Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Новиков, Перенос пассивной векторной примеси двумерным турбулентным потоком, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 1, 52–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf212>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:54:27

ПЕРЕНОС ПАССИВНОЙ ВЕКТОРНОЙ ПРИМЕСИ ДВУМЕРНЫМ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОТОКОМ

Рассмотрена модель переноса пассивного векторного поля случайным некоррелированным во времени двумерным поперечным полем скорости с гауссовой пространственной статистикой, задаваемой степенным коррелятором. С использованием методов ренормгруппы и операторного разложения показано, что асимптотика структурных функций векторного поля в инерционном интервале определяется флуктуациями диссипации энергии. Зависимость асимптотики от внешнего масштаба турбулентности является существенной и имеет степенной вид (аномальный скейлинг). Соответствующие показатели рассчитаны в однопетлевом приближении для структурных функций произвольного порядка.

Ключевые слова: турбулентность, аномальный скейлинг, ренормгруппа, операторное разложение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Описание аномального скейлинга является одной из важных нерешенных проблем теории развитой однородной изотропной турбулентности. Термин *аномальный скейлинг* означает отклонения от предсказаний теории Колмогорова, которые обычно связывают с явлением перемежаемости. Аномальный скейлинг проявляется, в частности, в экспериментально наблюдаемом поведении структурных функций

$$S_n(r) \equiv \langle [\varphi_r(t, \mathbf{x} + \mathbf{r}) - \varphi_r(t, \mathbf{x})]^n \rangle \quad (1)$$

турбулентных пульсаций скорости $\varphi_i(t, \mathbf{x})$ в инерционном интервале $l \ll r \ll L$. Здесь L и l — соответственно внешний масштаб турбулентности и диссипативная длина, а $\varphi_r \equiv \varphi_i r_i / r$ — компонента φ в направлении $\mathbf{r}$. По теории Колмогорова $S_n(r) \sim r^{n/3}$, в то время как согласно эксперименту $S_n(r) \sim r^{n/3 - \gamma_n}$, где так называемые аномальные показатели γ_n невелики для малых n , но нелинейно растут с ростом n и достигают заметного значения при $n = 18$ [1]. На возможность отклонений от теории Колмогорова указывал еще Ландау, который связывал их с флуктуациями локальной диссипации энергии (см., например, [2]). Идеи Ландау нашли отражение в многочисленных феноменологических

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: spnov@mail.ru

теориях (см., например, [3]). В рамках теоретико-полевого подхода обобщением этих идей может считаться операторное разложение, согласно которому

$$S_n(r) \propto r^{n/3} \sum_F \left(\frac{r}{L} \right)^{\Delta_F} A_F, \quad (2)$$

где суммирование ведется по всевозможным скалярным галилеево-инвариантным составным операторам F (локальным произведениям полей $\varphi_i(t, \mathbf{x})$ и их производных), A_F – коэффициенты операторного разложения, Δ_F – критические размерности этих операторов [4], [5]. В набор F входят, в частности, все степени оператора диссипации $\Phi_{\text{dis}} \equiv (\partial_i \varphi_j + \partial_j \varphi_i)^2 / 2$. Если бы для всех F выполнялось условие $\Delta_F > 0$, члены суммы в (2) определяли бы в инерционном интервале поправки к колмогоровскому скейлингу. Если же в (2) присутствует хотя бы один оператор с $\Delta_F < 0$ (“опасный” оператор), предел $r/L \rightarrow 0$ в (2) перестает существовать, что и приводит к аномальному скейлингу.

Вопрос о существовании галилеево-инвариантных “опасных” операторов является, таким образом, ключевым в описанном сценарии возникновения аномального скейлинга. Нахождение размерностей составных операторов в теории турбулентности представляет собой весьма сложную задачу, попытки ее решения предпринимались до настоящего времени только с помощью метода ренормализационной группы (РГ) в рамках ε -разложения [6], [7]. Использование уравнения Швингера позволило точно вычислить размерность оператора диссипации Φ_{dis} – она оказалась равной нулю [8], [9]. “Опасные” операторы с отрицательными критическими размерностями среди исследованных обнаружены не были [6]. Это связано, вероятно, с тем, что критическую размерность даже простейшего “кандидата на опасность” – квадрата оператора диссипации – рассчитать не удалось (хотя такие попытки и предпринимались [10]) из-за больших вычислительных трудностей, обусловленных смешиванием операторов при ренормировке. Например, для нахождения размерности Φ_{dis}^2 необходимо рассчитать матрицу констант ренормировки для 13 операторов [10]. В их число входят, в частности, аналоги Φ_{dis}^2 – скалярные операторы, составленные из четвертой степени градиента поля $A_{ij} \equiv \partial_i \varphi_j$ всевозможными свертками значков тензора:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= (\text{Tr } A^2)^2, \quad \Phi_2 = (\text{Tr } A A^T)^2, \quad \Phi_3 = (\text{Tr } A^2)(\text{Tr } A A^T), \quad \Phi_4 = \text{Tr } A^2 A^T A^T, \\ \Phi_5 &= \text{Tr } A A^T A A^T, \quad \Phi_6 = \text{Tr } A^3 A^T, \quad \Phi_7 = \text{Tr } A^4, \quad A_{ij} = (A^T)_{ji} \equiv \partial_i \varphi_j. \end{aligned} \quad (3)$$

Оператор диссипации выражается через Φ_n соотношением $\Phi_{\text{dis}} = \Phi_1 + \Phi_2$.

Аномальный скейлинг проявляется также в свойствах поля пассивной примеси $\theta(t, \mathbf{x})$, переносимой турбулентными пульсациями. В этом случае в его описании достигнут в последнее время значительный прогресс в рамках относительно простой модели [11]–[13], в которой статистика турбулентных пульсаций моделируется гауссовым распределением, некоррелированным во времени (модель Крейчнана). Для одновременных корреляционных функций поля $\theta(t, \mathbf{x})$ удается получить замкнутые линейные уравнения, с помощью которых для структурных функций $S_n(r) = \langle [\theta(t, \mathbf{x}) - \theta(t, \mathbf{x}')]^n \rangle$ был обоснован аномальный скейлинг и в пространстве размерности d вычислены аномальные показатели в первом порядке ε -разложения [14], [15] и $1/d$ -разложения [16], [17]. Весьма эффективным оказалось использование в модели Крейчнана упомянутых выше

полевых методов – метода операторного разложения и РГ-метода. С их помощью аномальные показатели были вычислены во втором порядке ε -разложения [4], [5], а затем и в третьем [18]. Это стало возможным из-за отсутствия смешивания операторов в данной задаче. Основной вклад в операторное разложение (2) дали степени оператора диссипации $(\partial_i \theta)^2$. С помощью полевого подхода удалось рассчитать аномальные показатели и в модели с конечным временем корреляции поля скорости, когда построить замкнутые уравнения на одновременные корреляционные функции невозможно [19]. В работе [20] полевые методы применены к рассмотрению модели Крейчнана с анизотропным полем скорости.

Полученные в модели Крейчнана результаты позволяли надеяться, что для подходящего ее обобщения на случай векторного примесного поля удастся преодолеть трудности со смешиванием операторов и рассчитать значения аномальных индексов. Такая модель была рассмотрена в работах [21]–[23]. В [22], [23] изучена парная структурная функция (в пространстве размерности $d = 3$ [22] и $d = 2$ [23]), для которой было получено замкнутое уравнение. Аномальный скейлинг для изотропных решений в этих случаях отсутствует. В [21] рассмотрено операторное разложение для четвертой структурной функции. Определяющее аномальные индексы семейство операторов в данном случае состоит из семи операторов (3) (в то время как для уравнения Навье–Стокса в аналогичное семейство входят еще шесть операторов). Среди рассчитанных критических размерностей были обнаружены отрицательные – тем самым впервые было доказано наличие аномального скейлинга для векторного поля со смешиванием операторов.

Целью настоящей работы является расчет показателей аномального скейлинга в векторной модели Крейчнана для структурных функций $S_n(r)$ произвольного порядка n . Дополнительной важной проблемой, возникшей при решении этой задачи, явилось нахождение операторов, дающих вклад в разложение (2). Поясним это на примере семейства операторов (3). Во-первых, в разложение (2) дают вклад только операторы с ненулевыми средними значениями, поэтому из набора операторов необходимо исключить их линейные комбинации, сводящиеся к полным производным. Нахождение всех таких комбинаций – нетривиальная задача. Например, в семействе (3) такой комбинацией оказывается

$$3\Phi_1 - 6\Phi_7 = \partial_i [-6\varphi_k (A^3)_{ki} + 3\varphi_k A_{ki} \text{Tr} A^2 + 2\varphi_i \text{Tr} A^3].$$

Во-вторых, в пространствах достаточно низкой размерности d операторы Φ_i перестают быть независимыми. Так, при $d = 3$ возникают линейные связи $\Phi_3 = 2\Phi_6$ и $\Phi_1/2 + \Phi_2 - 2\Phi_4 - \Phi_5 = 0$, а при $d = 2$ – дополнительная связь $\Phi_1 = 2\Phi_4$ [21]. Выявление всех таких связей необходимо, чтобы исключить из (2) “фиктивные” аномальные показатели. Решить эти проблемы и рассчитать показатели аномального скейлинга в настоящей работе удалось для случая $d = 2$.

Структура работы следующая. В разделе 2 описана постановка стохастической задачи переноса векторной пассивной примеси. В разделе 3 дана эквивалентная этой задаче полевая формулировка векторной модели. Для рассматриваемого ниже случая $d = 2$ полевая модель переформулирована в терминах скалярного поля. Кратко описаны процедуры ренормировки и нахождения неподвижной точки РГ. Приводятся формула РГ-представления структурных функций и формула операторного разложения для

нахождения их асимптотики. В разделе 4 решается вопрос о нахождении системы независимых операторов, дающих главный вклад в операторное разложение. В разделе 5 в однопетлевом приближении рассчитаны критические размерности этих операторов и приведена соответствующая асимптотика структурных функций. В разделе 6 суммируются полученные результаты. Вопрос о наличии в рассмотренной системе операторов, сводящихся к полным производным, обсуждается в приложении.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Перенос пассивного поперечного векторного поля $\varphi_i(x) \equiv \varphi_i(t, \mathbf{x})$ поперечным турбулентным полем скорости $v_i(x)$ описывается уравнением

$$\partial_t \varphi_i + (v_j \partial_j) \varphi_i = \nu_0 \Delta \varphi_i - \partial_i P + f_i \quad (4)$$

и условиями поперечности (несжимаемости)

$$\partial_i \varphi_i = \partial_i v_i = \partial_i f_i = 0. \quad (5)$$

Здесь $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, ν_0 — коэффициент диффузии, P и f_i — давление и случайная сила в расчете на единицу массы. Случайная сила имеет гауссово распределение с нулевым средним и коррелятором

$$\langle f_i(x) f_j(x') \rangle = \delta(t - t') C_{ij} \left(\frac{\mathbf{r}}{L} \right), \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}'. \quad (6)$$

Параметр L задает характерный интегральный масштаб для случайной силы. Безразмерная функция C_{ij} имеет конечный предел при $L \rightarrow \infty$. Точный вид функции не важен, она лишь моделирует приток энергии от взаимодействия с крупными вихрями для компенсации диссипативных потерь.

Статистика поля скорости $v_i(x)$ в модели Крейчнана также моделируется гауссовым распределением с нулевым средним и коррелятором

$$\langle v_i(x) v_j(x') \rangle = D_0 \delta(t - t') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} P_{ij}(\mathbf{k}) k^{-d-\varepsilon} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (7)$$

где $P_{ij}(\mathbf{k}) \equiv \delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ — поперечный проектор. Физическим значением параметра ε считается $\varepsilon = 4/3$, при котором амплитуда D_0 имеет размерность мощности накачки энергии на единицу массы. Сходимость интеграла в (7) обеспечивается обрезанием на малых волновых числах, соответствующих характерному интегральному масштабу поля скорости. Так как точный вид обрезания не существен для интересующих нас масштабов из инерционного интервала $kL \gg 1$, далее не различаются интегральные масштабы случайной силы и поля скорости и интеграл в (7) берется по области $k \geq 1/L$.

В работе [24] рассмотрен более общий вид уравнения для пассивного поперечного векторного поля, а именно в левую часть уравнения (4) добавлено дополнительное нелинейное слагаемое $A \varphi_j \partial_j v_i$ с некоторым коэффициентом A . Как частные случаи такая модель включает в себя “магнитную” модель Казанцева–Крейчнана [25], [26] ($A = -1$)

и линеаризованное уравнение Навье–Стокса ($A = 1$). В последнем случае она описывает перенос мелкомасштабных компонент скорости $\varphi(x)$ крупномасштабным полем $\mathbf{v}(x)$ с заданной статистикой. Уравнение (4) ($A = 0$) соответствует дополнительному предположению о возможности отбросить слагаемое с градиентом $\partial \mathbf{v}$ крупномасштабного поля.

С точки зрения анализа аномального скейлинга с помощью операторного разложения (2) именно модель с $A = 0$ наиболее близка к уравнению Навье–Стокса. Дело в том, что только при $A = 0$ задача становится инвариантной относительно сдвига поля φ_i на постоянное значение. Такой же инвариантностью обладают структурные функции (3), это приводит к тому, что в разложение (2) дают вклад лишь операторы, построенные из градиентов поля (степени самого поля запрещены). Аналогичная картина имеет место и для уравнения Навье–Стокса благодаря его галилеевой инвариантности. В случае же $A \neq 0$ главный вклад в разложение (2) дают степени поля, при этом смешивание операторов отсутствует, что не соответствует сценарию возникновения аномального скейлинга в уравнении Навье–Стокса.

3. ПОЛЕВАЯ ФОРМУЛИРОВКА. ОПЕРАТОРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Стохастическая задача (4)–(7) эквивалентна полевой модели с функционалом действия

$$\mathcal{S}(\varphi', \varphi, \mathbf{v}) = \frac{\varphi' D_{\varphi} \varphi'}{2} + \varphi' [-\partial_t - (\mathbf{v} \partial) + \nu_0 \Delta] \varphi - \frac{\mathbf{v} D_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{v}}{2}, \quad (8)$$

где первые два слагаемых представляют собой действие типа Мартина–Сигги–Роуза для стохастической задачи (4)–(6) при фиксированном $\mathbf{v}$; последнее слагаемое – гауссово усреднение по $\mathbf{v}$; D_{φ} и $D_{\mathbf{v}}$ – корреляционные функции (6) и (7), соответственно; φ' – вспомогательное поперечное векторное поле. Необходимые интегрирования по t и $\mathbf{x}$, а также суммирования по индексам подразумеваются, например

$$\varphi'(\mathbf{v} \partial) \varphi \equiv \int d\mathbf{x} \varphi'_i(x) (v_j \partial_j) \varphi_i(x), \quad d\mathbf{x} \equiv dt d\mathbf{x}.$$

Давление не входит в функционал (8) вследствие поперечности вспомогательного поля φ' .

Полевая формулировка позволяет отождествить статистическое усреднение $\langle \cdot \rangle$ с функциональным усреднением с весом $e^{\mathcal{S}}$. Объектом изучения в настоящей работе являются структурные функции вида (1) в инерционном интервале. Инвариантность действия (8) относительно преобразования $\varphi \rightarrow -\varphi$, $\varphi' \rightarrow -\varphi'$ приводит к тому, что отличными от нуля оказываются только структурные функции $S_{2n}(r)$ с четными номерами.

Воспользовавшись тем, что двумерное поперечное векторное поле представимо в виде

$$\varphi_i(x) = \epsilon_{ij} \partial_j \phi(x) \quad (9)$$

с антисимметрическим тензором ϵ_{ij} и скалярным полем $\phi(x)$, можно выразить действие (8) в терминах скалярных полей ϕ и ϕ' :

$$\mathcal{S}(\phi', \phi, \mathbf{v}) = \frac{\phi' D_{\phi} \phi'}{2} + \phi' [\partial_t \Delta + \partial_{\alpha} (\mathbf{v} \partial) \partial_{\alpha} - \nu_0 \Delta^2] \phi - \frac{\mathbf{v} D_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{v}}{2}. \quad (10)$$

При переходе от (8) к (10) использовано тождество $\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$, произведено интегрирование по частям и введено обозначение

$$D_\phi(x - x') = -\Delta \text{Tr} D_\varphi(x - x') = -\delta(t - t') \Delta C_{ii} \left(\frac{\mathbf{r}}{L} \right). \quad (11)$$

Вследствие равенства функционалов действия (8) и (10) соответствующие модели тождественны при $d = 2$ и приводят к одинаковым ответам для одних и тех же объектов.

Действию (10) соответствует стандартная фейнмановская диаграммная техника с треххвостой вершиной $\phi' \phi v_i V_i$ и вершинным множителем

$$V_i(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = i k_\alpha p_\alpha p_i, \quad (12)$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ – импульсы, втекающие в вершину через поля ϕ и ϕ' , соответственно. Затра-
вочные корреляторы модели (10) в импульсно-частотном $(\mathbf{k}, \omega)$ представлении имеют вид

$$\langle \phi(\omega, \mathbf{k}) \phi'(-\omega, -\mathbf{k}) \rangle_0 = \langle \phi'(\omega, \mathbf{k}) \phi(-\omega, -\mathbf{k}) \rangle_0^* = \frac{1}{k^2(-i\omega + \nu_0 k^2)}, \quad (13)$$

$$\langle \phi'(\omega, \mathbf{k}) \phi'(-\omega, -\mathbf{k}) \rangle_0 = 0, \quad (14)$$

коррелятор $\langle \phi \phi \rangle_0$ для вычислений констант ренормировки не понадобится. Эффективным параметром теории возмущений модели (10) является заряд

$$g_0 \equiv \frac{D_0}{\nu_0} \equiv \Lambda^\varepsilon, \quad (15)$$

последнее равенство в (15) определяет характерный УФ-масштаб Λ .

Анализ УФ-расходимостей и ренормировка модели (10) не отличаются от проведенных в работе [21] для модели (8). Приведем поэтому лишь необходимые результаты. Модель логарифмична (размерность g_0 равна нулю) при $\varepsilon = 0$. УФ-расходимости диаграмм проявляются в виде полюсов по ε , они устраняются введением единственного контрчлена вида $\phi' \Delta^2 \phi$, что эквивалентно мультипликативной ренормировке параметров g_0, ν_0 в функционале действия (10) с единственной независимой константой ренормировки Z_ν :

$$\nu_0 = \nu Z_\nu, \quad g_0 = g \mu^\varepsilon Z_g, \quad Z_g = Z_\nu^{-1}. \quad (16)$$

Здесь μ – ренормировочная масса в используемой в дальнейшем схеме минимальных вычитаний (MS-схема), g и ν – ренормированные аналоги затраточных параметров g_0 и ν_0 , $Z = Z(g, \varepsilon, d)$ – константы ренормировки. Связь между ними в (16) есть следствие отсутствия ренормировки последнего слагаемого в (10), не требуется также ренормировки полей, т.е. $Z_\phi = Z_{\phi'} = 1$. Ренормированный функционал действия имеет вид

$$\mathcal{S}_R(\phi', \phi, \mathbf{v}) = \frac{\phi' D_\phi \phi'}{2} + \phi' [\partial_t \Delta + \partial_\alpha (\mathbf{v} \partial) \partial_\alpha - \nu Z_\nu \Delta^2] \phi - \frac{\mathbf{v} D_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{v}}{2}, \quad (17)$$

где в корреляторе $D_{\mathbf{v}}$ амплитуда D_0 предполагается выраженной через ренормированные параметры согласно (15), (16): $D_0 \equiv g_0 \nu_0 = g \mu^\varepsilon \nu$. В однопетлевом приближении константа ренормировки Z_ν дается выражением [21]

$$Z_\nu = 1 - \frac{g}{32\pi\varepsilon}. \quad (18)$$

В действительности этот результат оказывается точным [21], так как определяющие Z_ν многопетлевые диаграммы содержат замкнутые циклы запаздывающего пропагатора (13) и поэтому равны нулю (следствие некоррелированности по времени поля $\mathbf{v}$ в модели Крейчана (7)).

Введем обозначения дифференциальных операторов: $\tilde{\mathcal{D}}_\mu \equiv \mu \partial_\mu$ при постоянных g_0 и ν_0 , а также $\mathcal{D}_g \equiv g \partial_g$ при постоянных ν , μ . По константам ренормировки Z_ν , Z_g РГ-функции определяются как

$$\gamma_i(g) \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_i, \quad (19)$$

а бета-функция –

$$\beta(g) \equiv \tilde{\mathcal{D}}_\mu g = g[-\varepsilon + \gamma_\nu(g)]. \quad (20)$$

Соотношение между β и γ в последнем уравнении – следствие определения (19) и последнего равенства в (16). Из формул (18)–(20) для РГ-функции $\gamma_\nu(g)$ имеем

$$\gamma_\nu(g) = \frac{-\varepsilon \mathcal{D}_g \ln Z_\nu}{1 - \mathcal{D}_g \ln Z_\nu} = \frac{g}{32\pi}. \quad (21)$$

Соотношения (20), (21) показывают, что в модели (17) существует ИК-устойчивая неподвижная точка $\beta(g_*) = 0$, $\beta'(g_*) > 0$ с координатой

$$g_* = 32\pi\varepsilon. \quad (22)$$

Это значение g_* , а также вытекающее из (20) значение $\gamma_\nu(g)$ в неподвижной точке $\gamma_\nu^* \equiv \gamma_\nu(g_*) = \varepsilon$ определены точно, т.е. не имеют поправок $\sim \varepsilon^2, \varepsilon^3$ и т.д.

Критическая размерность Δ_F любой мультипликативно ренормируемой величины (составного оператора или корреляционной функции) $F = Z_F F_R$ с константой ренормировки Z_F определяется соотношением

$$\Delta_F = d_F^k + \Delta_\omega d_F^\omega + \gamma_F^*, \quad \Delta_\omega = 2 - \gamma_\nu^* = 2 - \varepsilon, \quad (23)$$

где d_F^k и d_F^ω – импульсная и частотная размерности F (канонические размерности), $\gamma_F^* \equiv \gamma_F(g_*)$ – значение аномальной размерности $\gamma_F = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \ln Z_F$ в неподвижной точке. Скалярное поле ϕ имеет размерности $d_\phi^k = -1$, $d_\phi^\omega = -1/2$, $\gamma_\phi = 0$, и в силу (23) его критическая размерность равна

$$\Delta_\phi = -2 + \frac{\varepsilon}{2} \quad (24)$$

(для векторного поля φ_i в [21] $d_\varphi^k = d_\phi^k + 1$, $\Delta_\varphi = \Delta_\phi + 1$ ввиду наличия производной в соотношении $\varphi_i = \epsilon_{ij} \partial_j \phi$). Для структурных функций (1) имеем соответственно $d_{S_{2n}}^k = 0$, $d_{S_{2n}}^\omega = -n$ и тривиальную аномальную размерность $\gamma_{S_{2n}}^* = 0$, так как $Z_{S_{2n}} = 1$ из-за

отсутствия ренормировки поля ϕ и всех его степеней ϕ^n [21]. Таким образом, согласно (23) критическая размерность структурных функций равна $\Delta_{S_{2n}} = 2n\Delta_\varphi = -2n + n\varepsilon$, и в ИК-асимптотике они имеют вид

$$S_{2n}(r) = D_0^{-n} r^{-2n\Delta_\varphi} \xi_n\left(\frac{r}{L}\right) = D_0^{-n} r^{n(2-\varepsilon)} \xi_n\left(\frac{r}{L}\right). \quad (25)$$

Скейлинговая функция $\xi_n(r/L)$ собственно уравнениями РГ не определяется. В интересующей нас области $r/L \rightarrow 0$ (инерционный интервал) ее асимптотический вид может быть найден из операторного разложения

$$S_{2n}(r) = D_0^{-n} r^{n(2-\varepsilon)} \sum_F \left(\frac{r}{L}\right)^{\Delta_F} A_F, \quad (26)$$

совпадающего с (2) при физическом значении $\varepsilon = 4/3$.

4. БАЗИС ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИДА $(\partial\varphi)^n$

В соответствии со сказанным во введении главный вклад в операторное разложение скейлинговых функций векторной модели (8) дают скалярные операторы $(\partial\varphi)^n$, точнее всевозможные свертки степеней тензоров $A_{ij} = \partial_i\varphi_j$ и $A_{ij}^T = \partial_j\varphi_i$ вида (3). Используемой нами модели (10) скалярного поля $\phi(x)$, эквивалентной (8) при $d = 2$, соответствующие операторы с учетом связи $\varphi_i = \epsilon_{ij}\partial_j\phi$ имеют вид всевозможных полных сверток степеней тензора $M_{ij} \equiv \partial_i\partial_j\phi$ и антисимметричного тензора ϵ_{ij} . Из этого набора надо отбросить операторы, имеющие нулевое среднее значение, так как они не дают вклада в (26). К ним относятся операторы, сводящиеся к полным производным, а также операторы с нечетным числом полей n , среднее от которых равно нулю ввиду упоминавшейся инвариантности действия относительно отражений $\varphi \rightarrow -\varphi$, $\varphi' \rightarrow -\varphi'$. Операторы с четным n с помощью соотношения $\epsilon_{ij}\epsilon_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ сводятся к всевозможным сверткам матриц M_{ij} , уже не содержащим тензора ϵ_{ij} . Те из них, которые не распадаются на произведение сверток, имеют, очевидно, вид $K_n = \text{Tr } M^n$. Произвольную же полную свертку $(\partial\partial\phi)^n$ можно представить в виде произведения, составленного из операторов K_i :

$$(\partial\partial\phi)^n = K_1^{q_1} K_2^{q_2} \dots K_n^{q_n}, \quad \sum_{1 \leq j \leq n} j q_j = n. \quad (27)$$

Величины K_n не являются независимыми. Чтобы показать это, воспользуемся тождеством Гамильтона–Кэли для квадратной (2×2) -матрицы M , имеющим вид

$$M^2 - K_1 M + \frac{1}{2}(K_1^2 - K_2)I = 0,$$

где I — единичная матрица. После умножения на M^n и взятия следа оно преобразуется к виду

$$K_{n+2} - K_1 K_{n+1} + \frac{1}{2}(K_1^2 - K_2)K_n = 0. \quad (28)$$

Это соотношение позволяет рекуррентным образом выразить любой оператор K_n с $n \geq 3$ в виде полинома от K_1 и K_2 , составленного из мономов $K_1^{q_1} K_2^{q_2}$ с $q_1 + 2q_2 = n$.

Это, в свою очередь, означает, что в качестве базиса для составных операторов с четным числом полей можно выбрать совокупность операторов

$$F_q(x) \equiv K_1^{2n-2q}(x)K_2^q(x), \quad q = 0, \dots, n. \quad (29)$$

В частности, для семейства операторов (3) с $n = 2$, выраженных в терминах скалярного поля ϕ , имеем три независимых оператора (29), что соответствует результатам [21] (см. приведенные во введении связи на Φ_i).

Вопрос о наличии среди операторов (29) полных производных рассмотрен в приложении, где показано, что таковыми являются лишь K_1 и $K_1^2 - K_2$. Это означает, что остальные линейные комбинации операторов F_k , сводящиеся к полным производным в общем случае d -мерного пространства (одна из таких комбинаций приведена во введении), обращаются в нуль для $d = 2$ при учете возникающих в этой размерности дополнительных связей между операторами. Среди операторов (29) с $n = 2$ имеется, таким образом, лишь один независимый, в качестве которого можно выбрать оператор

$$\mathcal{K}_2 \equiv 2K_2 - K_1^2 = \frac{(\partial_i \varphi_j + \partial_j \varphi_i)^2}{2},$$

совпадающий с оператором диссипации Φ_{dis} .

Использование операторов (29), построенных из степеней мономов, в качестве базисных кажется весьма естественным. Однако с точки зрения процедуры ренормировки значительно более удобными оказались операторы

$$\mathcal{F}_q(x) \equiv \mathcal{K}_1^{2n-2q}(x)\mathcal{K}_2^q(x), \quad (30)$$

построенные на основе степеней оператора диссипации $\mathcal{K}_2$. Второй оператор $\mathcal{K}_1^2 \equiv K_1^2$, степени которого входят в базис (30), в терминах исходного векторного поля имеет вид $\mathcal{K}_1^2 = (\partial_i \varphi_j - \partial_j \varphi_i)^2/2$.

5. КРИТИЧЕСКИЕ РАЗМЕРНОСТИ БАЗИСНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОДНОПЕТЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ. АСИМПТОТИКА СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ

Операторы $\mathcal{F}_q(x)$ ренормируются немультпликативно, со смешиванием. Их ренормированные аналоги $\mathcal{F}_k^{\text{R}}$ определяются соотношением

$$\mathcal{F}_q = Z_{qk} \mathcal{F}_k^{\text{R}}. \quad (31)$$

По матрице констант ренормировки Z_{qk} определяется соответствующая матрица аномальных размерностей

$$\gamma_{qk} = (Z_F^{-1} \tilde{D}_\mu Z_F)_{qk}, \quad (32)$$

значения собственных чисел которой в неподвижной точке представляют собой аномальные размерности операторов, диагонализующих эту матрицу.

Произведем расчет констант ренормировки семейства (30) в однопетлевом приближении. Пусть $\Gamma_q(x; \phi)$ — производящий функционал 1-неприводимых функций Грина с одним оператором из семейства $\mathcal{F}_q$ и любым количеством полей ϕ . Здесь $x \equiv (t, \mathbf{x})$ —

аргумент оператора, а ϕ – функциональный аргумент. Нас интересует $2n$ -й член разложения $\Gamma_q(x; \phi)$ по ϕ , который обозначается $\Gamma_q^{(2n)}(x; \phi)$ и дается выражением

$$\Gamma_q^{(2n)}(x; \phi) = \frac{1}{(2n)!} \int dx_1 \dots \int dx_{2n} \phi(x_1) \dots \phi(x_{2n}) \langle \mathcal{F}_q(x) \phi(x_1) \dots \phi(x_{2n}) \rangle_{1\text{-н.п.}}, \quad (33)$$

где 1-н.п. означает 1-неприводимая. Диаграммное представление функции (33) в одно-петлевом приближении имеет вид

$$\Gamma_q^{(2n)} = \mathcal{F}_q + \frac{1}{2} \text{ (диаграмма: черная точка, соединенная двумя линиями, одна из которых волнистая)}. \quad (34)$$

Первое слагаемое соответствует беспетлевому приближению. Во втором слагаемом прямая линия обозначает пропагатор $\langle \phi \phi' \rangle_0$ из (13), причем концы с перечеркиванием соответствуют полям ϕ' , а без перечеркивания – полям ϕ , волнистой линии соответствует коррелятор скорости (7), вершинам сопоставляется множитель (12). Черный кружок с двумя присоединенными линиями обозначает вариационную производную $V(x; x_1, x_2) \equiv \delta^2 \mathcal{F}_q(x) / (\delta \phi(x_1) \delta \phi(x_2))$. Удобно представить эту производную в виде

$$V(x; x_1, x_2) = \partial_i \partial_j \delta(x - x_1) \partial_k \partial_l \delta(x - x_2) \frac{\partial^2}{\partial m_{ij} \partial m_{kl}} (\mathcal{F}_q |_{\partial_\alpha \partial_\beta \phi = m_{\alpha\beta}}) \quad (35)$$

с заменой после дифференцирования $m_{\alpha\beta}$ снова на $\partial_\alpha \partial_\beta \phi(x)$. Приведем аналитическое выражение для диаграммы из (34):

$$\begin{aligned} & \int dx_1 \dots \int dx_4 V(x; x_1, x_2) \partial_\alpha \partial_\beta \phi(x_3) \partial_\gamma \partial_\delta \phi(x_4) \times \\ & \times \langle \phi(x_1) \partial_\alpha \phi'(x_3) \rangle_0 \langle \phi(x_2) \partial_\gamma \phi'(x_4) \rangle_0 \langle v_\beta(x_3) v_\delta(x_4) \rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь пропагаторы определяются соотношениями (7) и (13), производные соответствуют вершинным множителям (12).

Для нахождения констант ренормировки достаточно знать лишь УФ-расходящуюся часть (36). Она представляет собой линейную комбинацию мономов, состоящих из n множителей вида $\partial \partial \phi(x)$, взятых в одной и той же точке x . Необходимые $2n$ производные уже выделены в (36), из них $2n - 4$ – из выражения (35), а оставшиеся четыре – из вершинных множителей (12). Следовательно, можно пренебречь неоднородностью производных и заменить их на значения в точке x , положив $m_{ij} = \partial_i \partial_j \phi(x)$. Тогда выражение (36) с точностью до УФ-конечной части принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial m_{ij} \partial m_{kl}} (\mathcal{F}_q |_{\partial_\alpha \partial_\beta \phi = m_{\alpha\beta}}) \partial_\alpha \partial_\beta \phi(x) \partial_\gamma \partial_\delta \phi(x) X_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijkl}, \quad (37)$$

где

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijkl} \equiv \int dx_3 \int dx_4 \langle \partial_i \partial_j \phi(x) \partial_\alpha \phi'(x_3) \rangle_0 \langle \partial_k \partial_l \phi(x) \partial_\gamma \phi'(x_4) \rangle_0 \langle v_\beta(x_3) v_\delta(x_4) \rangle_0. \quad (38)$$

После перехода в (38) к импульсно-частотному представлению и взятия интеграла по частоте получаем

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijkl} = \frac{D_0}{2\nu_0} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{p_i p_j p_k p_l p_\alpha p_\gamma}{p^6} \frac{P_{\beta\delta}(\mathbf{p})}{p^{d+\varepsilon}} \quad (39)$$

с параметром D_0 из (7). Выполнение в (39) интегрирования по модулю $\mathbf{p}$ в пределах от $1/L$ до ∞ дает

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijkl} = \frac{D_0}{4\pi\nu_0} \frac{L^\varepsilon}{\varepsilon} \langle n_i n_j n_k n_l n_\alpha n_\gamma P_{\beta\delta}(\mathbf{n}) \rangle_\sigma, \quad (40)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по направлениям единичного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$. Изотропия задачи позволяет использовать для этого усреднения соотношение

$$\langle n_{i_1} \dots n_{i_{2k}} \rangle_\sigma = \frac{\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2k-1} i_{2k}} + \text{все возможные перестановки}}{2^k k!}. \quad (41)$$

Ниже производится построение специфической диаграммной техники, существенно облегчающей вычисление выражения (37). Для построения диаграмм используются следующие правила соответствия: функции $\phi(x)$ сопоставляется черный кружок, называемый далее вершиной, производной $\partial_i \phi$ – линия с индексом i , присоединенная к кружку, производной $n_i \partial_i \phi$ – аналогичная линия без индекса. Свертке двух индексов сопоставляется линия, соединяющая соответствующие вершины. Ниже приведены иллюстрации этих правил соответствия:

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j \phi &= i \text{ --- } \bullet \text{ --- } j, & \hat{K}_1 &\equiv n_i n_j \partial_i \partial_j \phi = \text{---} \bullet \text{---}, \\ \partial_i \partial_k \phi \cdot \partial_k \partial_j \phi &= i \text{ --- } \bullet \text{---} \bullet \text{---} j, & \hat{K}_2 &\equiv n_i n_j \partial_i \partial_k \phi \cdot \partial_k \partial_j \phi = \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---}. \end{aligned} \quad (42)$$

Для операторов $K_n = \text{Tr } M^n$ согласно этим правилам имеем

$$K_1 = \text{---} \bullet \text{---}, \quad K_2 = \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---}, \quad K_3 = \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---}, \quad \dots \quad (43)$$

В (42) и ниже знаком $\hat{}$ отмечаются величины, зависящие от вектора $\mathbf{n}$ и подлежащие в дальнейшем усреднению по всевозможным его ориентациям. Как следует из (41), такому усреднению соответствуют на диаграммном языке всевозможные спаривания $2k$ свободных концов диаграмм без индексов, умноженные на $1/(2^k k!)$. Например,

$$\begin{aligned} \langle \hat{K}_2 \rangle_\sigma &= \langle \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \rangle_\sigma = \frac{1}{2} \langle \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \rangle_\sigma = \frac{K_2}{2}, \\ \langle \hat{K}_1^2 \rangle_\sigma &= \langle \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \rangle_\sigma = \frac{1}{4} \langle \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \rangle_\sigma + \frac{1}{8} \langle \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \rangle_\sigma = \frac{K_2}{4} + \frac{K_1^2}{8}. \end{aligned} \quad (44)$$

Введем теперь операцию

$$\hat{P}_\partial \equiv n_i n_j \frac{\partial}{\partial m_{ij}}. \quad (45)$$

С учетом этого определения, подставляя (40) в (37) и внося производные под знак углового усреднения, представим (37) в виде

$$\frac{D_0}{4\pi\nu_0} \frac{L^\varepsilon}{\varepsilon} \langle \hat{H}(\hat{P}_\partial^2 \mathcal{F}_q) \rangle_\sigma, \quad (46)$$

где

$$\hat{H} \equiv n_\alpha n_\gamma (\delta_{\beta\delta} - n_\beta n_\delta) \partial_\alpha \partial_\beta \phi \cdot \partial_\gamma \partial_\delta \phi = \hat{K}_2 - \hat{K}_1^2 = \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---}. \quad (47)$$

Переходя к расчету величины $\hat{P}_\partial^2 \mathcal{F}_q$ в (46), используем очевидные соотношения $\hat{P}_\partial \mathcal{K}_1 = 1$, $\hat{P}_\partial^2 \mathcal{K}_1 = 0$ для базисного оператора $\mathcal{K}_1 = K_1$, соотношение

$$\hat{P}_\partial \mathcal{K}_2 = 4 \text{---} \text{---} - 2K_1 = 4\hat{K}_1 - 2K_1 \quad (48)$$

для базисного оператора $\mathcal{K}_2 = 2K_2 - K_1^2$ и вытекающее из (48) равенство $\hat{P}_\partial^2 \mathcal{K}_2 = 2$. В результате получим

$$\begin{aligned} \hat{P}_\partial^2 \mathcal{F}_q &= 2(n-q)(2n-2q-1)\mathcal{K}_1^{2(n-q-1)}\mathcal{K}_2^q + 2q\mathcal{K}_1^{2(n-q)}\mathcal{K}_2^{q-1} + \\ &+ 2(n-q)q\mathcal{K}_1^{2n-2q-1}\mathcal{K}_2^{q-1}(\hat{P}_\partial \mathcal{K}_2) + q(q-1)\mathcal{K}_1^{2(n-q)}\mathcal{K}_2^{q-2}(\hat{P}_\partial \mathcal{K}_2)^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Как следует из (49), для определения величины $\langle \hat{H}(\hat{P}_\partial^2 \mathcal{F}_q) \rangle_\sigma$ в (46) необходимо вычислить средние $\langle \hat{H} \rangle_\sigma$, $\langle \hat{H}(\hat{P}_\partial \mathcal{K}_2) \rangle_\sigma$ и $\langle \hat{H}(\hat{P}_\partial \mathcal{K}_2)^2 \rangle_\sigma$. Первое из них находим, используя соотношения (47) и (44):

$$\langle \hat{H} \rangle_\sigma = \frac{1}{2}K_2 - \frac{1}{8}(2K_2 + K_1^2) = \frac{1}{8}K_2. \quad (50)$$

Оставшиеся два определяются, как видно из (48), величинами $\langle \hat{H}\hat{K}_1 \rangle_\sigma$ и $\langle \hat{H}\hat{K}_1^2 \rangle_\sigma$. Учитывая (47) и используя сформулированные выше диаграммные правила расчета угловых средних, получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}\hat{K}_1 \rangle_\sigma &= \langle \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---} \rangle_\sigma = \\ &= \frac{1}{8}(2K_3 + K_1 K_2) - \frac{1}{48}(8K_3 + 6K_1 K_2 + K_1^3) = \frac{1}{16}K_1 K_2. \end{aligned} \quad (51)$$

При выводе (51) использовано тождество (28), позволяющее выразить K_3 через K_1 и K_2 . Аналогичные, но более громоздкие выкладки приводят к соотношению

$$\begin{aligned} \langle \hat{H}\hat{K}_1^2 \rangle_\sigma &= \langle \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \rangle_\sigma = \\ &= \frac{1}{48}(8K_4 + 4K_1 K_3 + 2K_2^2 + K_1^2 K_2) - \\ &\quad - \frac{1}{384}(48K_4 + 32K_1 K_3 + 12K_2^2 + 12K_1^2 K_2 + K_1^4) = \\ &= \frac{1}{32}K_1^2 K_2 + \frac{1}{128}K_2^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Комбинируя соотношения (48)–(51), получаем $\langle \hat{H}(\hat{P}_\partial \mathcal{K}_2) \rangle_\sigma = 0$. Это означает, что третье слагаемое из (49) вклад в (46) не дает. Аналогичным образом из (48)–(52) находим $\langle \hat{H}(\hat{P}_\partial \mathcal{K}_2)^2 \rangle_\sigma = K_2^2/8$. Подставляя эти результаты вместе с (50) и (49) в (46), имеем окончательно

$$\langle \hat{H}(\hat{P}_\partial^2 \mathcal{F}_q) \rangle_\sigma = \frac{1}{8}[q(q+1)\mathcal{F}_q + 2(n-q)(2n-2q-1)\mathcal{F}_{q+1}]. \quad (53)$$

Из (34), (46) и (53) следует, что функция $\Gamma_q^{(2n)}(x; \phi)$ в однопетлевом приближении ренормированной теории возмущений (т.е. в первом порядке по g) с точностью до УФ-конечных вкладов имеет вид

$$\Gamma_q^{(2n)} = \mathcal{F}_q + \frac{g}{32\pi\varepsilon}(\mu L)^\varepsilon \left[\frac{1}{2}q(q+1)\mathcal{F}_q + (n-q)(2n-2q-1)\mathcal{F}_{q+1} \right], \quad (54)$$

где учтена связь $D_0 = g_0\nu_0 = g\nu\mu^\varepsilon$.

Константы ренормировки Z_{qk} в (31) находятся из условия конечности функции (34) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ для ренормированных операторов $\mathcal{F}_k^R$. В MS-схеме с учетом (54) это дает

$$\mathcal{F}_q = \mathcal{F}_q^R + \frac{g}{32\pi\varepsilon} \left[\frac{1}{2}q(q+1)\mathcal{F}_q^R + (n-q)(2n-2q-1)\mathcal{F}_{q+1}^R \right] + O(g^2). \quad (55)$$

Обозначив выражение в квадратных скобках в (55) через $Z_{qk}^{(1)}\mathcal{F}_k^R$, для матрицы констант ренормировки Z_{qk} получаем

$$Z_{qk} = \delta_{qk} + \frac{g}{32\pi\varepsilon}Z_{qk}^{(1)} + O(g^2). \quad (56)$$

Для сравнения приведем соответствующее (55) выражение для случая, когда в качестве базисных операторов вместо $\mathcal{F}_q$ выбраны операторы F_q из (29) – простые степени мономов K_1 и K_2 :

$$\begin{aligned} F_q = F_q^R + \frac{g}{32\pi\varepsilon} & \left[2(n-q)(2n-2q-1)F_{q+1}^R - \frac{1}{2}(4n^2 - 16nq + 11q^2 - 2n - q)F_q^R - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}q(4n-5q+3)F_{q-1}^R - \frac{3}{8}q(q-1)F_{q-2}^R \right] + O(g^2). \end{aligned} \quad (57)$$

Для матрицы аномальных размерностей (32) в неподвижной точке (22) получаем

$$\gamma_{qk}^* = -\frac{g^*}{32\pi}Z_{qk}^{(1)} + O(\varepsilon^2) = -Z_{qk}^{(1)}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Согласно (24) критическая размерность второй производной поля равна $\Delta_{\partial\partial\phi} = \Delta_\phi + 2 = \varepsilon/2$. Отсюда для матрицы критических размерностей Δ_{qk} семейства операторов (30) находим

$$\Delta_{qk}^{(n)} = n\varepsilon\delta_{qk} + \gamma_{qk}^*. \quad (58)$$

Искомые критические размерности являются собственными числами $\Delta_q^{(n)}$ матрицы (58). Вследствие треугольности этой матрицы они просто равны ее диагональным элементам:

$$\Delta_q^{(n)} = \varepsilon \left[n - \frac{q(q+1)}{2} \right] + O(\varepsilon^2), \quad 0 \leq q \leq n. \quad (59)$$

Аналогичным образом из (57) можно получить матрицу критических размерностей для семейства операторов F_q . Ее собственные числа должны совпасть с (59), однако их поиск на основе четырехдиагональной матрицы, полученной из (57), был бы весьма

непростой задачей. Таким образом, выбор базисных операторов на основе степеней оператора диссипации $\mathcal{K}_2$ оказался весьма эффективным, что и позволило найти искомый спектр критических размерностей.

Критические размерности (59) достигают наименьшего значения $\Delta_n^{(n)} = -\varepsilon n(n-1)/2$ при $q = n$. Соответствующий этой размерности оператор $\mathcal{F}_n = \mathcal{K}_2^n$ представляет собой степень оператора диссипации, из (55) видно, что в однопетлевом приближении он ренормируется мультипликативно. Критическая размерность первой степени оператора диссипации ($n = 1$) равна нулю. Как показано в работе [21], этот результат является точным (не меняется с учетом старших приближений). Размерности более высоких степеней оператора диссипации отрицательны и уменьшаются с ростом n . Таким образом, в модели (4)–(7) имеется бесконечный набор “опасных” составных операторов с неограниченным снизу спектром критических размерностей. Это могло бы сильно затруднить использование разложения (26) для нахождения искомой асимптотики. Однако, как показано в [21], вклад в операторное разложение n -й структурной функции модели (4)–(7) дают только операторы с числом полей $k \leq n$.

Таким образом, поведение структурных функций (1) в инерционном интервале $l \ll r \ll L$ описывается выражением

$$S_{2n}(r) = D_0^{-n} r^{n(2-\varepsilon)} \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{0 \leq q \leq k} A_q^{(k)} \left(\frac{r}{L} \right)^{\Delta_q^{(k)}} + \dots, \quad (60)$$

где многоточием обозначены поправки порядка $(r/L)^{2+O(\varepsilon)}$ и выше, соответствующие операторам, содержащим производных больше, чем полей. Главный вклад определяется слагаемым с $k = q = n$ и имеет вид

$$S_{2n}(r) \sim r^{n(2-\varepsilon)} \left(\frac{r}{L} \right)^{-\gamma_n}, \quad \gamma_n = \frac{\varepsilon n(n-1)}{2} + O(\varepsilon^2). \quad (61)$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Соотношение (61) является основным результатом работы. Оно показывает, что для структурных функций $S_{2n}(r)$ с $n \geq 2$ в рассмотренной модели переноса пассивного векторного поля наблюдается аномальный скейлинг, соответствующие аномальные показатели вычислены в первом порядке ε -разложения в пространстве размерности $d = 2$. Двумерная турбулентность, описываемая уравнением Навье–Стокса, обладает существенными отличиями от общего d -мерного случая, связанными с наличием в двумерных течениях дополнительного, помимо энергии, квадратичного по скорости интеграла движения – энстрофии. В использованном нами варианте векторного обобщения модели Крейчнана энергия также сохраняется (при нулевой вязкости), что проявляется, в частности, в отсутствии аномального скейлинга для парной структурной функции. Однако энстрофия в этой модели не сохраняется. Это позволяет полагать, что размерность $d = 2$ в данном случае не является исключительной, и рассматривать полученные значения аномальных показателей γ_n как предельный случай показателей $\gamma_n(d)$ общей d -мерной модели. Сравним в этом контексте аномальные размерности векторной и скалярной моделей Крейчнана, используя также результаты работы [21]. В двумерном

случае главные показатели аномального скейлинга в этих моделях оказываются в однопетлевом приближении совпадающими, отличаются лишь поправочные индексы. При $d = 3$ аномальный индекс структурной функции $S_4(r)$ векторной модели имеет меньшее значение, чем в случае скалярной модели [21]. Для рассчитанных в предельном случае $d \rightarrow \infty$ аномальных показателей структурных функций $S_4(r), \dots, S_{12}(r)$ это отличие еще более возрастает [21]. Учитывая также, что в двумерной векторной модели, как и в скалярной, главный вклад в операторное разложение дается оператором диссипации энергии (для размерностей $d > 2$ это не так), можно заключить, что аномальный скейлинг в этих моделях имеет максимально сходные черты в двумерном случае, а с ростом размерности пространства различие моделей проявляется все более существенно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем, что из операторов (29) можно образовать только два оператора (с точностью до множителя), представимых в виде полной производной: $K_1 = \partial_i \varepsilon_{ji} \varphi_j$ и $K_2 - K_1^2 = \partial_i \varphi_j \cdot \partial_j \varphi_i = \partial_i \partial_j \varphi_i \varphi_j$. Именно эти операторы, выраженные через скалярное поле $\phi(\mathbf{x})$, удобно выбрать в качестве базисных:

$$K_1 = \Delta \phi, \quad \tilde{K}_2 \equiv \frac{K_2 - K_1^2}{2} = \frac{(\partial_i \partial_j \phi)^2 - (\Delta \phi)^2}{2}.$$

С их помощью любой оператор n -го порядка может быть представлен в виде линейной комбинации $F = \sum_q B_q K_1^{n-2q} \tilde{K}_2^q$, где $0 \leq q \leq n/2$. Если $F(\mathbf{x})$ — полная производная, то $\int F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. Приведем контрпример, показывающий, что для $n \geq 3$ существует такая функция $\tilde{\phi}(\mathbf{x})$, для которой $\int F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \neq 0$ при любых B_q .

Рассмотрим однопараметрическую функцию $\tilde{\phi}(\mathbf{x}) = e^{-(\alpha x_1^2 + x_2^2)/2}$ с произвольным $\alpha > 0$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. На этой функции операторы $K_1, \tilde{K}_2$ принимают значения

$$K_1|_{\phi=\tilde{\phi}} = (\alpha(\alpha x_1^2 - 1) + x_2^2 - 1)\tilde{\phi}(\mathbf{x}), \quad \tilde{K}_2|_{\phi=\tilde{\phi}} = \alpha(\alpha x_1^2 + x_2^2 - 1)\tilde{\phi}(\mathbf{x}).$$

Интегрируя $F(\mathbf{x})|_{\phi=\tilde{\phi}}$ и переходя к переменным $x_1 = y/\sqrt{\alpha}$, $x_2 = z$, получаем

$$\begin{aligned} \int F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{0 \leq q \leq n/2} B_q \alpha^q \times \\ &\times \int (\alpha(y^2 - 1) + z^2 - 1)^{n-2q} (y^2 + z^2 - 1)^q e^{-n(y^2+z^2)/2} dy dz. \end{aligned} \quad (62)$$

Если оператор F представим в виде полной производной, то правая часть (62) должна равняться нулю при любых α . Приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях α , получим систему линейных однородных уравнений с неизвестными B_q . Эта система имеет ненулевые решения, только если ее определитель равен нулю. Группируя степени α под знаком суммы в (62), находим, что коэффициент при α^k — линейная комбинация B_q с $0 \leq q \leq k$ вследствие наличия множителя α^q под знаком суммы. Таким

образом, матрица системы имеет треугольный вид и ее определитель равен нулю, только если равен нулю какой-либо из диагональных элементов. Для последних нетрудно получить выражение

$$I(n, k) = \int (z^2 - 1)^{n-2k} (y^2 + z^2 - 1)^k e^{-n(y^2+z^2)/2} dy dz, \quad (63)$$

или в координатах $y = \sqrt{t} \cos \varphi$, $z = \sqrt{t} \sin \varphi$

$$I(n, k) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dt (1 - t \sin^2 \varphi)^{n-2k} (1 - t)^k e^{-nt/2}. \quad (64)$$

Если при некотором n интеграл (64) отличен от нуля для любых $0 \leq k \leq n/2$, то ни один из операторов n -го порядка не представим в виде полной производной.

Запишем интеграл (64) в виде суммы $I = I_1 + I_2$ интегралов по областям $0 \leq t \leq 1$ и $1 < t < \infty$, соответственно. Покажем, что начиная с некоторого n выполняется неравенство $|I_1| > |I_2|$ и, следовательно, $|I| > 0$. Оценим для этого $|I_1|$ снизу, а $|I_2|$ сверху. Используя для оценки $|I_1|$ неравенства $1 - t \sin^2 \varphi \geq 1 - t$ и $(1 - t)^{n-k} \geq (1 - t)^n$, справедливые при $0 \leq t \leq 1$ и $0 \leq k \leq n/2$, находим

$$|I_1(n, k)| \geq \pi \int_0^1 dt (1 - t)^n e^{-nt/2} = \frac{\pi}{n} \int_0^n d\xi \left(1 - \frac{\xi}{n}\right)^n e^{-\xi/2}. \quad (65)$$

Воспользовавшись теперь неравенством $(1 - \xi/n)^n \leq (1 - \xi/(n+1))^{n+1}$, справедливым при $0 \leq \xi \leq n$ и $n \geq 1$, получаем окончательно

$$|I_1(n, k)| \geq \frac{\pi}{n} \int_0^3 d\xi \left(1 - \frac{\xi}{3}\right)^3 e^{-\xi/2} = \frac{2\pi}{9n} (16e^{-3/2} - 1), \quad n \geq 3. \quad (66)$$

Переходя к оценке $|I_2|$ сверху, запишем

$$|I_2(n, k)| \leq \frac{1}{2} \left(\int_1^2 dt + \int_2^\infty dt \right) \int_0^{2\pi} d\varphi |t \sin^2 \varphi - 1|^{n-2k} (t - 1)^k e^{-nt/2}. \quad (67)$$

Множитель перед экспонентой в первом интеграле (67) оценим единицей, а во втором интеграле используем неравенства $|t \sin^2 \varphi - 1| \leq t - 1$, $(t - 1)^{n-k} \leq (t - 1)^n$, справедливые при $t > 2$, $0 \leq k \leq n/2$. Это приводит к оценке

$$\begin{aligned} \frac{|I_2(n, k)|}{\pi} &\leq \int_1^2 dt e^{-nt/2} + \int_2^\infty dt (t - 1)^n e^{-nt/2} = \\ &= \frac{2}{n} (e^{-n/2} - e^{-n}) + \int_2^\infty dt (t - 1)^n e^{-nt/2}. \end{aligned} \quad (68)$$

В оставшемся интеграле сделаем замену $t \rightarrow \xi + 1$ и воспользуемся неравенством

$$\xi^n e^{-n\xi/2} \leq \xi^3 e^{-3\xi/2},$$

справедливым при $\xi \geq 1$ и $n \geq 3$. После этого интеграл берется, что дает окончательно

$$|I_2(n, k)| \leq \frac{2\pi}{n} (e^{-n/2} - e^{-n}) + \frac{134\pi}{27} e^{-(n+3)/2}, \quad n \geq 3. \quad (69)$$

Сравнивая выражения (66) и (69), находим, что при $n \geq 6$ выполняется неравенство $|I_1(n, k)| > |I_2(n, k)|$ и, следовательно, величины $I(n, k) = I_1(n, k) + I_2(n, k)$ из (63) отличны от нуля. Прямая проверка позволяет убедиться, что все они отличны от нуля и при $3 \leq n \leq 5$.

Благодарности. Автор благодарит Л. Ц. Аджемяна за постановку задачи, ценные советы и помощь в подготовке статьи, а также Н. В. Антонова и А. В. Рунова за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза (грант № Е00-3-24) и Совета Северных стран (грант № FIN-18/2001).

Список литературы

- [1] *F. Anselmet, Y. Gagne, E.J. Hopfinger, R. A. Antonia.* J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 63.
- [2] *A. С. Монин, А. М. Яглом.* Статистическая гидродинамика. Т. 2. С.-Пб.: Гидрометеоиздат, 1996.
- [3] *M. S. Borgas.* Phys. Fluids. A. 1992. V. 4. № 9. P. 2055.
- [4] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasil'ev.* Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 1823.
- [5] *Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 2. С. 309.
- [6] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. N. Vasiliev.* The Field Theoretic Renormalization Group in Fully Developed Turbulence. London: Gordon and Breach, 1998.
- [7] *Л. Ц. Аджемян, Н. В. Антонов, А. Н. Васильев.* УФН. 1996. Т. 166. С. 1257.
- [8] *Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, Ю. М. Письмаж.* ТМФ. 1983. Т. 57. № 2. С. 268.
- [9] *Л. Ц. Аджемян, А. Н. Васильев, М. Гнатич.* ТМФ. 1988. Т. 74. № 2. С. 180.
- [10] *Н. В. Антонов, С. В. Борисенко, В. И. Гурина.* ТМФ. 1996. Т. 106. № 1. С. 92.
- [11] *А. М. Обутов.* Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1949. Т. 13. С. 58.
- [12] *R. H. Kraichnan.* Phys. Fluids. 1968. V. 11. P. 945.
- [13] *R. H. Kraichnan.* Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 1016; 1997. V. 78. P. 4922.
- [14] *K. Gawędzki, A. Kupiainen.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75. P. 3834.
- [15] *D. Bernard, K. Gawędzki, A. Kupiainen.* Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 2564.
- [16] *M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, V. Lebedev.* Phys. Rev. E. 1995. V. 52. P. 4924.
- [17] *M. Chertkov, G. Falkovich.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 2706.
- [18] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, V. A. Barinov, Yu. S. Kabrits, A. N. Vasil'ev.* Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. R025303; V. 64. P. 019901.
- [19] *N. V. Antonov.* Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 6691.
- [20] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, M. Hnatich, S. V. Novikov.* Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 016309.
- [21] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. V. Runov.* Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 046310.
- [22] *I. Arad, I. Procaccia.* Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 056302.
- [23] *K. Yoshida, Y. Kaneda.* Phys. Rev. E. 2000. V. 63. P. 016308.
- [24] *L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, A. Mazzino, P. Muratore Ginanneschi, A. V. Runov.* Europhys. Lett. 2001. V. 55. P. 801.
- [25] *А. П. Казанцев.* ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 1806.
- [26] *M. Vergassola.* Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. R3021.

Поступила в редакцию 5.VI.2002 г.,
после доработки 26.XI.2002 г.