leq \sum_{m=1}^N \mathbf{E}(\Delta_m - \mathbf{E}_m \Delta_m)^2,$$

где $\mathbf{E}_m$ – оператор математического ожидания, вычисляемого интегрированием только по распределению X_m .

ЛЕММА 2. При $t > 0$ дисперсия $\text{var}(\mathbf{e}^T R_0(t) \mathbf{e}) \leq M/(Nt^4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом m в силу (6) имеем $\mathbf{e}^T R_0(t) \mathbf{e} = \mathbf{e}^T R_0^m(t) \mathbf{e} - u_m v_m / N$. Пользуясь разложением по мартингал-разностям из леммы 1, находим, что

$$\text{var}(\mathbf{e}^T R_0(t) \mathbf{e}) \leq \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N |\mathbf{E} u_m v_m|^2 \leq \frac{1}{N} \mathbf{E} v_m^4.$$

Получаем утверждение леммы.

Для нормальных наблюдений $\text{var}(\mathbf{e}^T R_0(t) \mathbf{e}) \leq 3bd_1\rho/t^4$.

ЛЕММА 3. При $t > 0$ для каждого $m = 1, 2, \dots, N$ имеют место оценки $\text{var } \phi_m(t) \leq a\omega$ и $\text{var } \psi_m(t) \leq a\omega$, где

$$\omega = ak \frac{b^2}{t^2} \left(\gamma + \frac{M}{Nt^2} \right), \quad (7)$$

величины M , K и γ определены формулами (1)–(3), а коэффициент a есть не зависящая от N постоянная (далее мы сохраним в оценках общее обозначение a для числового множителя, не фиксируя его конкретное значение).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Omega = \mathbf{E}R_0^m(t)$, $\Delta_m = R_0^m(t) - \Omega$. Имеем

$$\text{var } \phi_m = \text{var} \left(\frac{1}{N} \mathbf{x}_m^T \Omega \mathbf{x}_m \right) + \frac{1}{N^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}_m^T \Delta_m \mathbf{x}_m)^2. \quad (8)$$

Первое слагаемое в (8) не превосходит величины $kb^2\gamma/t^2$, второе слагаемое равно $N^{-2} \mathbf{E}(\mathbf{x}_m^2)^2 \mathbf{E}(\mathbf{e}^T \Delta_m \mathbf{e})^2$, где случайные $\mathbf{e} = \mathbf{x}_m/|\mathbf{x}_m|$. Замечаем, что $\mathbf{E}(\mathbf{e}^T \Delta_m \mathbf{e})^2 =$

$\text{var}(\mathbf{e}^T R_0^m \mathbf{e})$, где правую часть можно оценить сверху, пользуясь леммой 2. Находим, что

$$\frac{1}{N^2} \mathbf{E}(\mathbf{x}_m^T \Delta_m \mathbf{x}_m)^2 \leq \frac{1}{N^3 t^4} M \mathbf{E}(\mathbf{x}_m^2)^2 \leq \frac{1}{N t^4} a k M b^2$$

и, следовательно, $\text{var} \phi_m \leq a\omega$, где ω определено формулой (7). Первое неравенство в утверждении леммы получено, второе неравенство следует из тождества $\psi_m = (1 + \phi_m)^{-1} \phi_m$.

Для нормальных наблюдений остаточный член (7) равен

$$\omega = a \left(1 + \frac{b d_1}{t^2} \right) \frac{b^2 \rho}{t^2}.$$

Пусть $s = s(t) = 1 - N^{-1} \text{tr} \mathbf{E} H_0(t)$. Легко видеть, что $|1 - s| \leq b/t$ при $t > 0$.

ТЕОРЕМА 1. При $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} H_0(t) &= s(t) (s(t) \Sigma + tI)^{-1} \Sigma + \Omega, \\ 1 - s(t) &= \frac{1}{N} s(t) \text{tr} [(s(t) \Sigma + tI)^{-1} \Sigma] + o, \end{aligned} \quad (9)$$

где Ω – симметричная неотрицательно определенная бесконечномерная матрица такая, что

$$\|\Omega\| \leq a \sqrt{k} \tau^2 \left(g \sqrt{\gamma} + \frac{1 + g\tau}{\sqrt{N}} \right); \quad |o| \leq a k \tau^2 \left[g^2 \sqrt{\gamma} + \frac{1 + g\tau + g^2 \tau}{\sqrt{N}} \right]; \quad (10)$$

$$\tau = \sqrt{M}/t, \quad g = b/\sqrt{M}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим первое из тождеств (6) справа на $\mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T$ и вычислим математическое ожидание. Получим

$$\mathbf{E} R_0 S = \mathbf{E} R_0^m \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T - \frac{1}{N} \mathbf{E} R_0^m \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m R_0 \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T = \mathbf{E} R_0^m \Sigma - \mathbf{E} \psi_m R_0^m \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T. \quad (11)$$

При этом $\mathbf{E} \psi_m = N^{-1} \mathbf{E} \text{tr} R_0 S = N^{-1} \mathbf{E} \text{tr} H_0 = 1 - s$. Пусть $\delta_m = \psi_m - \mathbf{E} \psi_m$. Подставляем $R_0 S = H_0$, $\psi_m = 1 - s + \delta_m$ в (11) и получаем

$$\mathbf{E} H_0 = s \mathbf{E} R_0^m \Sigma - \mathbf{E} R_0^m \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T \delta_m. \quad (12)$$

Заменяем в первом члене правой части равенства (12) матрицу R_0^m на R_0 . С учетом того, что $|s| \leq 1 + b/t$, вклад разности $R_0^m - R_0$ в это слагаемое при некотором $\mathbf{e}$ по норме не превосходит

$$\frac{1}{N} |s \mathbf{e}^T R_0^m \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T R_0 \Sigma \mathbf{e}| \leq \frac{1}{N} |s| d_1 \mathbf{E} |v_m u_m| \leq \frac{1}{N} |s| \mathbf{E} v_m^2 \leq \frac{1}{N t^2} \left(1 + \frac{b}{t} \right) \sqrt{M} d_1.$$

Второй член правой части равенства (11) по норме не больше

$$\mathbf{E} |v_m(\mathbf{x}_m^T \mathbf{e}) \delta_m| \leq \sqrt{\mathbf{E} v_m^2 (\mathbf{x}_m^T \mathbf{e})^2 \mathbf{E} \delta_m^2} \leq a \frac{\sqrt{M \omega}}{t},$$

где ω определено в (7). Получаем оценку нормы:

$$\|\mathbf{E}H_0 - s\mathbf{E}R_0\Sigma\| \leq a\sqrt{k}\tau^2\left(g\sqrt{\gamma} + \frac{1+g\tau}{\sqrt{N}}\right).$$

Первое неравенство в (10) доказано.

Далее, первый член правой части равенства (12) равен $s\mathbf{E}\Sigma + \Omega_1$, где Ω_1 – матрица, для которой можно записать следующую оценку:

$$\frac{1}{N}|\mathrm{tr}\,\Omega_1| = \frac{a}{N}|\mathbf{E}\mathbf{x}_m^T R_0^m \Sigma R_0 \mathbf{x}_m| \leq \frac{1}{N}|s|d_1\mathbf{E}|u_mv_m| \leq \frac{1}{Nt^2}\left(1 + \frac{b}{t}\right)d_1\sqrt{M}.$$

Второй член правой части равенства (12) составляет матрицу Ω_2 , для которой имеем аналогичную оценку

$$\frac{1}{N}|\mathrm{tr}\,\Omega_2| \leq \frac{1}{N}\mathbf{E}|(\mathbf{x}_m^T R_0^m \mathbf{x}_m)\delta_m| \leq \frac{1}{N}\sqrt{\frac{\mathbf{E}(\mathbf{x}_m^2)^2}{t^2\mathbf{E}\delta_m^2}} \leq ab\frac{\sqrt{k\omega}}{t}.$$

Объединяя эти две оценки, получаем второе неравенство в (10).

Частный случай: переход к конечномерным переменным. Предположим, что $0 < d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ при некотором n и $d_m = 0$ при $m > n$. Обозначим отношение Колмогорова n/N как y . Рассмотрим спектральные функции, использованные в [1]–[4]: $\tilde{H}_0 = \tilde{H}_0(z) = (I + zS)^{-1}$ и $\tilde{h} = \tilde{h}(z) = n^{-1}\mathrm{tr}\,\tilde{H}_0(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Заметим, что введенная выше матрица $R_0(z) = z^{-1}\tilde{H}_0(z^{-1})$, а $\tilde{s}(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 - y + y\tilde{h}(z) = s(t)$, где $t = 1/z > 0$. Параметр γ , введенный в [9], [10], не больше параметра γ , определенного формулой (3). Согласно лемме 2.3 из [10] (в наших обозначениях) $\mathrm{var}\,\psi_m \leq 2b^2/t^2(\gamma + M/(Nt^2))$, что усиливает оценку, приведенную в лемме 3, за счет отсутствия коэффициента $k \geq 1$.

Дисперсионные уравнения, найденные в [9] и [10], имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\tilde{H}_0(z) &= (I + z\tilde{s}(z)\Sigma)^{-1} + \tilde{\Omega}, \\ \tilde{s}(z) &= 1 - y + N^{-1}\mathrm{tr}(I + zS)^{-1} = 1 - y + N^{-1}\mathrm{tr}(I + z\tilde{s}(z)\Sigma)^{-1} + \tilde{\delta},\end{aligned}$$

где $\|\tilde{\Omega}\| \leq a\tau^2(y\sqrt{\gamma} + 1/N)$ и $|\tilde{\delta}| = y\|\tilde{\Omega}\|$ с остаточными членами, отличающимися от остаточных членов, которые приведены в [9], [10], отсутствием коэффициента $k \geq 1$.

Таким образом, теорема 1 обобщает теоремы 1 и 2.1 из [9] и [10], соответственно, а также предельные теоремы, доказанные в [5]–[7].

2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СТАНДАРТНЫХ ВЫБОРОЧНЫХ КОВАРИАЦИОННЫХ МАТРИЦ

Стандартная выборочная ковариационная матрица имеет вид

$$C = N^{-1} \sum_{m=1}^N (\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}})^T,$$

где $\bar{\mathbf{x}} = N^{-1} \sum_{m=1}^N \mathbf{x}_m$ – вектор выборочных средних. Заметим, что $C = S - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}}^T$. Воспользуемся этим соотношением для изучения спектральных функций матрицы C .

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеют место следующие соотношения: $\mathbf{E} \bar{\mathbf{x}}^2 = b$, $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}}^2)^2 \leq (2k + 1)b^2$. Действительно, равенство очевидно. Далее,

$$\mathbf{E}(\bar{\mathbf{x}}^2)^2 = b^2 + \text{var } \bar{\mathbf{x}}^2 = b^2 + 2N^{-2}(1 - N^{-1}) \text{tr } \Sigma^2.$$

Здесь

$$\text{tr } \Sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{\infty} [\mathbf{E}(x_i x_j)]^2 \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathbf{E}(x_i x_j)^2 = \mathbf{E}(\mathbf{x}^2)^2 \leq kd^2,$$

откуда получаем требуемое неравенство.

Пусть

$$\begin{aligned} R &= R(t) = (C + tI)^{-1}, & H &= H(t) = R(t)C, & \Phi &= \Phi(t) = \bar{\mathbf{x}}^T R_0(t) \bar{\mathbf{x}}, \\ \Psi &= \Psi(t) = \bar{\mathbf{x}}^T R(t) \bar{\mathbf{x}}, & V &= V(t) = \mathbf{e}^T R_0(t) \bar{\mathbf{x}}, & U &= U(t) = \mathbf{e}^T R(t) \bar{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

Имеем тождества $(1 + \Psi)(1 - \Phi) = 1$, $U = V + U\Phi$. Нетрудно убедиться, что $0 \leq \Phi \leq 1$.

ЛЕММА 4. При $t > 0$ имеют место оценки

$$|\mathbf{E}V|^2 \leq \sqrt{M} \frac{\omega}{t^2}, \quad \text{var } V \leq a \frac{\sqrt{M}}{Nt^2} \left(1 + \sqrt{kM} \frac{b}{t^2} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Замечаем, что при каждом m для величин v_m , u_m , ψ_m , введенных в (5), справедливы следующие равенства: $\mathbf{E}v_m = 0$, $\mathbf{E}V = \mathbf{E}u_m = -\mathbf{E}v_m(\psi_m - \mathbf{E}\psi_m)$. Значит, $|\mathbf{E}V|^2 \leq \mathbf{E}v_m^2 \text{var } \psi_m \leq a\sqrt{M}\omega/t^2$.

Дисперсию V оцениваем с помощью леммы 1. Пусть $\tilde{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} - N^{-1}\mathbf{x}_m$, где $\mathbf{x}_m$ – исключаемый вектор выборки. Пользуясь первым из соотношений (6), записываем V в виде

$$V = \mathbf{e}^T R_0^m \tilde{\mathbf{x}} + \frac{1}{N} \mathbf{e}^T R_0 \mathbf{x}_m - \frac{1}{N} \mathbf{e}^T R_0 \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^T R_0^m \tilde{\mathbf{x}},$$

где первое слагаемое не зависит от $\mathbf{x}_m$. Согласно лемме 1

$$\text{var } V \leq N^{-2} \sum_{m=1}^N \mathbf{E}v_m^2 (1 - w_m)^2 \leq 2N^{-1} \sqrt{\mathbf{E}v_m^4 (1 + \mathbf{E}w_m^4)},$$

где $w_m \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}_m^T R_0^m \tilde{\mathbf{x}}$. Замечаем, что $\mathbf{E}w_m^4 \leq M \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}^2)^2 / t^4 \leq 3Mkb^2 / t^4$. Получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 5. При $t > 0$ имеют место оценки

$$\|\mathbf{E}(R(t) - R_0(t))\| \leq a \frac{k\tau}{t} \left[A\gamma + \frac{B}{\sqrt{N}} \right], \quad \mathbf{E} \frac{1}{N} \text{tr}(H(t) - H_0(t)) \leq \frac{b}{Nt},$$

где $A = g^2 \tau^2$, $B = 1 + g + g\tau + g^2 \tau^4$ (напомним, что $\tau = \sqrt{M}/t$, $g = b/\sqrt{M}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем равенство $R - R_0 = R\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}^T R_0$, причем найдется такой неслучайный вектор $\mathbf{e}$, что $\|\mathbf{E}(R - R_0)\| = \mathbf{E}(\mathbf{e}^T R\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}^T R_0 \mathbf{e}) = \mathbf{E}UV$. Подставляем $U = V + U\Phi$. Находим, что

$$|\mathbf{E}UV| = |\mathbf{E}V^2 + \mathbf{E}UV\Phi| \leq \mathbf{E}V^2 + \sqrt{\text{var } V} \sqrt{\mathbf{E}U^2\Phi^2}.$$

Здесь $\Phi \leq 1$, $\mathbf{E}U^2 \leq \mathbf{E}\bar{\mathbf{x}}^2/t^2$. В силу леммы 4 выражение в правой части неравенства для $|\mathbf{E}UV|$ с точностью до числового множителя не превосходит

$$|\mathbf{E}V|^2 + \text{var } V + \sqrt{\text{var } V} \sqrt{bt^{-2}}.$$

Подставляя оценки сверху для $|\mathbf{E}V|^2$ и $\text{var } V$ из леммы 4 и ω из леммы 3, приходим к искомым оценкам.

ТЕОРЕМА 2. При $t > 0$

$$\mathbf{E}H(t) = s(t)(s(t)\Sigma + tI)^{-1}\Sigma + \Omega,$$

$$\text{где } \|\Omega\| \leq k\tau(A\sqrt{\gamma} + B/\sqrt{N}), \quad A = g\tau(1 + g\tau)\sqrt{\gamma}, \quad B = (1 + g)(1 + \tau) + g^2\tau^4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $H_0(t) - H(t) = t(R(t) - R_0(t))$, где оценка последней разности приведена в лемме 5. Комбинируя оценки в лемме 5 и в теореме 1, получаем оценку $\|\Omega\|$, упомянутую в формулировке теоремы.

Видно, что главные части математических ожиданий матриц $H(t)$ и $H_0(t)$ по норме асимптотически не отличаются.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Аналогично работам [8]–[10] сформулируем специальные асимптотические условия, сохраняющие главную идею асимптотики Колмогорова: суммарная дисперсия переменных растет с той же скоростью, что и объем выборки. Рассмотрим последовательность

$$\mathfrak{P} = (M, \Sigma, k, \gamma, \mathfrak{X}, S)_N, \quad N = 1, 2, \dots,$$

задач изучения спектров бесконечномерных матриц S по выборкам $\mathfrak{X}$ объемов N из бесконечномерных совокупностей с ковариационными матрицами $\Sigma = \text{cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ и параметрами M , k и γ , определенными в формулах (1)–(3) (индексы N у аргументов $\mathfrak{P}$ выписывать не будем). Рассмотрим эмпирическую функцию распределения собственных значений d_i матрицы Σ

$$G_N^0(v) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\infty} d_i \cdot \text{ind}(d_i < v). \quad (13)$$

Сделаем следующие предположения.

- А. При больших N параметры $M < c_1$, где c_1 от N не зависит.
- Б. При больших N параметры $k < c_2$, где c_2 от N не зависит.
- В. При $N \rightarrow \infty$ величины $b = b_N \stackrel{\text{def}}{=} \text{tr } \Sigma / N \rightarrow \beta > 0$.

Г. При $N \rightarrow \infty$ величины $\gamma = \gamma_N \rightarrow 0$.

Д. Почти при всех $v > 0$ существует предел

$$G^0(v) = \lim_{N \rightarrow \infty} G_N^0(v).$$

Очевидно, что $G_N^0(0) = 0$ и $G_N^0(c_3) = G^0(c_3) = \beta$ при всех N , где $c_3 = \sqrt{M}$.

Пусть (как и выше) $R_0(t) = (S + tI)^{-1}$, $H_0(t) = R_0(t)S$, $R(t) = (C + tI)^{-1}$, $H(t) = R(t)C$.

ТЕОРЕМА 3. *В предположениях А–Д при $N \rightarrow \infty$ в случае вещественных $z = t > 0$ или комплексных z с $\text{Im } z > 0$ имеют место сходимости*

$$\begin{aligned} s(z) = s_N(z) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 - \mathbf{E} N^{-1} \text{tr } H_0(z) \rightarrow \sigma(z), \\ 1 - \mathbf{E} N^{-1} \text{tr } H(z) &\rightarrow \sigma(z), \end{aligned} \quad (14)$$

где функция $\sigma(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma(z) = 1 - \sigma(z) \int \frac{1}{\sigma(z)v + z} dG^0(v). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переписываем второе из уравнений (9), используя функцию распределения $G_N^0(v)$, введенную в (13):

$$1 = s(z) + s(z) \int (s(z)v + t)^{-1} dG_N^0(v) + o_N, \quad (16)$$

где остаточный член o_N стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Здесь функция под интегралом непрерывна, ограничена и $G_N^0(v) \rightarrow G^0(v)$ согласно условию Д. Правая часть (16) с точностью до o_N монотонно зависит от $s = s_N$ и при каждом N однозначно определяет величину $s_N(t)$; можно сделать вывод, что для каждого $t > 0$ при $N \rightarrow \infty$ существует предел $\sigma(t) = \lim s_N(t)$. Получаем первое утверждение теоремы, второе утверждение следует из леммы 5.

Рассмотрим эмпирические спектральные функции матриц S и C :

$$G_{0N}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} N^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(S) \cdot \text{ind}(\lambda_i < u), \quad u > 0,$$

где $\lambda_i(S)$ – собственные значения S , и

$$G_N(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E} N^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(C) \cdot \text{ind}(\lambda_i < u), \quad u > 0,$$

где $\lambda_i(C)$ – собственные значения матрицы C . Очевидно, $G_{0N}(0) = G_N(0) = 0$ и $G_{0N}(u) \leq b$, $G_N(u) \leq b$ при всех $u > 0$, при этом

$$s(z) = s_N(z) = 1 - \int (u + z)^{-1} dG_{0N}(u). \quad (17)$$

Из (15) следует, что функция $\sigma(z)$ регулярна при $z > 0$ и допускает аналитическое продолжение в область вне полуоси $z < 0$.

Предположим, что при всех z, z' , не лежащих на отрицательной части вещественной оси, выполняются условия Гельдера

$$|\sigma(z) - \sigma(z')| \leq a|z - z'|^\delta, \quad a, \delta > 0. \quad (18)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть справедливы предположения А–Д и условие (18). Тогда

1) существует такая монотонно возрастающая функция $G(u) \leq \beta$, что при $N \rightarrow \infty$ почти всюду имеют место сходимости к общему пределу: $G_{0N}(u) \rightarrow G(u)$, $G_N(u) \rightarrow G(u)$;

2) при всех z , не лежащих на полуоси $z \leq 0$,

$$1 - \sigma(z) = \int \frac{1}{u+z} dG(u); \quad (19)$$

3) почти всюду при $u > 0$

$$G'(u) = \pi^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{Im} \sigma(-u + i\varepsilon). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $G_{0N}(u) = bF_N(u)$, где $F_N(u)$ – некоторая монотонная функция со свойствами функции распределения. Замечаем, что при фиксированном $z = -u + i\varepsilon$, где $u > 0$, $\varepsilon > 0$, функция $\operatorname{Im} s(z)/(b\pi)$ представляет собой ε -размытую плотность $F_N(u)$. Из последовательности функций $\{F_N(u)\}$ выделим две какие-нибудь сходящиеся подпоследовательности $F_N^\nu(u) \rightarrow F^\nu(u)$, $\nu = 1, 2$. Пусть $u > 0$ есть точка непрерывности как $F^1(u)$, так и $F^2(u)$. Тогда размытые плотности распределений $F_N^1(u)$ и $F_N^2(u)$ при $N \rightarrow \infty$ сходятся, причем к общему пределу

$$F(u, \varepsilon) = \frac{1}{\pi\beta} \int \operatorname{Im} \sigma(-u' + i\varepsilon) du'. \quad (21)$$

В силу условия Гельдера при каждом $u > 0$ существуют пределы

$$\sigma(-u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sigma(-u + i\varepsilon), \quad F(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(u, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{N \rightarrow \infty} F_N(u).$$

Функция $G(u) = \beta F(u)$ есть искомый предел $G_N(u)$. Далее, при $z = -u + i\varepsilon$, $u > 0$, $\varepsilon > 0$ функции $f(z) = -\mathbf{E} \operatorname{Im} N^{-1} \operatorname{tr} H(z)/(b\pi)$ представляют собой размытые плотности для $G_N(u)/b$. В силу (14) эти функции при $N \rightarrow \infty$ сходятся, причем к производной функции $F(u, \varepsilon)$. При $\varepsilon \rightarrow +0$ имеем $\operatorname{Im} f(z) \rightarrow G'(u)$. Уравнение (19) следует из (17). Теорема доказана.

Уравнения (15) и (19) устанавливают функциональную связь между спектрами матриц Σ и S , C . Будем называть $\mathfrak{S} = \{u: u > 0 \text{ \& } G'(u) > 0\}$ областью (предельного) спектра матриц S .

ТЕОРЕМА 5. Пусть справедливы предположения А–Д, выполняется условие (18), и, кроме того, величины $d_1 \rightarrow \alpha > 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Тогда в области спектра при вещественных $z = -u > 0$, $u \in \mathfrak{S}$, определена функция $\sigma(z)$ и имеют место следующие соотношения:

$$u \int \frac{1}{|\sigma(z)v - u|^2} dG^0(v) = 1, \quad (22.1)$$

$$|\sigma(z)|^2 \int \frac{v}{|\sigma(z)v - u|^2} dG^0(v) = 1, \quad (22.2)$$

$$u \leq \alpha |\sigma(z)|^2, \quad (22.3)$$

$$1 - \sqrt{\frac{\beta}{u}} \leq \operatorname{Re} \frac{1}{\sigma(z)} \leq 1 + \sqrt{\frac{\beta}{u}}, \quad (22.4)$$

$$u \leq (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2. \quad (22.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = -u + i\varepsilon$, $u, \varepsilon > 0$. Положим $\sigma_0 = \sigma_0(z) = \operatorname{Re} \sigma(z)$, $\sigma_1 = \sigma_1(z) = \operatorname{Im} \sigma(z)$,

$$I_k = I_k(z) = \int \frac{v^k}{|v\sigma(z) + z|^2} dG^0(v). \quad (23)$$

В силу условия Гельдера функции $\sigma(z)$ и $I_k(z)$, $k = 0, 1$, ограничены и непрерывны при каждом $u > 0$ и $\varepsilon \rightarrow +0$, а также определены и непрерывны при $z = -u < 0$. Из (19) видно, что знак $\sigma_1(z)$ при всех z совпадает со знаком ε , т.е. $\sigma_1(z) > 0$. Зафиксируем некоторое $u \in \mathfrak{S}$ и положим $\sigma_1 = \sigma_1(-u) > 0$. Знаменатель под интегралом в (23) не меньше $u^2 \sigma_1^2 / |\sigma|^2$ и ограничен при фиксированном $u > 0$ и $\varepsilon \rightarrow +0$. Приравниваем мнимые части в равенстве (15), получаем $1 - uI_0 = I_0 \sigma_0 \varepsilon / \sigma_1$. При $\varepsilon \rightarrow +0$ имеем $uI_0 \rightarrow 1$. В пределе получаем соотношение (22.1) в утверждении теоремы.

Поделим теперь обе части (15) на σ и после этого сравним их мнимые части. Находим, что $I_1 - |\sigma|^{-2} = I_0 \varepsilon / \sigma_1 \rightarrow 0$. Получаем формулу (22.2).

Заметим, что область интегрирования в (23) ограничена отрезком $[0, \alpha]$. Следовательно, $I_1 \leq \alpha I_0$. Подставляя найденные предельные значения I_0 и I_1 , получаем утверждение (22.3).

Применим теперь неравенство Коши–Буняковского к уравнению (15): при $z = -u < 0$

$$\left| \frac{1 - \sigma(z)}{\sigma(z)} \right|^2 \leq \beta \int \frac{1}{|\sigma(z)v + z|^2} dG^0(v) = \frac{\beta}{u},$$

откуда получаем утверждение (22.4).

Рассмотрим полученные неравенства на границе области $\mathfrak{S}$, где в силу (20) $\sigma_1 = 0$. В этой точке при $\beta \leq u$ имеем $\sqrt{\alpha/u} \geq |\sigma|^{-1} \geq |\sigma_0/\sigma^2| \geq 1 - \sqrt{\beta/u}$. Приходим к утверждению (22.5) теоремы.

4. НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ

Модель 1. Пусть при каждом N только n собственных значений Σ отличны от нуля, $n/N \rightarrow y > 0$ при $N \rightarrow \infty$. Это случай асимптотики растущей размерности, введенной Марченко и Пастуром, которая лежит в основе известной теории спектров случайных матриц Гирко [5]–[7] и теории существенно многомерного статистического анализа, развитой в [9] и [10].

Рассмотрим частный случай, когда при каждом N (и n) все n ненулевых собственных значений Σ совпадают: $\alpha = d_1 = d_2 = \dots = d_n$. Тогда $G^0(v) = y\alpha \cdot \text{ind}(v < \alpha)$, и из уравнения (15) при $\varepsilon \rightarrow +0$ получаем

$$(1 - \sigma(z))(\sigma(z)\alpha - u) = y\alpha\sigma(z),$$

где $z = -u < 0$. Перепишем квадратное уравнение относительно $\sigma = \sigma(z)$ в виде $A\sigma^2 + B\sigma + C = 0$, где $A = \alpha$, $B = \alpha(1 - y) + u$, $C = u$.

Учитывая (20), находим предельную производную

$$G'(u) = \pi^{-1} \text{Im } \sigma(z) = \frac{1}{2\pi\alpha} \text{Im } \sqrt{B^2 - 4AC} = \frac{1}{2\pi\alpha} \sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)}, \quad u > 0,$$

где $u_{\pm} = \alpha(1 \pm \sqrt{y})^2$. При $y \neq 1$ плотность предельного распределения $F(u)$ ненулевых собственных значений матриц S равна $F'(u) = G'(u)/yu$, а в точке $u = 0$ при $y > 1$ функция $F(u)$ имеет скачок, равный $\alpha(1 - 1/y)$. Этот предельный спектр был найден в конечномерной постановке Марченко и Пастуром в 1967 г. [4].

Модель 2. Усложним модель 1, добавив к $n = n_1$ ненулевым собственным значениям Σ бесконечный “хвост” бесконечно малых равных между собой собственных значений. Пусть при каждом N при растущих $n = n(N)$ и $m = m(N)$ $d_1 = d_2 = \dots = d_n = \alpha > 0$, а $d_{n+1} = d_{n+2} = d_{n+m} = \delta > 0$, причем $n/N \rightarrow y_1 > 0$, $m/N \rightarrow y_2 > 0$ так, что $b_1 = y_1\alpha \rightarrow \beta_1 > 0$ и $b_2 = y_2\delta \rightarrow \beta_2 > 0$, в то время как $\delta \rightarrow 0$. Из уравнения (9) для $s = s(t)$, $t > 0$, получаем соотношение

$$\frac{1 - s(t)}{s(t)} = \frac{\beta_1}{\alpha s(t) + z} + \frac{\beta_2}{\delta s(t) + z} + o_N. \quad (24)$$

Далее, $s = s(t) \rightarrow \sigma(t)$ при $N \rightarrow \infty$, остаточный член o_N стремится к нулю, и уравнение (24) переходит в квадратное уравнение относительно $\sigma(t)$. Вновь запишем его в виде $A\sigma^2 + B\sigma + C = 0$, где теперь $A = \alpha(\beta_2 + z)$, $B = z(\beta_1 + \beta_2 + z - \alpha)$, $C = -z^2$, $z > 0$. Выполняем аналитическое продолжение $\sigma(z)$ в область комплексных значений аргумента $z = -u + i\varepsilon$, $u, \varepsilon > 0$. Решение уравнения Стильтеса дает

$$G(u_2) - G(u_1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \pi^{-1} \int_{u_1}^{u_2} \text{Im } \sigma(-u + i\varepsilon) du = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \pi^{-1} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2|A|} du. \quad (25)$$

Изучим сначала скачки функции $G(u)$. Они могут иметь место в случае обращения в нуль коэффициента A , т.е. при $z = -\beta_2$. Интегрирование вблизи $u = \beta_2 > 0$ в (25) определяет скачок $(2\pi d_1)^{-1} \sqrt{\text{Re}(B^2 - 4AC)}$, который равен $\beta_2(y_1 - 1)/2$ при $y_1 > 1$ и равен нулю при $y_1 \leq 1$. Заключаем, что функция $G(u)$ при $y_1 < 1$ непрерывна

всюду при $u \geq 0$, а при $y_1 > 1$ имеет разрыв в точке $u = \beta_2$, причем скачок равен $\beta_2(y_1 - 1)$.

Непрерывная часть $G(u)$ определяется уравнением (25). Предельная спектральная плотность S для модели 2 есть

$$u^{-1}G'(u) = \begin{cases} (2\pi\alpha|u - \beta_2|)^{-1}\sqrt{(u_+ - u)(u - u_-)} & \text{при } u_1 \leq u \leq u_2 \\ 0 & \text{при } u < u_1 \text{ и при } u > u_2. \end{cases}$$

где $u_{\pm} = \beta_2 + \alpha(1 \pm \sqrt{y})^2$, $y = \beta_1/\alpha$. Влияние “фона” малых дисперсий сдвигает спектр на величину β_2 . Легко проверить, что эти границы не выходят за рамки верхней границы, установленной утверждением (22.5) теоремы 5.

Модель 3. Пусть собственные значения матрицы Σ равны $\lambda_k = a^2/(a^2 + N^{-2}k^2)$, $a > 0$, $k = 0, 1, \dots$. При $N \rightarrow \infty$ имеем

$$b = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{a^2}{a^2 + t^2} dt = \frac{\pi a}{2} = \beta,$$

$$G_N^0(v) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot \text{ind}(\lambda_k < v) \rightarrow a \arctg \sqrt{\frac{v}{1-v}} \stackrel{\text{def}}{=} G^0(v),$$

$$\frac{dG^0(v)}{dv} = \frac{a}{2\sqrt{v(1-v)}}, \quad 0 < v < 1.$$

Пусть $u > 0$, $\sigma = \sigma(-u)$. Дисперсионное уравнение (15) приобретает вид

$$\frac{\sigma - 1}{\sigma} = a^2 \int \frac{1}{t^2 + a^2(u - \sigma)} dt = \frac{\beta}{\sqrt{u(u - \sigma)}}. \quad (26)$$

Величина $\text{Im } \sigma(z)$ связана со спектральной функцией $G'(u)$ уравнением (20). Поэтому вне области спектра функция $\sigma(-u)$ вещественная. В силу (19) эта функция монотонно убывает с ростом $u > 0$ и $\sigma(-u) \geq 1$. Из (26) видно, что $u \geq \sigma(-u)$.

При малых $u > 0$ уравнение (26) не имеет решения, но равносильно кубическому уравнению

$$\varphi(\sigma, u) = a_3\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_1\sigma^1 + a_0 = 0, \quad (27)$$

где $a_3 = u$, $a_2 = \beta^2 - u^2 - 2u$, $a_1 = 2u^2 + u$, $a_0 = -u^2$, которое разрешимо в комплексных числах. Делаем вывод, что при малых $u > 0$ уравнение (26) имеет только комплексные корни. Далее, $G'(u) > 0$ при $\text{Im } \sigma > 0$. Следовательно, малые значения $u > 0$ входят в область спектра $\mathfrak{S}$. Положим вновь $\sigma_0 = \text{Re } \sigma$, $\sigma_1 = \text{Im } \sigma$. В области спектра мнимая часть $\varphi(\sigma, u)$ пропорциональна $\sigma_1 > 0$ с коэффициентом

$$a_3(3\sigma_0^2 - \sigma_1^2) + 2a_2\sigma_0 + a_1 = 0. \quad (28)$$

В силу теоремы 5 область спектра ограничена, и существует верхняя граница спектра $u_{\text{гп}} > 0$. Эту величину можно вычислить, решая систему двух уравнений (27) и (28) при $\sigma_1 = 0$. Из теоремы 5 и уравнения (26) получаем оценку

$$\sqrt{1 + \beta^2} \leq u_{\text{гп}} \leq (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

Можно доказать, что функция $G'(u)$ и спектральная плотность на границе $u = u_{\text{гп}}$ имеют вертикальные производные.

Список литературы

- [1] E. P. Wigner, *Ann. Math.*, **67** (1958), 325–327; *SIAM Rev.*, **9**:1 (1967), 1–23.
- [2] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello et al, *Rev. Mod. Phys.*, **53**:3 (1981), 385–479; C. E. Porter, *Statistical Theories of Spectra Fluctuations*, Academic Press, N.Y., 1965.
- [3] A. Khorunzhy, G. J. Rodgers, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **3**:1 (2000), 1–31.
- [4] В. А. Марченко, Л. А. Пастур, *Матем. сб.*, **72** (1967), 507–536.
- [5] V. L. Girko, *Statistical Analysis of Observations of Increasing Dimension*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [6] В. Л. Гирко, *Спектральная теория случайных матриц*, Наука, М., 1988.
- [7] V. L. Girko, *Theory of Stochastic Canonical Equations*, v. 1, 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
- [8] В. И. Сердобольский, *Теория вероятностей и ее применения*, **40** (1995), 910–919.
- [9] В. И. Сердобольский, *УМН*, **54**:2 (1999), 85–112.
- [10] V. I. Serdobolskii, *Multivariate Statistical Analysis. A High-Dimensional Approach*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

Поступила в редакцию 28.11.2005