Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Р. Караханян, О построении представлений нестандартно деформированной алгебры $sl_\xi(2)$, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 2, 209–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf21>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:23:01

© 2004 г.

Д. Р. Караханян*

О ПОСТРОЕНИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НЕСТАНДАРТНО ДЕФОРМИРОВАННОЙ АЛГЕБРЫ $sl_\xi(2)$

Генераторы алгебры $sl_\xi(2)$, представляющей собой результат нестандартной (жордановой) деформации алгебры $sl(2)$, реализованы в виде конечно-разностных операторов, действующих в пространстве функций. Это позволяет реализовать представления любой размерности алгебры $sl_\xi(2)$ в пространстве полиномов, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с обычными матрицами подходящей размерности. Обсуждается применение найденной реализации для построения и исследования универсальной R -матрицы, инвариантной относительно действия алгебры $sl_\xi(2)$.

Ключевые слова: нестандартная деформация, интегрируемая теория, представление младшего веса, универсальная R -матрица.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовое уравнение Янга–Бакстера

$$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12} \quad (1)$$

играет важнейшую роль, выступая в качестве условия интегрируемости в $(1+1)$ -мерной квантовой теории поля [1] и в двумерных решеточных моделях статистической физики [2], в конформной теории поля [3] и в теории узлов [4]. В настоящее время не вызывает сомнений также тот факт, что исследование алгебраических свойств этого уравнения и получение новых решений тесно связаны с изучением квантовых групп [5].

Пусть $\mathcal{A}$ – алгебра Хопфа, а $\mathcal{R}$ – некоторый обратимый элемент из $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ такой, что

$$\mathcal{P} \circ \Delta(X) = \mathcal{R}\Delta(X)\mathcal{R}^{-1} \quad \forall X \in \mathcal{A}, \quad (2)$$

*Ереванский физический институт, Ереван, Армения. E-mail: karakhan@lx2.yerphi.am

где $\mathcal{P}$ – оператор перестановки: $\mathcal{P}(x \otimes y) = (y \otimes x)$. Если обозначить $\mathcal{R} = \sum_i a_i \otimes b_i$, тогда $\mathcal{R}_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1$, $\mathcal{R}_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$ и $\mathcal{R}_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$. Тогда если также имеют место соотношения

$$(\Delta \otimes \text{id})\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23}, \quad (\text{id} \otimes \Delta)\mathcal{R} = \mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}, \quad (3)$$

то пара $(\mathcal{A}, \mathcal{R})$ называется *квазитриангулярной* алгеброй Хопфа [6]. Исходя из соотношений (2) и (3) легко получить, что для $\mathcal{R}$ имеет место соотношение (1). В дальнейшем предполагается, что эти соотношения имеют место, и будем говорить, что $\mathcal{R}$ является (квантовой) *универсальной R -матрицей* для алгебры $\mathcal{A}$. Очевидно, что выбор различных представлений алгебры $\mathcal{A}$ будет приводить к различным реализациям явных решений уравнения Янга–Бакстера.

В частности, если алгебра $\mathcal{A}$ является квантовой деформацией $U_q(g)$ некоторой алгебры Ли g , то условие квазитриангулярности (2) переходит в известное соотношение Фаддеева–Решетихина–Тахтаджяна для определения квантовой группы [5]. Кроме того, известно, что $U_q(g)$ – единственная биалгебраическая структура над g , которую можно рассматривать в качестве квантовой деформации. Для всех полупростых алгебр Ли эти биалгебраические структуры соответствуют кограницам определенных классических r -матриц. В случае алгебры $sl(2)$ можно выделить две такие биалгебраические структуры: *стандартную*, которая генерируется классической r -матрицей $r^{(s)} = \lambda S^+ \wedge S^-$ и соответствует широко известной деформации Дринфельда–Джимбо, а также *нестандартную*, соответствующую треугольной r -матрице $r^{(s)} = \mu S^z \wedge S^-$, квантовая универсальная R -матрица для которой впервые была описана в работе [7]. Эта деформация, названная в [8] жордановой, в квантово-групповом контексте была, по-видимому, впервые рассмотрена в работе [9] (см. также [10]). Универсальная квантовая R -матрица и ее связь с деформированными янгianaми рассматривалась многими авторами [11], в частности для случая алгебры $sl_\xi(2)$ она была найдена в абстрактных обозначениях в работе [12].

Для исследования свойств интегрируемых моделей, основанных на нестандартной, жордановой деформации классических групп симметрий, актуален вопрос о построении представлений, удобных с точки зрения вычисления физических величин, связанных с этими моделями. С физической точки зрения жорданова деформация интегрируемой модели может быть истолкована как деформация при помощи введения в теорию размерного параметра ξ , в отличие от деформации Дринфельда–Джимбо, использующей безразмерный параметр q . Это обстоятельство особенно интересно в отношении алгебры $sl(2)$ с точки зрения возможного обобщения результата Липатова [13] о наличии глубокой связи между реджевским пределом квантовой хромодинамики и $sl(2)$ -инвариантной моделью Гейзенберга для нефизических значений характеризующего представления параметра, который имеет смысл не спина, как в случае статистических решеточных моделей, а аномальной размерности вершинного оператора $\ell = n/2 + i\nu$ (n – натуральное, ν – вещественное число), входящего в амплитуду рассеяния. При таком

обобщении нарушение масштабной инвариантности может быть описано в рамках рассматриваемой модели, если параметр деформации связывается со значением масштаба Λ_{QCD} нарушения конформной инвариантности в хромодинамике. Предлагаемый в данной работе способ построения представлений алгебры $sl_\xi(2)$ привлекателен тем, что дает единообразное описание представлений независимо от их размерности, что особенно удобно для построения универсальной R -матрицы, и уже опробован для алгебр $sl_q(2)$ и $sl(2|1)$ [14].

2. АЛГЕБРА $sl_\xi(2)$

Так называемая *жорданова* или размерностная деформация (при помощи параметра, обладающего размерностью) алгебры $sl(2)$ задается следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [S^+, S^-] &= 2S^z, & [S^z, S^-] &= -\frac{1}{\xi} \text{sh}(\xi S^-), \\ [S^z, S^+] &= \frac{1}{2} \text{ch}(\xi S^-) S^+ + \frac{1}{2} S^+ \text{ch}(\xi S^-). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь параметр ξ имеет размерность длины. Легко видеть, что в пределе $\xi \rightarrow 0$ деформация снимается, $sl_\xi(2) \rightarrow sl(2)$. Оператор Казимира алгебры имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{2}{\xi} \text{sh}\left(\frac{\xi S^-}{2}\right) S^+ \text{ch}\left(\frac{\xi S^-}{2}\right) + S^z (S^z + 1) = \\ &= \frac{2}{\xi} \text{ch}\left(\frac{\xi S^-}{2}\right) S^+ \text{sh}\left(\frac{\xi S^-}{2}\right) + S^z (S^z - 1) = \\ &= \frac{1}{\xi} \text{sh}(\xi S^-) S^+ + \text{ch}(\xi S^-) S^z - \frac{\xi}{4} \text{sh}^2(\xi S^-) + (S^z)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Фундаментальное представление не деформируется и дается матрицами Паули

$$S_{(2)}^z = \frac{1}{2} \sigma^z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad S_{(2)}^+ = \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{(2)}^- = \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако трехмерное представление, соответствующее значению спина $\ell = 1$, уже зависит от ξ :

$$S_{(3)}^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\xi^2}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_{(3)}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{(3)}^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\xi^2}{\sqrt{2}} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В пределе $\xi \rightarrow 0$ эти выражения переходят в недеформированные. Приведем также выражения для генераторов, соответствующих значениям спина $3/2$ и 2 :

$$S_{(4)}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$S_{(4)}^z = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{5\xi^2}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \xi^2 \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad S_{(4)}^+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4\xi^2}{\sqrt{3}} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -\xi^2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а также

$$S_{(5)}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{(5)}^z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7\xi^2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5\xi^2}{2} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\xi^4}{2} & 0 & \xi^2 \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$S_{(5)}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5\xi^2 & 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{8\xi^2}{\sqrt{6}} & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ -\frac{\xi^4}{2} & 0 & -\xi^2 \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения представлений алгебры $sl_\xi(2)$ мы хотим использовать способ их реализации в пространстве полиномов. Мы продемонстрируем его на примере алгебры $sl(2)$. Вначале генераторы алгебры реализуются в виде дифференциальных операторов

$$S_{(0)}^- = \partial, \quad S_{(0)}^z = x\partial - \ell, \quad S_{(0)}^+ = 2\ell x - x^2\partial, \quad (9)$$

коммутирующих согласно (4) при $\xi = 0$. Поскольку понижающий генератор в пространстве функций дается производной, то в этом пространстве всегда существует младший вектор (задаваемый полиномом 1), действуя на который повышающим оператором $S_{(0)}^+$, можно породить все пространство представления, которое, как легко видеть, сводится к подпространству пространства полиномов при любом значении спина ℓ , характеризующем представление. Это пространство будет конечномерным тогда и только тогда, когда параметр 2ℓ дается целым положительным числом. В этом случае представление обладает также и старшим вектором $x^{2\ell}$, при действии на который повышающий оператор $S_{(0)}^+$ дает нуль и процесс обрывается. Векторы пространства представления при этом

находятся во взаимно однозначном соответствии со столбцами матричного представления. Для рассмотренных выше примеров это соответствие имеет следующий вид. Для спина $1/2$ представление минимальной размерности двумерно:

$$|-1/2\rangle = 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad | +1/2\rangle = x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

для спина $\ell = 1$ трехмерно:

$$|-1\rangle = 1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle = x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad | +1\rangle = x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

для спина $3/2$ четырехмерно:

$$1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и, наконец, для значения $\ell = 2$ пятимерно:

$$1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Действие матричных генераторов на столбцы подходящей размерности полностью идентично действию дифференциальных операторов (9) на соответствующие мономы.

Исходя из вида коммутационных соотношений (4) можно заключить, что рассматриваемая деформация алгебры $s\ell(2)$ не затрагивает понижающий оператор и при реализации генераторов в виде дифференциальных операторов выражение для него можно сохранить неизменным, что соответствует нашему намерению построить представления с младшим весом в пространстве полиномов. Отталкиваясь от этого выражения, посредством переменной x и производной ∂ можно реализовать также и операторы S^z и S^+ , однако в качестве не дифференциальных, а конечно-разностных операторов:

$$S^- = \partial,$$

$$S^z = \frac{x}{\xi} \operatorname{sh}(\xi\partial) - \ell + \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(\xi\partial) - 1) = 2 \operatorname{ch}\left(\frac{\xi\partial}{2}\right) \frac{x}{\xi} \operatorname{sh}\left(\frac{\xi\partial}{2}\right) - \ell - \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$S^+ = -\frac{x^2}{\xi} \operatorname{sh}(\xi\partial) + 2\ell x - x(\operatorname{ch}(\xi\partial) - 1) = (2\ell + 1)x - x \operatorname{sh}(\xi\partial)x.$$

Отметим, что свойство $sl_\xi(2) \rightarrow sl(2)$ при $\xi \rightarrow 0$ сохраняется при указанной реализации генераторов, т.е. соотношения (10) переходят в (9). Оператор Казимира (5) при такой реализации генераторов кратен единице:

$$Cf(x) = \left(s^2 - \frac{1}{4}\right)f(x) = \ell(\ell+1)f(x).$$

Конечномерные представления алгебры $U_\xi(sl(2))$ уже рассматривались другими авторами, в частности в работе [15] найдено нелинейное соотношение между генераторами $sl_\xi(2)$ и $sl(2)$. А именно, если $S^\pm$ и S^z суть генераторы $sl_\xi(2)$, удовлетворяющие соотношениям (4), то построенные с их помощью операторы $\check{S}^a$:

$$\check{S}^+ \equiv \text{ch}\left(\frac{\xi S^-}{2}\right) S^+ \text{ch}\left(\frac{\xi S^-}{2}\right), \quad \check{S}^z = S^z, \quad \check{S}^- \equiv \frac{2 \text{sh}(\xi S^-/2)}{\xi \text{ch}(\xi S^-/2)}, \quad (11)$$

образуют алгебру $sl(2)$. Таким образом, указанное преобразование позволяет свести задачу классификации и построения представлений деформированной алгебры к хорошо изученной задаче о представлениях алгебры $sl(2)$.

В нашем подходе пространство представления алгебры $sl_\xi(2)$ независимо от его размерности (в том числе и для бесконечномерных представлений) дается пространством полиномов размерности не выше 2ℓ , если 2ℓ – целое положительное число, и пространством полиномов произвольной размерности в противном случае. Однако, в отличие от представлений алгебры $sl(2)$, построенных таким же образом, здесь мономы x^n не являются состояниями с определенной проекцией спина, т.е. собственными состояниями оператора S^z . Действительно, из определения (10) видно, что таковыми являются только 1 и x , остальные же состояния с определенной проекцией спина, помимо старшей степени x^n , содержат также и низшие степени x . Это можно понять и из вида матричных генераторов S^z : все они, за исключением двумерного, недиагональны и даются нижнетреугольными матрицами. Нетрудно вычислить несколько первых состояний $\varphi_n(x)$, соответствующих проекции спина $n - \ell$:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 1, & \varphi_1 &= x, & \varphi_2 &= x^2 + \frac{1}{4}\xi^2, \\ \varphi_3 &= x^3 + \frac{5}{4}x\xi^2, & \varphi_4 &= x^4 + \frac{7}{2}x^2\xi^2 + \frac{9}{16}\xi^4, \\ \varphi_5 &= x^5 + \frac{15}{2}x^3\xi^2 + \frac{89}{16}x\xi^4, & \varphi_6 &= x^6 + \frac{55}{4}x^4\xi^2 + \frac{439}{16}x^2\xi^4 + \frac{225}{64}\xi^6. \end{aligned} \quad (12)$$

Легко заметить, что все они имеют определенную четность: собственные состояния с четным номером даются четными функциями от x , а состояния с нечетными номерами – нечетными функциями. Это неудивительно, поскольку сам оператор S^z является четной функцией от ξ , не меняется при обращении знака $\xi \rightarrow -\xi$, соответственно не должны меняться и его собственные векторы, которые определены с точностью до численного множителя.

Операторы (10), при довольно простой зависимости от x , являются сложными функциями от $\xi\partial$, а поэтому при исследовании соотношений с их участием очень полезным может оказаться переход к импульсному представлению, производимый при помощи преобразования Фурье, при котором эти переменные меняются ролями. Так задача на собственные значения

$$\begin{aligned} \frac{x}{2\xi}[\varphi_n(x+\xi) - \varphi_n(x-\xi)] + \frac{1}{4}[\varphi_n(x+\xi) + \varphi_n(x-\xi) - 2\varphi_n(x)] = \\ = (S^z + \ell)\varphi_n(x) = n\varphi_n(x) \end{aligned} \quad (13)$$

имеет для функции $\varphi_n(x)$ довольно сложный вид уравнения в конечных разностях, тогда как для фурье-образа $a_n(k)$ оно сводится к более привычному обыкновенному дифференциальному уравнению¹⁾. Действительно, рассмотрим преобразование Фурье для функции $\varphi_n(x)$ ²⁾:

$$\varphi(x) = \int a_n(k) e^{ikx} dk.$$

Подставляя его в исходное соотношение, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\int dk a_n(k) \left[\sin k \frac{d}{dk} + \frac{1}{2} \cos k - n - \frac{1}{2} \right] e^{ikx} = 0,$$

которое легко интегрируется и дает

$$a_n(k) = \text{const} \cdot \frac{\cos^n(k\xi/2)}{\sin^{n+1}(k\xi/2)}, \quad (14)$$

откуда

$$\varphi_n(x) = \int dk e^{ikx} \frac{\cos^n(k\xi/2)}{\sin^{n+1}(k\xi/2)}. \quad (15)$$

Даже без вычисления этого интеграла, которое приводит к довольно громоздкому выражению, легко установить два простых рекуррентных соотношения:

$$n\varphi_n(x) = 2ix\varphi_{n-1}(x) - (n-1)\xi^2\varphi_{n-2}(x), \quad (16)$$

$$\varphi_n\left(x + \frac{\xi}{2}\right) - \varphi_n\left(x - \frac{\xi}{2}\right) = i\varphi_{n-1}\left(x + \frac{\xi}{2}\right) + i\xi^2\varphi_{n-1}\left(x - \frac{\xi}{2}\right). \quad (17)$$

¹⁾ Очевидно, что уравнение (13) имеет очень широкий класс решений, в частности для данного решения $\varphi(x)$ решением будет также функция $\varphi(x)f(x)$ с произвольной функцией $f(x)$, обладающей свойством периодичности $f(x+\xi) = f(x)$. Однако нас интересуют только полиномиальные решения уравнения (13), и это требование резко сужает произвол в выборе решений, сводя его к умножению каждого из многочленов $\varphi_n(x)$ на общий множитель.

²⁾ В действительности для получения результата прибегать к помощи преобразования Фурье нет никакой нужды, и его использование носит исключительно иллюстративный и частично эвристический характер. Поэтому мы не обсуждаем здесь вопрос определения области интегрирования и обоснования сходимости соответствующих интегралов.

Исходя из явного вида векторов с определенной проекцией спина (12) можно заключить, что каждый последующий вектор связан с предыдущим действием оператора

$$\hat{S}^+ = \frac{1}{2} \left[x \left(1 + \operatorname{ch}(\xi \partial) \right) + \frac{\xi}{2} \operatorname{sh}(\xi \partial) \right]. \quad (18)$$

Это предположение оказывается верным для всех значений n . Действительно, нетрудно проверить, что оператор S^z имеет с этим оператором следующие простые коммутационные соотношения:

$$S^z (\hat{S}^+)^n = (\hat{S}^+)^n (S^z + n)$$

для любых натуральных n , т.е. действие оператора $(\hat{S}^+)^n$ повышает собственное значение оператора проекции спина на n . Следовательно, состояния с определенной проекцией спина можно породить последовательным действием оператора $\hat{S}^+$ на единицу³⁾:

$$\varphi_n(x) = \operatorname{const} \cdot (\hat{S}^+)^n \cdot \varphi_0, \quad \varphi_0 = 1.$$

Переходя к фурье-образам, получим

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \frac{1}{2} \left[x(1 + \operatorname{ch}(\xi \partial)) + \frac{\xi}{2} \operatorname{sh}(\xi \partial) \right] \int dk a_{n-1}(k) e^{ikx} = \\ &= \left(\frac{1}{2} \left[x(1 + \operatorname{ch}(\xi \partial)) + \frac{\xi}{2} \operatorname{sh}(\xi \partial) \right] \right)^n \int dk a_0(k) e^{ikx} = \\ &= \left(\frac{\xi}{2i} \right)^n \int dk a_0(k) \left(\frac{2}{\xi} \cos^2 \left(\frac{k\xi}{2} \right) \frac{d}{dk} - \frac{1}{2} \sin(\xi k) \right)^n e^{ikx}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь мы зафиксировали коэффициент, с точностью до которого определяется состояние с определенной проекцией спина, из условия, что старший член этих полиномов всегда появляется с множителем единица. Фурье-образ $a_0(k)$ есть дельта-функция $\delta(k)$ — фурье-образ единицы. Чтобы выполнить n -кратное дифференцирование в формуле (19) и получить замкнутое выражение, удобно определить *производящую функцию* для полиномов, имеющих определенную проекцию спина:

$$F(x, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} F(x, t) |_{t=0}. \quad (20)$$

Чтобы выполнить суммирование по n , удобно перейти к переменной $\alpha = \operatorname{tg}(k\xi/2)$, тогда n -я степень оператора легко преобразуется:

$$\left((1 + \cos(k\xi)) \frac{d}{dk} - \frac{1}{2} \sin(\xi k) \right)^n = \frac{1}{\cos(k\xi/2)} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^n \cos \left(\frac{k\xi}{2} \right),$$

³⁾ На самом деле существует целая иерархия операторов, порождающих полиномы $\varphi_n(x)$: для любого заданного натурального m можно построить разностный оператор $S_{(m)}^+$, коммутирующий с S^z по правилу $S^z S_{(m)}^+ = S_{(m)}^+ (S^z + 1)$ и полиномиальный по переменной x . Операторы $\hat{S}^+$ и $\hat{S}^+$ являются всего лишь простейшими представителями $S_{(1)}^+$ и $S_{(2)}^+$ этого ряда.

и ряд суммируется по формуле Тейлора для переменной α . Учитывая, что интегрирование по дельта-функции на конечном этапе вычислений эквивалентно подстановке значений $k = 0$ и $\alpha(0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \int dk \frac{a_0(k)}{\cos(k\xi/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t\xi}{2i} \frac{d}{d\alpha} \right)^n e^{ikx \cos\left(\frac{k\xi}{2}\right)} = \\ &= \int dk a_0(k) \sqrt{1 + \alpha^2(k)} \left(\frac{1 + i(\alpha + t\xi/(2i))}{1 - i(\alpha + t\xi/(2i))} \right)^{x/\xi} \frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha + t\xi/(2i))^2(k)}} = \\ &= \left(\frac{1 + t\xi/2}{1 - t\xi/2} \right)^{x/\xi} \left(1 + \frac{t\xi}{2} \right)^{-1/2} \left(1 - \frac{t\xi}{2} \right)^{-1/2} = \frac{(1 + t\xi/2)^{x/\xi - 1/2}}{(1 - t\xi/2)^{x/\xi + 1/2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, для производящей функции получается сравнительно простое выражение, не меняющееся при одновременной замене знаков переменных $F(x, t) = F(-x, -t)$, т.е. она генерирует многочлены, имеющие определенную четность, как и ожидалось. Нетрудно проверить, что найденное выражение для производящей функции удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} [F(x + \xi, t) - F(x - \xi, t)] + \frac{1}{4} [F(x + \xi, t) - 2F(x, t) + F(x - \xi, t)] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} n \varphi_n(x) = t \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \varphi_n(x) = t \frac{\partial}{\partial t} F(x, t), \end{aligned}$$

т.е. действительно генерирует собственные состояния оператора проекции спина. Помимо этого уравнения из определения (20) следует еще одно уравнение, которому удовлетворяет производящая функция:

$$\left(x + \frac{\xi}{2} \right) F(x + \xi, t) + \left(x - \frac{\xi}{2} \right) F(x - \xi, t) + x F(x, t) = 2 \frac{\partial}{\partial t} F(x, t).$$

Из этих уравнений уже можно непосредственно получить, что функция $F(x, t)$ зависит от x экспоненциальным образом, и угадать вид (21), не прибегая к преобразованию Фурье.

Первые три производные этой функции суть

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) &= \left(x + \frac{\xi^2 t}{4} \right) \frac{(1 + t\xi/2)^{x/\xi - 3/2}}{(1 - t\xi/2)^{x/\xi + 3/2}}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} F(x, t) &= \left(x^2 + x\xi^2 t + \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^4 t^2}{8} \right) \frac{(1 + t\xi/2)^{x/\xi - 5/2}}{(1 - t\xi/2)^{x/\xi + 5/2}}, \\ \frac{\partial^3}{\partial t^3} F(x, t) &= \left(x^3 + \frac{9}{4} x^2 \xi^2 t + \frac{5}{4} x \xi^2 + \frac{9}{8} x \xi^4 t^2 + \frac{9}{16} \xi^4 t + \frac{3}{36} \xi^6 t^3 \right) \frac{(1 + t\xi/2)^{x/\xi - 5/2}}{(1 - t\xi/2)^{x/\xi + 5/2}}. \end{aligned}$$

Полагая в этих выражениях $t = 0$, получим три первых многочлена в соответствии с явными выражениями, приведенными в (12).

3. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Для исследования решений уравнения Янга–Бакстера необходимо построить также пространство, соответствующее тензорному произведению двух представлений. Как и в случае стандартной деформации (q -деформации), это пространство может быть реализовано двумя различными способами, соответствующими двум копроизведениям, эквивалентность которых и задает уравнение Янга–Бакстера при помощи R -матрицы, сплетающей эти представления. Копроизведения хорошо известны [8]:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}^- &= S_1^- + S_2^- = \bar{\mathbb{S}}^-, \\ \mathbb{S}^z &= e^{\xi S_2^-} S_1^z + e^{-\xi S_1^-} S_2^z, \quad \bar{\mathbb{S}}^z = e^{-\xi S_2^-} S_1^z + e^{\xi S_1^-} S_2^z, \\ \mathbb{S}^+ &= e^{\xi S_2^-} S_1^+ + e^{-\xi S_1^-} S_2^+, \quad \bar{\mathbb{S}}^+ = e^{-\xi S_2^-} S_1^+ + e^{\xi S_1^-} S_2^+.\end{aligned}\tag{22}$$

Если алгебраические соотношения (4) имеют место для генераторов S_1^a и S_2^a , действующих соответственно в первом и во втором представлениях (генераторы из разных пространств коммутируют между собой), то эти же соотношения имеют место и для комбинаций $\mathbb{S}^a$, действующих в пространствах тензорного произведения V и $\bar{V}$. Здесь выбор знаков в выражениях для $\mathbb{S}^z, \mathbb{S}^+$ соответствует копроизведению Δ , а для $\bar{\mathbb{S}}^z, \bar{\mathbb{S}}^+$ – копроизведению $\bar{\Delta}$. В соответствии с этим мы будем иметь также и два оператора Казимира, построенных согласно (5) из операторов с чертой и без черты. Векторы, образующие эти пространства тензорного произведения представлений, будут собственными состояниями соответствующего оператора Казимира. Мы хотим реализовать пространства V и $\bar{V}$ как прямую сумму представлений младшего веса. Векторы младшего веса определяются как независимые решения уравнения

$$\mathbb{S}^- \phi_n(x_1, x_2) = (S_1^- + S_2^-) \phi_n(x_1, x_2) = (\partial_1 + \partial_2) \phi_n(x_1, x_2) = 0\tag{23}$$

и, как легко видеть, являются функциями разности аргументов, которые естественно выбрать в виде многочленов. Тогда из вида оператора Казимира (мы будем рассматривать структуру пространства V , соответствующего копроизведению Δ , другое пространство строится аналогично)

$$C_{12} = \frac{2}{\xi} \operatorname{ch} \frac{\xi \mathbb{S}^-}{2} \mathbb{S}^+ \operatorname{sh} \frac{\xi \mathbb{S}^-}{2} + \mathbb{S}^z (\mathbb{S}^z - 1)\tag{24}$$

можно заключить, что его собственными состояниями будут векторы младшего веса с определенной проекцией спина. Действительно, поскольку оператор $\operatorname{sh}(\xi \mathbb{S}^-/2)$ аннигилирует векторы младшего веса, то из этого выражения следует, что собственные векторы младшего веса оператора Казимира одновременно являются собственными векторами оператора третьей проекции спина. Отсюда следует, что пространство V состоит из

векторов младшего веса с определенной проекцией спина $\phi_n(x_1 - x_2)^4$, над которыми надстроена пирамида векторов, порожденных последовательным действием повышающего оператора $\mathbb{S}^+$: $\phi_n^m(x_1, x_2) = (\mathbb{S}^+)^m \phi_n(x_1 - x_2)$. Более того, из (24) следует, что собственные значения оператора Казимира имеют на векторах $\phi_n^m(x_1, x_2)$ тот же вид:

$$C_{12}\phi_n^m(x_1, x_2) = (n - \ell_1 - \ell_2)(n - 1 - \ell_1 - \ell_2)\phi_n^m(x_1, x_2), \quad (25)$$

что и в случае недеформированной алгебры, и вырождены по индексу m . Это утверждение для векторов $\phi_n(x_1, x_2)$ легко следует из (24), а для векторов $\phi_n^m(x_1, x_2)$ — из коммутативности оператора Казимира с повышающим оператором $\mathbb{S}^+$.

Таким образом, с точки зрения исследования уравнения Янга–Бакстера и построения универсальной R -матрицы очень важно научиться строить векторы младшего веса, имеющие определенную проекцию спина. А именно, векторы $\phi_n(x_1 - x_2) \in V$ даются полиномиальными решениями функционального уравнения

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^z \phi_n(\hat{x}) &= \frac{\hat{x}}{2} [\phi_n(\hat{x}) - \phi_n(\hat{x} - 2)] - \hat{\ell} \phi_n(\hat{x} - 1) + \\ &+ \frac{1}{2} [\phi_n(\hat{x}) + \phi_n(\hat{x} - 2) - 2\phi_n(\hat{x} - 1)] = (n - \hat{\ell}) \phi_n(\hat{x}), \end{aligned} \quad (26)$$

где $\hat{\ell} \equiv \ell_1 + \ell_2$ и $\hat{x} \equiv (x_1 - x_2)/\xi$, а также $\bar{\mathbb{S}}^z = e^{-S_2^-} S_1^z + e^{S_1^-} S_2^z$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{S}}^z \bar{\phi}_n(\hat{x}) &= \frac{\hat{x}}{2} [\bar{\phi}_n(\hat{x} + 2) - \bar{\phi}_n(\hat{x})] - \hat{\ell} \bar{\phi}_n(\hat{x} + 1) + \\ &+ \frac{1}{2} [\bar{\phi}_n(\hat{x} + 2) + \bar{\phi}_n(\hat{x}) - 2\bar{\phi}_n(\hat{x} + 1)] = (n - \hat{\ell}) \bar{\phi}_n(\hat{x}), \end{aligned} \quad (27)$$

для переменных с чертой, принадлежащих пространству $\bar{V}$.

Опять удобно построить несколько первых многочленов, чтобы получить некоторое представление о возможном виде решений, которые мы ищем. Несложные выкладки приводят к выражениям

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 1, & \phi_1 &= \hat{x} + \hat{\ell}, & \phi_2 &= \hat{x}^2 + 2\hat{x}(\hat{\ell} - 1) + (\hat{\ell} - 1)\left(\hat{\ell} - \frac{1}{2}\right), \\ \phi_3 &= \hat{x}^3 + 3(\hat{\ell} - 2)\hat{x}^2 + \left(3\hat{\ell}^2 - \frac{21}{2}\hat{\ell} + \frac{19}{2}\right)\hat{x} + \hat{\ell}^3 - \frac{9}{2}\hat{\ell}^2 + \frac{13}{2}\hat{\ell} - 3, \\ \bar{\phi}_0 &= 1, & \bar{\phi}_1 &= \hat{x} - \hat{\ell}, & \bar{\phi}_2 &= \hat{x}^2 - 2\hat{x}(\hat{\ell} - 1) + (\hat{\ell} - 1)\left(\hat{\ell} - \frac{1}{2}\right), \\ \bar{\phi}_3 &= \hat{x}^3 - 3(\hat{\ell} - 2)\hat{x}^2 + \left(3\hat{\ell}^2 - \frac{21}{2}\hat{\ell} + \frac{19}{2}\right)\hat{x} - \hat{\ell}^3 + \frac{9}{2}\hat{\ell}^2 - \frac{13}{2}\hat{\ell} + 3. \end{aligned}$$

⁴⁾В недеформированном случае это были мономы $(x_1 - x_2)^n$, а в данном случае их роль выполняют многочлены от $(x_1 - x_2)$ со старшей степенью n . Как мы увидим ниже, появляются и все низшие мономы, а недостающие степени $(x_1 - x_2)$ замещаются степенями ξ .

Здесь также имеет смысл перейти к использованию фурье-образов. Для переменных без черты получим соотношение

$$\int dk a_n(k) \left[e^{-ik} \left(\sin k \frac{d}{dk} + \cos k - \hat{\ell} - 1 \right) + \hat{\ell} - n \right] e^{ik\hat{x}} = 0,$$

где $a_n(k)$ – фурье-образ $\phi(\hat{x})$:

$$\phi(\hat{x}) = \int a_n(k) e^{ik\hat{x}} dk,$$

и, следовательно, уравнение

$$\frac{d}{dk} (e^{-ik} a_n(k) \sin k) = a_n(k) e^{-ik} \cos k - e^{-ik} (\hat{\ell} + 1) + \hat{\ell} - n,$$

которое легко интегрируется и дает

$$a_n(k) = \text{const} \cdot e^{ik(\ell+1-n)} (\sin k)^{\hat{\ell}-n} \left(\frac{\cos(k/2)}{\sin(k/2)} \right)^{\hat{\ell}+1}.$$

Соответственно $\phi_n(x)$ имеет вид

$$\phi_n(\hat{x}) = \text{const} \int dk e^{ik(\hat{x}+1+\ell-n)} (\sin k)^{\hat{\ell}-n} \left(\frac{\cos(k/2)}{\sin(k/2)} \right)^{\hat{\ell}+1}.$$

Интегрирование по частям приводит к следующему рекуррентному соотношению:

$$(\hat{\ell} + 1 - n) \phi_n(\hat{x}) - (\hat{\ell} + 1) \phi_n(\hat{x} - 1) = i(1 - \hat{x}) \phi_{n-1}(\hat{x} - 1).$$

Другое простое соотношение для $\phi_n(\hat{x})$ можно получить при помощи простого сдвига аргументов:

$$\phi_n(\hat{x}) - \phi_n(\hat{x} - 2) = 2i \phi_{n-1}(\hat{x} - 2).$$

Если интерпретировать оператор $\mathbb{S}^z$ как эффективный оператор третьей проекции спина на множестве векторов младшего веса, т.е. для многочленов от переменной $\hat{x}$, то можно построить операторы $\check{\mathbb{S}}^\pm$, образующие с ним алгебру $sl(2)$, т.е. повышающие и понижающие его собственное значение на единицу. Действительно, нетрудно проверить, что оператор

$$\check{\mathbb{S}}^- = \frac{1}{2}(e^{2\xi\hat{\partial}} - 1)$$

(здесь $\hat{\partial} = \partial/\partial\hat{x} = \partial/\partial_1 = -\partial/\partial_2$) понижает ($\check{S}^-\hat{S}^z = (\check{S}^z - 1)\check{S}^-$), а оператор

$$\begin{aligned}\check{S}^+ &= \frac{\hat{x}^2}{2}(e^{-4\xi\hat{\partial}} - e^{-2\xi\hat{\partial}}) - 2\hat{x}e^{-4\xi\hat{\partial}} + 2(\hat{\ell} + 1)\hat{x}e^{-3\xi\hat{\partial}} + \hat{x}e^{-2\xi\hat{\partial}} + \\ &+ \frac{3}{2}e^{-4\xi\hat{\partial}} - 3(\hat{\ell} + 1)e^{-3\xi\hat{\partial}} + 2\left(\hat{\ell} + \frac{1}{2}\right)\left(\hat{\ell} + \frac{3}{2}\right)e^{-2\xi\hat{\partial}} = \\ &= \frac{\hat{x}}{2}(e^{-4\xi\hat{\partial}} - e^{-2\xi\hat{\partial}})\hat{x} + \frac{3}{2}e^{-4\xi\hat{\partial}} + (\hat{\ell} + 1)(\hat{x}e^{-3\xi\hat{\partial}} + e^{-3\xi\hat{\partial}}\hat{x}) + \\ &+ (2\hat{\ell} + 1)\left(\hat{\ell} + \frac{3}{2}\right)e^{-2\xi\hat{\partial}}\end{aligned}\quad (28)$$

повышает ($\check{S}^+\check{S}^z = (\check{S}^z + 1)\check{S}^+$) собственное значение оператора

$$\check{S}^z = \frac{\hat{x}}{2}(1 - e^{-2\xi\hat{\partial}}) + \frac{1}{2}e^{-2\xi\hat{\partial}} - (\hat{\ell} + 1)e^{-\xi\hat{\partial}}$$

на единицу. Таким образом, векторы младшего веса с определенной проекцией спина могут быть представлены в виде

$$\phi_n(\hat{x}) = ((2\hat{\ell} + 1)2\hat{\ell}(2\hat{\ell} - 1) \dots (2\hat{\ell} - n + 2))^{-1}(\hat{S}^+)^n \cdot 1. \quad (29)$$

Однако найденный оператор $\check{S}^+$ квадратичен по $\hat{x}$, и, отталкиваясь от него, построить производящую функцию не удастся. С подобной же трудностью мы бы столкнулись, попытавшись использовать для этой цели повышающий оператор $\check{S}^+$ (11), однако в случае одного представления ситуация упрощается тривиальной аддитивной зависимостью оператора S^z (4) от спина представления ℓ .

Для оператора проекции спина $\hat{S}^z$, входящего в задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned}\hat{S}^z\phi_n(\hat{x}) &= \frac{\hat{x}}{2}[\phi_n(\hat{x}) - \phi_n(\hat{x} - 2)] + \hat{\ell}[\phi_n(\hat{x}) - \phi_n(\hat{x} - 1)] + \\ &+ \frac{1}{2}[\phi_n(\hat{x}) + \phi_n(\hat{x} - 2) - 2\phi_n(\hat{x} - 1)] = n\phi_n(\hat{x}),\end{aligned}$$

который в частном случае $\hat{\ell} = -1$ имеет особенно простой вид:

$$\hat{S}^z_{(-1)} = \frac{\hat{x} - 1}{2}(1 - e^{-2\hat{\partial}}),$$

нетрудно построить оператор, имеющий по отношению к нему смысл повышающего оператора:

$$\hat{S}^+_{(-1)} = (\hat{x} - 1)e^{-2\hat{\partial}} = e^{-\hat{\partial}}\hat{x}e^{-\hat{\partial}}. \quad (30)$$

Действительно, нетрудно проверить, что $\hat{S}^z_{(-1)}\hat{S}^+_{(-1)} = \hat{S}^+_{(-1)}(\hat{S}^z_{(-1)} + 1)$. В рассматриваемом частном случае собственные векторы, порожденные оператором $\hat{S}^+_{(-1)}$, имеют очень простой вид:

$$\phi_n^{(-1)}(\hat{x}) = (\hat{S}^+_{(-1)})^n \cdot 1 = (\hat{x} - 1)(\hat{x} - 3) \dots (\hat{x} - 2n + 1),$$

и генерируются производящей функцией

$$\mathbb{F}(\hat{x}, \tau) = (1 + 2\tau)^{(\hat{x}-1)/2}. \quad (31)$$

Это наблюдение не имело бы никакой ценности, если бы не существовало преобразование, связывающее друг с другом генераторы, соответствующие различным спинам:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{S}}^z &= \frac{\hat{x} - 1}{2}(1 - e^{-2\hat{\partial}}) + (\hat{\ell} + 1)(1 - e^{-\hat{\partial}}) = \\ &= \left(\frac{1}{2}(1 + e^{\hat{\partial}})\right)^{2(\hat{\ell}+1)} \mathbb{S}_{(-1)}^z \left(\frac{1}{2}(1 + e^{\hat{\partial}})\right)^{-2(\hat{\ell}+1)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда следует, что искомым повышающим оператором, линейным по $\hat{x}$, будет оператор

$$\widehat{\mathbb{S}}^+ = \left(\frac{1}{2}(1 + e^{\hat{\partial}})\right)^{2(\hat{\ell}+1)} (\hat{x} - 1)e^{-2\hat{\partial}} \left(\frac{1}{2}(1 + e^{\hat{\partial}})\right)^{-2(\hat{\ell}+1)} = e^{-\hat{\partial}} \left(\hat{x} + \frac{2(\hat{\ell} + 1)}{1 + e^{-\hat{\partial}}}\right) e^{-\hat{\partial}}. \quad (33)$$

Легко видеть, что оператор $\widehat{\mathbb{S}}_{(0)}^+$ переводит многочлен от $\hat{x}$ с коэффициентом единица перед старшим членом в многочлен с тем же свойством. То же самое верно и для оператора $\widehat{\mathbb{S}}_{(\hat{\ell})}^+$, отличающегося от него преобразованием подобия. Таким образом, полагая

$$\phi_n(\hat{x}) = (\widehat{\mathbb{S}}_{(\hat{\ell})}^+)^n \cdot 1,$$

получим для производящей функции

$$\mathbb{F}(\hat{x}, \tau) = \left(\frac{1}{2}(1 + e^{\hat{\partial}})\right)^{2(\hat{\ell}+1)} \mathbb{F}_{(-1)}(\hat{x}, \tau) = (1 + 2\tau)^{(\hat{x}-1)/2} \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 2\tau})\right)^{2(\hat{\ell}+1)}. \quad (34)$$

Нетрудно проверить, что найденная функция удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению

$$\frac{\hat{x} - 1}{2}(\mathbb{F}(\hat{x}, \tau) - \mathbb{F}(\hat{x} - 2, \tau)) + (\hat{\ell} + 1)(\mathbb{F}(\hat{x}, \tau) - \mathbb{F}(\hat{x} - 1, \tau)) = \tau \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{F}(\hat{x}, \tau) \quad (35)$$

и, следовательно, генерирует правильные собственные состояния с определенной проекцией спина.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, соотношение (29) позволяет строить собственные векторы оператора Казимира C_{12} , действующего в пространстве тензорного произведения V двух представлений младшего веса $\phi_n(x_1 - x_2)$ и $\phi_n^m(x_1, x_2) = (\mathbb{S}^+)^m \varphi_n(x_1 - x_2)$ для произволь-

ных спинов ℓ_1 и ℓ_2 , который коммутирует с универсальной R -матрицей, сплетающей эти представления по правилу

$$\bar{\mathcal{C}}_{12} R_{12}(u) = R_{12}(u) \mathcal{C}_{12}. \quad (36)$$

Соответственно эти векторы будут собственными состояниями универсальной R -матрицы, определенными согласно

$$R_{12}(u) \phi_n^m(x_1, x_2) = R_n(u) \bar{\phi}_n^m(x_1, x_2), \quad (37)$$

где собственные значения $R_n(u)$ также вырождены по индексу n , как и для оператора Казимира. Работа по построению универсальной R -матрицы скоро будет завершена. Есть определенные указания (см. [11], [12]) на то, что собственные значения $R_n(u)$ не деформируются, а даются теми же самыми выражениями

$$R_n(u) = -\frac{n - \ell_1 - \ell_2 + u}{n - \ell_1 - \ell_2 - u} R_{n-1}(u) = (-1)^n R_0(u) \prod_{k=1}^n \frac{k - \ell_1 - \ell_2 + u}{k - \ell_1 - \ell_2 - u}, \quad (38)$$

что и в случае недеформированной алгебры $sl(2)$, подобно тому как это имеет место для оператора Казимира (25).

Наконец, стоит обсудить само появление производящей функции, ее физический смысл. Кажется, что ее роль важнее и глубже, нежели роль технического приема, используемого для вычисления собственных векторов. Заметим прежде всего, что производящая функция в контексте исследования универсального R -оператора в определенном смысле заменяет собой тензорное произведение двух произвольных представлений, которые несут в себе избыточную с этой точки зрения информацию. Действительно, оператор Казимира, а вместе с ним и универсальный R -оператор из каждой “башни” неприводимых представлений $\phi_n^m(x_1, x_2) = (\mathbb{S}^+)^m \phi_n(\hat{x})$ “чувствуют” только одного представителя в силу вырожденности по индексу m , а именно эта информация о младших представителях каждой такой “башни” и закодирована в производящей функции. Таким образом, упомянутые выше собственные значения R -оператора могут быть представлены в виде зависимости от переменной τ , подобно тому как оператор Казимира при действии на производящую функцию превращается в оператор второго порядка:

$$\mathcal{C}_{12} \mathbb{F}(\hat{x}, \tau) = \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \hat{\ell} \right) \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} + \hat{\ell} - 1 \right). \quad (39)$$

Соответственно R -оператор принимает вид приведенного Фаддеевым и Корчемским [16] отношения гамма-функций, зависящих от формального аргумента ψ , где $\mathcal{C}_{12} = \psi(\psi + 1)$, в соответствии с общим результатом [17]. С введением производящей функции этот формальный оператор принимает вид производной по τ : $\psi = \partial/\partial\tau$. Таким образом, основываясь на наблюдении того факта, что при жордановой деформации меняется вид собственных векторов, но не собственные значения, можно записать действие универсального R -оператора на производящей функции:

$$R(u, x_1, x_2) \mathbb{F}(\hat{x}, \tau) = \frac{\Gamma(u - \hat{\ell} + \tau \partial/\partial \tau)}{\Gamma(u + \hat{\ell} - 1 - \tau \partial/\partial \tau)} \bar{\mathbb{F}},$$

которое выглядит почти так же, как и в недеформированном случае, с той только разницей, что в недеформированном случае выражение для производящей функции проще: $\mathbb{F} = \overline{\mathbb{F}} = e^{\tau(x_1 - x_2)}$.

Благодарности. Автор благодарен Международному центру теоретической физики (ICTP), где данная работа была завершена, за гостеприимство, а также фондам Volkswagen Stiftung и SCOPE Swiss Foundation за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] *C. N. Yang.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1312.
- [2] *R. J. Baxter.* Ann. Phys. 1972. V. 70. P. 193.
- [3] *L. Alvarez-Gaume, C. Gomez, G. Sierra.* Phys. Lett. B. 1989. V. 220. P. 142.
- [4] *N. Yu. Reshetikhin, V. G. Turaev.* Commun. Math. Phys. 1990. V. 127. P. 1.
- [5] *Л. Д. Фаддеев, Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян.* Квантование групп Ли и алгебр Ли. Препринт ЛОМИ Е-14-87; Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. С. 178.
- [6] *V. G. Drinfel'd.* Quantum groups. In: Proc. Intern. Congress of Mathematicians (MSRI, Berkeley, 1986). Providence, RI: AMS, 1987. P. 798; *В. Г. Дринфельд.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 155. С. 18.
- [7] *А. Н. Кириллов, Н. Ю. Решетихин.* Универсальная R -матрица для деформации Дринфельда–Джимбо. Препринт ЛОМИ-Е-9-88. Л.: ЛОМИ, 1988.
- [8] *C. Ohn.* Lett. Math. Phys. 1992. V. 25. P. 85.
- [9] *E. E. Demidov, Yu. I. Manin, E. E. Mukhin, D. V. Zdanovich.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1990. V. 102. P. 203.
- [10] *A. Aghamohammadi, M. Khorrami, A. Shariati.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. L225.
- [11] *P. P. Kulish, A. Stolin.* New rational solutions of Yang–Baxter equation and deformed Yangians. q-alg/9608011; *S. M. Khoroshkin, A. A. Stolin, V. N. Tolstoy.* Deformation of Yangian $Y(sl_2)$. q-alg/9511005.
- [12] *A. Ballesteros, F. J. Herranz.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 4307.
- [13] *Л. Н. Лунатов.* Письма в ЖЭТФ. 1994. V. 59. P. 596; hep-th/9311037.
- [14] *S. Derkachov, D. Karakhanyan, R. Kirschner.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 583. P. 691; 2001. V. 618. P. 589; *D. Karakhanyan, R. Kirschner, M. Mirumyan.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 636. P. 529.
- [15] *J. Van der Jeugt.* The Jordanian deformation of $su(2)$ and Clebsch–Gordan coefficients. q-alg/9709005.
- [16] *L. D. Faddeev, G. P. Korchemsky.* Phys. Lett. B. 1995. V. 342. P. 311.
- [17] *В. О. Тарасов, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* ТМФ. 1983. Т. 57. С. 163.

Поступила в редакцию 9.XII.2002 г.