Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. З. Пакуляк, С. М. Сергеев, Спектральные кривые и параметризация дискретных интегрируемых трехмерных моделей, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 1, 30–51

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 06:06:13

СПЕКТРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрена дискретная классическая интегрируемая модель на трехмерной кубической решетке. Решения этой модели могут быть использованы для параметризации бoльцмановских весов различных трехмерных спиновых моделей. Найдены общие решения данной модели, выражаемые через тета-функции, ассоциированные с произвольной компактной алгебраической кривой. Наложение периодических граничных условий фиксирует алгебраическую кривую. Показано, что в этом случае кривая совпадает со спектральной кривой для вспомогательной линейной задачи. В случае рациональных кривых получены солитонные решения исследуемой модели.

Ключевые слова: трехмерные интегрируемые модели, преобразования Беклунда, спектральные кривые.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена описанию периодических и солитонных решений некоторой обобщенной классической интегрируемой трехмерной дискретной модели. Мы покажем, что это описание может быть представлено практически в том же виде, что и описание конечнозонных решений иерархий непрерывных интегрируемых уравнений, хотя метод получения наших дискретных систем нестандартен и мотивирован подходом, развиваемым в работах [1] для дискретных интегрируемых спиновых моделей. Сначала мы строим дискретные уравнения из условия эквивалентности вспомогательных линейных систем, что заменяет представление нулевой кривизны для операторов Лакса в обычном подходе, а затем доказываем интегрируемость, подсчитывая количество независимых интегралов движения.

На кубической решетке можно выбрать несколько типов граничных условий: открытые условия, периодические граничные условия в некоторых выбранных направлениях и, наконец, полностью периодические граничные условия. В результате можно получить различные динамические интерпретации модели, такие как задачи Коши, преобразования Беклунда и аналог стоячей волны на дискретном трехмерном торе.

* Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: pakuliak@thsun1.jinr.ru

† Research School of Physical Sciences and Engineering, Australian National University, Canberra, Australia. E-mail: sms105@rsphysse.anu.edu.au, sergeev@thsun1.jinr.ru

Мы сводим дискретные уравнения движения нашей модели через некоторую замену переменных, выражаемую через триплет лежандровых дискретных функций, к трилинейному виду. Эти трилинейные уравнения оказываются обобщениями известного билинейного дискретного уравнения Хироты. Затем мы замечаем, что эти трилинейные уравнения могут быть формально решены с использованием тождества Фэя для тета-функций на произвольной алгебраической кривой.

Некоторые факты, подмеченные в данной работе, являются демонстрацией хорошо известного утверждения, доказанного более двух десятилетий назад в работе [2], о том, что любая дискретная интегрируемая система может быть решена алгебро-геометрическими методами. В настоящей работе мы продолжаем исследование альтернативного подхода к трехмерным дискретным интегрируемым системам [1], в котором не используется понятие оператора Лакса и который может быть применен как к квантовым (спиновым), так и к классическим интегрируемым системам, ассоциированным с некоторыми трехмерными решетками. Вместо оператора Лакса мы используем понятие линейной системы, определенной на вспомогательных плоскостях. Здесь будет рассмотрена только кубическая решетка, хотя описываемые методы могут быть применены к произвольной трехмерной решетке, образованной набором пересекающихся плоскостей.

2. КЛАССИЧЕСКАЯ ДИСКРЕТНАЯ ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА НА КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

Пусть вершины кубической решетки, образованной ортогональным базисом $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, пронумерованы вектором

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3. \quad (1)$$

Кубическая решетка образована тремя наборами параллельных плоскостей или тремя наборами параллельных линий (см. рис. 1, где в качестве иллюстрации изображена кубическая решетка размера $3 \times 2 \times 4$). Каждому ребру кубической решетки данного типа α , где индекс $\alpha = 1, 2, 3$ отвечает трем ортогональным направлениям на решетке, поставим в соответствие динамические переменные, как показано на рис. 2. А именно, пары динамических переменных $u_{\alpha, \mathbf{n}}, w_{\alpha, \mathbf{n}}$, $\alpha = 1, 2, 3$, ассоциируются с ребрами, входящими в ориентированную вершину $\mathbf{n}$, тогда как переменные $u_{\alpha, \mathbf{n} + \mathbf{e}_\alpha}, w_{\alpha, \mathbf{n} + \mathbf{e}_\alpha}$ ассоциируются с выходящими ребрами. Рис. 2 демонстрирует также две вспомогательные плоскости, пересекающие входящие и выходящие ребра (эти секущие плоскости образуют треугольники 123 и $1'2'3'$). Каждая из этих плоскостей пересекает семь из восьми октантов вокруг данной вершины с номером $\mathbf{n}$.

Подчеркнем, что здесь все наши рассуждения строго локальны. Нашей целью является получение соотношений между динамическими переменными, окружающими заданную вершину. Затем мы распространим эти соотношения на всю решетку и таким образом получим динамическую систему.

Каждый из треугольников на вспомогательных плоскостях образован тремя линиями, полученными пересечениями этих плоскостей с плоскостями, образующими вершину $\mathbf{n}$. Таким образом, вершины треугольников на вспомогательных плоскостях ассоциируются с ребрами кубической решетки и соответственно с парами динамических

Рис. 1

Рис. 2

переменных. Рассмотрим две линейные задачи, связанные с треугольниками на вспомогательных плоскостях согласно следующим правилам. Во-первых, введем линейные переменные $\Phi_a, \Phi_b, \Phi_c, \Phi_d$ вокруг каждой вершины на вспомогательной плоскости в соответствии с рис. 3. Во-вторых, линейные задачи для каждой вершины на вспомогательных плоскостях всегда будут строиться по следующему правилу:

$$0 = \Phi_a - \Phi_b \cdot u + \Phi_c \cdot w + \Phi_d \cdot \kappa u w. \quad (2)$$

Здесь $\kappa \in \mathbb{C}$ является дополнительным параметром, ассоциированным с ребром кубической решетки. Заметим, что коэффициенты линейной формы (2) фиксированы ориентациями линий, образующих вершины на вспомогательной плоскости.

Рис. 3

Параметризация линейных переменных на вспомогательных плоскостях для кубической геометрии показана на рис. 4. Очевидно, что эти линейные переменные ассоциированы с внутренностями кубов на кубической решетке. В соответствии с (2) мы можем написать систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} - \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} u_{1,\mathbf{n}} + \Phi_{\mathbf{n}} w_{1,\mathbf{n}} + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} \kappa_{1,\mathbf{n}} u_{1,\mathbf{n}} w_{1,\mathbf{n}}, \\ 0 &= \Phi_{\mathbf{n}} - \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} u_{2,\mathbf{n}} + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} w_{2,\mathbf{n}} + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} \kappa_{2,\mathbf{n}} u_{2,\mathbf{n}} w_{2,\mathbf{n}}, \\ 0 &= \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} - \Phi_{\mathbf{n}} u_{3,\mathbf{n}} + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} w_{3,\mathbf{n}} + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} \kappa_{3,\mathbf{n}} u_{3,\mathbf{n}} w_{3,\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (3)$$

для треугольника, показанного слева на рис. 4, и линейную систему

$$\begin{aligned} 0 &= \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} - \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} u_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} w_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} + \\ &\quad + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} \kappa_{1,\mathbf{n}} u_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} w_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}, \\ 0 &= \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} - \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} u_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} w_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} + \\ &\quad + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} \kappa_{2,\mathbf{n}} u_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} w_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}, \\ 0 &= \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} - \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} u_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} w_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} + \\ &\quad + \Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} \kappa_{3,\mathbf{n}} u_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} w_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} \end{aligned} \quad (4)$$

для треугольника, изображенного справа.

В предположении, что ни одна из динамических переменных не обращается тождественно в нуль на любом ребре решетки, мы можем исключить из систем (3) и (4) линейные переменные $\Phi_{\mathbf{n}}$ и $\Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}$. Потребуем, чтобы системы (3) и (4), каждая из которых содержит теперь только по два линейных соотношения на шесть оставшихся переменных $\Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}$, $\Phi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}$ и т.д., были эквивалентны. Это означает, что матричные элементы этих линейных систем, будучи рациональными функциями всех динамических переменных, окружающих данную вершину, совпадают тождественно. Более того, мы потребуем также, чтобы параметры $\kappa_{\alpha,\mathbf{n}}$ сохранялись вдоль соответствующего направления α (это уже учтено в формулах (4)), т.е.

$$\kappa_{\alpha,\mathbf{n}} = \kappa_{\alpha,\mathbf{n}+\mathbf{e}_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Рис. 4

В результате получаются рекуррентные соотношения для динамических переменных $u_{\alpha, \mathbf{n}}$, $w_{\alpha, \mathbf{n}}$, $u_{\alpha, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\alpha}}$ и $w_{\alpha, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\alpha}}$ вида

$$\begin{aligned} u_{1, \mathbf{n}+\mathbf{e}_1} &= \frac{\kappa_{2, \mathbf{n}} u_{1, \mathbf{n}} u_{2, \mathbf{n}} w_{2, \mathbf{n}}}{\kappa_{1, \mathbf{n}} u_{1, \mathbf{n}} w_{2, \mathbf{n}} + \kappa_{3, \mathbf{n}} u_{2, \mathbf{n}} w_{3, \mathbf{n}} + \kappa_{1, \mathbf{n}} \kappa_{3, \mathbf{n}} u_{1, \mathbf{n}} w_{3, \mathbf{n}}}, \\ w_{1, \mathbf{n}+\mathbf{e}_1} &= \frac{w_{1, \mathbf{n}} w_{2, \mathbf{n}} + u_{3, \mathbf{n}} w_{2, \mathbf{n}} + \kappa_{3, \mathbf{n}} u_{3, \mathbf{n}} w_{3, \mathbf{n}}}{w_{3, \mathbf{n}}}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_{2, \mathbf{n}+\mathbf{e}_2} &= \frac{u_{1, \mathbf{n}} u_{2, \mathbf{n}} u_{3, \mathbf{n}}}{u_{2, \mathbf{n}} u_{3, \mathbf{n}} + u_{2, \mathbf{n}} w_{1, \mathbf{n}} + \kappa_{1, \mathbf{n}} u_{1, \mathbf{n}} w_{1, \mathbf{n}}}, \\ w_{2, \mathbf{n}+\mathbf{e}_2} &= \frac{w_{1, \mathbf{n}} w_{2, \mathbf{n}} w_{3, \mathbf{n}}}{w_{1, \mathbf{n}} w_{2, \mathbf{n}} + u_{3, \mathbf{n}} w_{2, \mathbf{n}} + \kappa_{3, \mathbf{n}} u_{3, \mathbf{n}} w_{3, \mathbf{n}}}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u_{3, \mathbf{n}+\mathbf{e}_3} &= \frac{u_{2, \mathbf{n}} u_{3, \mathbf{n}} + u_{2, \mathbf{n}} w_{1, \mathbf{n}} + \kappa_{1, \mathbf{n}} u_{1, \mathbf{n}} w_{1, \mathbf{n}}}{u_{1, \mathbf{n}}}, \\ w_{3, \mathbf{n}+\mathbf{e}_3} &= \frac{\kappa_{2, \mathbf{n}} u_{2, \mathbf{n}} w_{2, \mathbf{n}} w_{3, \mathbf{n}}}{\kappa_{1, \mathbf{n}} u_{1, \mathbf{n}} w_{2, \mathbf{n}} + \kappa_{3, \mathbf{n}} u_{2, \mathbf{n}} w_{3, \mathbf{n}} + \kappa_{1, \mathbf{n}} \kappa_{3, \mathbf{n}} u_{1, \mathbf{n}} w_{3, \mathbf{n}}}; \end{aligned} \quad (8)$$

где согласно (5), например, $\kappa_{1, \mathbf{n}}$ не зависит от координаты n_1 в разложении (1). Аналогично $\kappa_{2, \mathbf{n}}$ не зависит от n_2 и $\kappa_{3, \mathbf{n}}$ не зависит от n_3 . Такой род зависимости не от всех координат $\mathbf{n}$ мы будем обозначать следующим образом:

$$\kappa_{1, \mathbf{n}} = \kappa_{1: n_2, n_3}, \quad \kappa_{2, \mathbf{n}} = \kappa_{2: n_1, n_3}, \quad \kappa_{3, \mathbf{n}} = \kappa_{3: n_1, n_2}. \quad (9)$$

Почему полученные рекуррентные соотношения (6)–(8) следует считать динамической системой? Пусть динамические переменные на входящих в данную вершину $\mathbf{n}$ ребрах имеют следующие ненулевые скобки Пуассона:

$$\{u_{\alpha, \mathbf{n}}, w_{\beta, \mathbf{n}}\} = u_{\alpha, \mathbf{n}} w_{\alpha, \mathbf{n}} \delta_{\alpha\beta}. \quad (10)$$

Преобразования (6)–(8) являются каноническими, т.е. из (10) следует, что

$$\{u_{\alpha, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\alpha}}, w_{\beta, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\beta}}\} = u_{\alpha, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\alpha}} w_{\beta, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\beta}} \delta_{\alpha\beta}. \quad (11)$$

Вспомогательные треугольники, показанные на рис. 2, являются фрагментами двух пространственноподобных поверхностей. Набор трехмерных вершин между этими поверхностями обеспечивает каноническое преобразование (6)–(8) набора динамических переменных с одной поверхности на другую. Мы будем называть это преобразование локальным уравнением движения в направлении, перпендикулярном выбранной пространственноподобной поверхности. Кроме локальных уравнений движения (6)–(8), полная формулировка динамической системы требует специализации граничных условий.

Тип граничных условий, как и глобальные характеристики модели, зависит от выбора пространственноподобной поверхности. Рассмотренные выше вспомогательные решетки удобны для формулировки задачи Коши на кубической решетке. В разделе 6 мы рассмотрим n_1 как дискретное время, тогда как n_2 и n_3 будут дискретными пространственными координатами. При этом выборе система (6) будет описывать временную эволюцию переменных $u_{1, \mathbf{n}}$, $w_{1, \mathbf{n}}$, а системы (7), (8) – пространственное распределение вспомогательных для этой эволюции переменных $u_{2, \mathbf{n}}$, $w_{2, \mathbf{n}}$, $u_{3, \mathbf{n}}$ и $w_{3, \mathbf{n}}$. Все динамические величины, такие как интегралы движения, спектральные кривые и т.д., должны вычисляться в этом случае для системы (6).

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА

Уравнения движения (6)–(8) обеспечивают сохранение величин

$$\begin{aligned} w_{1, \mathbf{n}} w_{2, \mathbf{n}} &= w_{1, \mathbf{n}+\mathbf{e}_1} w_{2, \mathbf{n}+\mathbf{e}_2}, & u_{2, \mathbf{n}} u_{3, \mathbf{n}} &= u_{2, \mathbf{n}+\mathbf{e}_2} u_{3, \mathbf{n}+\mathbf{e}_3}, \\ \frac{u_{1, \mathbf{n}}}{w_{3, \mathbf{n}}} &= \frac{u_{1, \mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}{w_{3, \mathbf{n}+\mathbf{e}_3}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Эти соотношения позволяют произвести следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} u_{1, \mathbf{n}} &= u_{1: n_2, n_3}^{(0)} \frac{\tau_{2, \mathbf{n}}}{\tau_{2, \mathbf{n}+\mathbf{e}_3}}, & w_{1, \mathbf{n}} &= w_{1: n_2, n_3}^{(0)} \frac{\tau_{3, \mathbf{n}+\mathbf{e}_2}}{\tau_{3, \mathbf{n}}}, \\ u_{2, \mathbf{n}} &= u_{2: n_1, n_3}^{(0)} \frac{\tau_{1, \mathbf{n}}}{\tau_{1, \mathbf{n}+\mathbf{e}_3}}, & w_{2, \mathbf{n}} &= w_{2: n_1, n_3}^{(0)} \frac{\tau_{3, \mathbf{n}}}{\tau_{3, \mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}, \\ u_{3, \mathbf{n}} &= u_{3: n_1, n_2}^{(0)} \frac{\tau_{1, \mathbf{n}+\mathbf{e}_2}}{\tau_{1, \mathbf{n}}}, & w_{3, \mathbf{n}} &= w_{3: n_1, n_2}^{(0)} \frac{\tau_{2, \mathbf{n}}}{\tau_{2, \mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (6)–(8) после подстановки (13) переписываются в трилинейной форме

$$\begin{aligned} r_{\alpha, \mathbf{n}} \tau_{\alpha, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\beta}+\mathbf{e}_{\gamma}} \tau_{\beta, \mathbf{n}} \tau_{\gamma, \mathbf{n}} &= \tau_{\alpha, \mathbf{n}} \tau_{\beta, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\gamma}} \tau_{\gamma, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\beta}} + \\ &+ s_{\beta, \mathbf{n}} \tau_{\alpha, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\beta}} \tau_{\beta, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\gamma}} \tau_{\gamma, \mathbf{n}} + s_{\gamma, \mathbf{n}}^{-1} \tau_{\alpha, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\gamma}} \tau_{\beta, \mathbf{n}} \tau_{\gamma, \mathbf{n}+\mathbf{e}_{\beta}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где (α, β, γ) является *циклической перестановкой* индексов $(1, 2, 3)$ и коэффициенты заданы формулами

$$\begin{aligned} s_{1,\mathbf{n}} &= \frac{\kappa_{3:n_1,n_2} w_{3:n_1,n_2}^{(0)}}{w_{2:n_1,n_3}^{(0)}}, & r_{1,\mathbf{n}} &= \frac{u_{1:n_2,n_3}^{(0)} u_{3:n_1,n_2}^{(0)}}{w_{1:n_2,n_3}^{(0)} u_{2:n_1,n_3}^{(0)}}, \\ s_{2,\mathbf{n}} &= \frac{u_{3:n_1,n_2}^{(0)}}{w_{1:n_2,n_3}^{(0)}}, & r_{2,\mathbf{n}} &= \frac{\kappa_{2:n_1,n_3} u_{2:n_1,n_3}^{(0)} w_{2:n_1,n_3}^{(0)}}{\kappa_{1:n_2,n_3} \kappa_{3:n_1,n_2} u_{1:n_2,n_3}^{(0)} w_{3:n_1,n_2}^{(0)}}, \\ s_{3,\mathbf{n}} &= \frac{u_{2:n_1,n_3}^{(0)}}{\kappa_{1:n_2,n_3} u_{1:n_2,n_3}^{(0)}}, & r_{3,\mathbf{n}} &= \frac{w_{1:n_2,n_3}^{(0)} w_{3:n_1,n_2}^{(0)}}{w_{2:n_1,n_3}^{(0)} u_{3:n_1,n_2}^{(0)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Замена переменных (13) имеет следующую интерпретацию. Уравнения (6)–(8) являются своего рода гамильтоновыми уравнениями движения для классической дискретной системы. Подстановка (13) является, таким образом, преобразованием Лежандра. Окончательные уравнения движения в форме (14) являются лагранжевыми уравнениями движения. Мы назовем $\tau_{\alpha,\mathbf{n}}$ лагранжевыми переменными, а коэффициенты $u_{\alpha:n_\beta,n_\gamma}^{(0)}$ и $w_{\alpha:n_\beta,n_\gamma}^{(0)}$ – преэкспонентами.

Уравнения (14) обобщают известные уравнения Хироты [3]. Эти уравнения могут быть получены из (14) в специальном пределе, когда параметры $\kappa_{\alpha:n_\beta,n_\gamma}$ обращаются в нуль определенным образом. В самом деле, пусть параметры $r_{2,\mathbf{n}}$, $s_{3,\mathbf{n}}$ и $s_{1,\mathbf{n}}^{-1}$, которые содержат κ , стремятся к бесконечности по закону

$$r_{2,\mathbf{n}} \sim \varepsilon^{-2} + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}, \quad s_{3,\mathbf{n}} \sim \varepsilon^{-2} - \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}, \quad s_{1,\mathbf{n}}^{-1} \sim \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (16)$$

Приравнявая в уравнении (14) с $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 1$ коэффициенты при ε^{-2} и ε^{-1} , мы получим соответственно

$$\tau_{3,\mathbf{n}} = \tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}, \quad \tau_{1,\mathbf{n}} = \tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}. \quad (17)$$

Заметим, что в пределе (16) $\kappa_{1,\mathbf{n}} \sim \varepsilon^2$, $\kappa_{2,\mathbf{n}} \sim \kappa_{3,\mathbf{n}} \sim \varepsilon$. Накладывая далее еще одно условие $r_{1,\mathbf{n}} = s_{2,\mathbf{n}} r_{3,\mathbf{n}}$, можно увидеть, что оставшиеся два соотношения в (14) совпадают и могут быть записаны как разностное уравнение на переменную Лежандра $\tau_{2,\mathbf{n}}$,

$$r_{1,\mathbf{n}} \tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} \tau_{2,\mathbf{n}} = \tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} \tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} + s_{2,\mathbf{n}} \tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} \tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}.$$

В однородном пределе, когда параметры $r_{1,\mathbf{n}} = r_1$ и $s_{2,\mathbf{n}} = s_2$ не зависят от номера вершины $\mathbf{n}$, последнее уравнение может быть переписано в канонической форме Хироты с помощью перенумерации дискретных переменных. Следуя этой аналогии, мы будем иногда называть переменные Лежандра $\tau_{j,\mathbf{n}}$ триплетом τ -функций.

В заключение этого раздела приведем описание дискретной калибровочной инвариантности линейных систем (3) и (4). Потребуем, чтобы эти системы были инвариантны относительно одновременного сдвига линейных переменных

$$\Phi_{\mathbf{n}} \mapsto \xi_{\mathbf{n}} \Phi_{\mathbf{n}}, \quad (18)$$

где $\xi_{\mathbf{n}} \in \mathbb{C}$. Инвариантность требует соответствующего изменения динамических переменных

$$u_{1,\mathbf{n}} \mapsto \frac{\xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}}{\xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}} u_{1,\mathbf{n}}, \quad w_{1,\mathbf{n}} \mapsto \frac{\xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}}{\xi_{\mathbf{n}}} w_{1,\mathbf{n}}$$

и т. д. Теперь потребуем, чтобы калибровочные преобразования параметров $\kappa_{\alpha,\mathbf{n}}$, $\alpha = 1, 2, 3$, в обеих линейных системах (3) и (4) совпадали, т. е.

$$\kappa_{1,\mathbf{n}} \mapsto \frac{\xi_{\mathbf{n}} \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}}{\xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_3}} \kappa_{1,\mathbf{n}} = \frac{\xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}}{\xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}} \kappa_{1,\mathbf{n}}. \quad (19)$$

Аналогичные равенства возникнут и для параметров $\kappa_{2,\mathbf{n}}$ и $\kappa_{3,\mathbf{n}}$. Любое из этих требований ведет к единственному соотношению

$$\xi_{\mathbf{n}} \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2} \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3} \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} = \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} \xi_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}. \quad (20)$$

Последнее уравнение может быть легко удовлетворено подстановкой

$$\xi_{\mathbf{n}} = \xi_{1:n_2,n_3} \xi_{2:n_1,n_3} \xi_{3:n_1,n_2}. \quad (21)$$

Это объясняет появление всех ξ -зависимых факторов в формулировке предложения 1 (см. ниже).

4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Как мы убедились, уравнения (14) обобщают уравнения Хироты. Структура уравнений (14) повторяет структуру уравнений Хироты. В этом разделе мы предложим общее решение этих классических уравнений движения, когда каждое из трилинейных уравнений в системе (14) может быть представлено как пара билинейных уравнений. Такое преобразование удобно для наложения периодических граничных условий. При этом билинейные соотношения могут быть отождествлены с известным тождеством Фэя для тета-функций, ассоциированных с алгебраической кривой конечного рода. Периодические граничные условия зафиксируют вид алгебраической кривой единственным образом. Конечно, форма кривой будет зависеть от типа граничных условий. Мы утверждаем, что для периодических граничных условий найденное решение трилинейных уравнений (14) является максимально общим. Приведем формулировку необходимых алгебро-геометрических объектов (см., например, [4], [5]).

Пусть Γ является произвольной алгебраической кривой рода g и $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g)$ — g -мерный вектор голоморфных дифференциалов, нормализованных соотношениями

$$\oint_{a_j} \omega_k = \delta_{k,j}, \quad \oint_{b_j} \omega_k = \Omega_{k,j}, \quad (22)$$

где a_j, b_j , $j = 1, \dots, g$, — набор канонических циклов на Γ .

Пусть $\mathbf{I}: \Gamma^{\otimes 2} \mapsto \text{Jac}(\Gamma)$ обозначает преобразование Якоби,

$$X, Y \in \Gamma \mapsto \mathbf{I}(X, Y) = \int_X^Y \omega \in \text{Jac}(\Gamma). \quad (23)$$

Пусть $\Theta_{\epsilon}(\mathbf{v})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^g$, $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$, $\epsilon_i \in \mathbb{C}^g$, есть тета-функция с характеристикой ϵ на якобиане кривой $\text{Jac}(\Gamma)$,

$$\Theta_{\epsilon}(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp(i\pi(\mathbf{m} + \epsilon_1, \Omega \mathbf{m} + \epsilon_1) + 2i\pi(\mathbf{m} + \epsilon_1, \mathbf{v} + \epsilon_2)), \quad (24)$$

и $E(X, Y) = -E(Y, X)$ – прим-форма, $X, Y \in \Gamma$, так что кроссотношение

$$\frac{E(X, Y)E(X', Y')}{E(X, Y')E(X', Y)} = \frac{\Theta_{\epsilon_{\text{odd}}}(\mathbf{I}(X, Y))\Theta_{\epsilon_{\text{odd}}}(\mathbf{I}(X', Y'))}{\Theta_{\epsilon_{\text{odd}}}(\mathbf{I}(X, Y'))\Theta_{\epsilon_{\text{odd}}}(\mathbf{I}(X', Y))} \quad (25)$$

является хорошо определенной квазипериодической функцией на $\Gamma^{\otimes 4}$. Число ϵ_{odd} является несингулярной нечетной тета-характеристикой такой, что $\Theta_{\epsilon_{\text{odd}}}(\mathbf{0}) = 0$. Мы будем обозначать через $\Theta(\mathbf{v})$ тета-функцию с нулевой характеристикой.

На множестве $\Gamma^{\otimes 4} \otimes \text{Jac}(\Gamma)$ определено билинейное тождество Фэя, которое может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Theta(\mathbf{v})\Theta(\mathbf{v} + \mathbf{I}(B + D, A + C)) &= \\ &= \frac{E(A, B)E(D, C)}{E(A, C)E(D, B)}\Theta(\mathbf{v} + \mathbf{I}(D, A))\Theta(\mathbf{v} + \mathbf{I}(B, C)) + \\ &+ \frac{E(A, D)E(C, B)}{E(A, C)E(D, B)}\Theta(\mathbf{v} + \mathbf{I}(B, A))\Theta(\mathbf{v} + \mathbf{I}(D, C)), \end{aligned} \quad (26)$$

где принимается, что $\mathbf{I}(B + D, A + C) = \mathbf{I}(B, A) + \mathbf{I}(D, C) = \mathbf{I}(D, A) + \mathbf{I}(B, C)$.

Пусть $\mathbf{v} \in \text{Jac}(\Gamma)$, а $X_{n_1}, X'_{n_1}, Y_{n_2}, Y'_{n_2}, Z_{n_3}, Z'_{n_3}$ ($n_{\alpha} \in \mathbb{Z}$) и P, Q будут произвольные попарно различные точки на алгебраической кривой Γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Любое решение локальных уравнений движения (14) является одним из частных случаев следующего общего решения:*

$$\begin{aligned} \tau_{1, \mathbf{n}} &= \xi_{1:n_2, n_3} \Theta(\mathbf{I}_{\mathbf{n}} + \mathbf{I}(Q, X_{n_1})), \\ \tau_{2, \mathbf{n}} &= \xi_{2:n_1, n_3} \Theta(\mathbf{I}_{\mathbf{n}} + \mathbf{I}(Q, Y_{n_2})), \\ \tau_{3, \mathbf{n}} &= \xi_{3:n_1, n_2} \Theta(\mathbf{I}_{\mathbf{n}} + \mathbf{I}(Q, Z_{n_3})), \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\mathbf{I}_{\mathbf{n}} = \mathbf{v} + \sum_{m_1=0}^{n_1-1} \mathbf{I}(X'_{m_1}, X_{m_1}) + \sum_{m_2=0}^{n_2-1} \mathbf{I}(Y'_{m_2}, Y_{m_2}) + \sum_{m_3=0}^{n_3-1} \mathbf{I}(Z'_{m_3}, Z_{m_3}), \quad (28)$$

а параметры ξ и точки $X_{n_1}, \dots, Z'_{n_3}$ параметризуют $\kappa_{\alpha, \mathbf{n}}$ и преэкспоненты следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa_{1:n_2, n_3} &= -\frac{\xi_{1:n_2, n_3} \xi_{1:n_2+1, n_3+1}}{\xi_{1:n_2+1, n_3} \xi_{1:n_2, n_3+1}} \frac{E(Y'_{n_2}, Z_{n_3})E(Y_{n_2}, Z'_{n_3})}{E(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})E(Y_{n_2}, Z_{n_3})}, \\ \kappa_{2:n_1, n_3} &= -\frac{\xi_{2:n_1+1, n_3} \xi_{2:n_1, n_3+1}}{\xi_{2:n_1, n_3} \xi_{2:n_1+1, n_3+1}} \frac{E(X_{n_1}, Z_{n_3})E(X'_{n_1}, Z'_{n_3})}{E(X'_{n_1}, Z_{n_3})E(X_{n_1}, Z'_{n_3})}, \\ \kappa_{3:n_1, n_2} &= -\frac{\xi_{3:n_1, n_2} \xi_{3:n_1+1, n_2+1}}{\xi_{3:n_1+1, n_2} \xi_{3:n_1, n_2+1}} \frac{E(X'_{n_1}, Y_{n_2})E(X_{n_1}, Y'_{n_2})}{E(X_{n_1}, Y_{n_2})E(X'_{n_1}, Y'_{n_2})} \end{aligned} \quad (29)$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{u_{3:n_1, n_2}^{(0)}}{w_{1:n_2, n_3}^{(0)}} &= -\frac{\xi_{1:n_2, n_3} \xi_{3:n_1, n_2+1}}{\xi_{1:n_2+1, n_3} \xi_{3:n_1, n_2}} \frac{E(Y'_{n_2}, Z_{n_3}) E(Y_{n_2}, X_{n_1})}{E(Y'_{n_2}, X_{n_1}) E(Y_{n_2}, Z_{n_3})}, \\
\frac{u_{2:n_1, n_3}^{(0)}}{u_{1:n_2, n_3}^{(0)}} &= \frac{\xi_{1:n_2+1, n_3+1} \xi_{2:n_1, n_3}}{\xi_{1:n_2+1, n_3} \xi_{2:n_1, n_3+1}} \frac{E(Y'_{n_2}, Z_{n_3}) E(X_{n_1}, Z'_{n_3})}{E(Y'_{n_2}, Z'_{n_3}) E(X_{n_1}, Z_{n_3})}, \\
\frac{w_{3:n_1, n_2}^{(0)}}{w_{2:n_1, n_3}^{(0)}} &= \frac{\xi_{2:n_1+1, n_3} \xi_{3:n_1, n_2+1}}{\xi_{2:n_1, n_3} \xi_{3:n_1+1, n_2+1}} \frac{E(Y'_{n_2}, X'_{n_1}) E(X_{n_1}, Z_{n_3})}{E(Y'_{n_2}, X_{n_1}) E(X'_{n_1}, Z_{n_3})}.
\end{aligned} \tag{30}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство факта, что подстановка (13) с τ -функциями, определенными формулами (27), приводит к решению уравнения (14), основано на многократном использовании тождества Фэя. Например, уравнение (14) для $\alpha = 1$, $\beta = 2$ и $\gamma = 3$ является следствием двух тождеств Фэя (26) с наборами дивизоров (A, B, C, D) и (A', B', C', D') , где $A = A' = X_{n_1}$, $B = B' = Y_{n_2}$, $D = D' = Y'_{n_2}$, $C = Z'_{n_3}$ и $C' = Z_{n_3}$. Отношения параметров $\xi_{\alpha:n_\beta, n_\gamma}$ в формулах (29), (30) появляются вследствие калибровочной эквивалентности линейных систем (3) или (4). Калибровочные параметры $\xi_{\alpha:n_\beta, n_\gamma}$, дивизоры $X_{n_1}, X'_{n_1}, \dots$, наряду с матрицей периодов Ω и точкой якобиана $\mathbf{v}$, являются свободными параметрами общего решения. Наложение периодических граничных условий (что означает, в частности, фиксацию размера системы) позволяет связать эти параметры со значениями интегралов движения. Предложение доказано.

Уравнения (30) можно решить, чтобы избежать появления отношений преэксponent. Для этого необходимо ввести несколько дополнительных параметров $A_{n_1}, B_{n_2}, C_{n_3}$. Тогда получим

$$\begin{aligned}
u_{1, \mathbf{n}} &= \frac{\xi_{1:n_2+1, n_3}}{\xi_{1:n_2+1, n_3+1}} \frac{E(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})}{E(Y'_{n_2}, Z_{n_3})} \frac{E(C_{n_3}, Z_{n_3})}{E(C_{n_3}, Z'_{n_3})} \frac{\tau_{2, \mathbf{n}}}{\tau_{2, \mathbf{n}+\mathbf{e}_3}}, \\
w_{1, \mathbf{n}} &= -\frac{\xi_{1:n_2+1, n_3}}{\xi_{1:n_2, n_3}} \frac{E(Z_{n_3}, Y_{n_2})}{E(Z_{n_3}, Y'_{n_2})} \frac{E(B_{n_2}, Y'_{n_2})}{E(B_{n_2}, Y_{n_2})} \frac{\tau_{3, \mathbf{n}+\mathbf{e}_2}}{\tau_{3, \mathbf{n}}}, \\
\kappa_{1:n_2, n_3} &= -\frac{\xi_{1:n_2, n_3} \xi_{1:n_2+1, n_3+1}}{\xi_{1:n_2+1, n_3} \xi_{1:n_2, n_3+1}} \frac{E(Y'_{n_2}, Z_{n_3}) E(Y_{n_2}, Z'_{n_3})}{E(Y'_{n_2}, Z'_{n_3}) E(Y_{n_2}, Z_{n_3})},
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
u_{2, \mathbf{n}} &= \frac{\xi_{2:n_1, n_3}}{\xi_{2:n_1, n_3+1}} \frac{E(X_{n_1}, Z'_{n_3})}{E(X_{n_1}, Z_{n_3})} \frac{E(C_{n_3}, Z_{n_3})}{E(C_{n_3}, Z'_{n_3})} \frac{\tau_{1, \mathbf{n}}}{\tau_{1, \mathbf{n}+\mathbf{e}_3}}, \\
w_{2, \mathbf{n}} &= -\frac{\xi_{2:n_1, n_3}}{\xi_{2:n_1+1, n_3}} \frac{E(Z_{n_3}, X'_{n_1})}{E(Z_{n_3}, X_{n_1})} \frac{E(A_{n_1}, X_{n_1})}{E(A_{n_1}, X'_{n_1})} \frac{\tau_{3, \mathbf{n}}}{\tau_{3, \mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}, \\
\kappa_{2:n_1, n_3} &= -\frac{\xi_{2:n_1+1, n_3} \xi_{2:n_1, n_3+1}}{\xi_{2:n_1, n_3} \xi_{2:n_1+1, n_3+1}} \frac{E(X_{n_1}, Z_{n_3}) E(X'_{n_1}, Z'_{n_3})}{E(X'_{n_1}, Z_{n_3}) E(X_{n_1}, Z'_{n_3})},
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
u_{3,\mathbf{n}} &= \frac{\xi_{3:n_1,n_2+1}}{\xi_{3:n_1,n_2}} \frac{E(X_{n_1}, Y_{n_2})}{E(X_{n_1}, Y'_{n_2})} \frac{E(B_{n_2}, Y'_{n_2})}{E(B_{n_2}, Y_{n_2})} \frac{\tau_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}}{\tau_{1,\mathbf{n}}}, \\
w_{3,\mathbf{n}} &= -\frac{\xi_{3:n_1,n_2+1}}{\xi_{3:n_1+1,n_2+1}} \frac{E(Y'_{n_2}, X'_{n_1})}{E(Y'_{n_2}, X_{n_1})} \frac{E(A_{n_1}, X_{n_1})}{E(A_{n_1}, X'_{n_1})} \frac{\tau_{2,\mathbf{n}}}{\tau_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}}, \\
\kappa_{3:n_1,n_2} &= -\frac{\xi_{3:n_1,n_2}\xi_{3:n_1+1,n_2+1}}{\xi_{3:n_1+1,n_2}\xi_{3:n_1,n_2+1}} \frac{E(X'_{n_1}, Y_{n_2})E(X_{n_1}, Y'_{n_2})}{E(X_{n_1}, Y_{n_2})E(X'_{n_1}, Y'_{n_2})},
\end{aligned} \tag{33}$$

где величины $\tau_{\alpha,\mathbf{n}}$ заданы формулами (27). Дискретная функция Бейкера–Ахизера $\Phi_{\mathbf{n}}$, удовлетворяющая всему набору уравнений (3) (или (4)) и нормализованная требованием $\Phi_{\mathbf{0}} = \xi_{\mathbf{0}}$, задается выражением

$$\Phi_{\mathbf{n}} = \Phi_{\mathbf{n}}(P) = \xi_{\mathbf{n}} \Phi_{\mathbf{n}}^{(0)}(P) \frac{\Theta(\mathbf{v} + \mathbf{I}(Q, P) + \mathbf{I}_{\mathbf{n}})}{\Theta(\mathbf{v} + \mathbf{I}(Q, P))}, \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{n}}^{(0)}(P) &= \prod_{m_1=0}^{n_1-1} \frac{E(P, X_{m_1})E(A_{m_1}, X'_{m_1})}{E(P, X'_{m_1})E(A_{m_1}, X_{m_1})} \times \\
&\times \prod_{m_2=0}^{n_2-1} \frac{E(P, Y_{m_2})E(B_{m_2}, Y'_{m_2})}{E(P, Y'_{m_2})E(B_{m_2}, Y_{m_2})} \prod_{m_3=0}^{n_3-1} \frac{E(P, Z_{m_3})E(C_{m_3}, Z'_{m_3})}{E(P, Z'_{m_3})E(C_{m_3}, Z_{m_3})}.
\end{aligned} \tag{35}$$

5. КОНЕЧНАЯ РЕШЕТКА С ОТКРЫТЫМИ ГРАНИЦАМИ

До сих пор все наши рассуждения были исключительно локальными и не принимали во внимание размеры и границы кубической решетки. Для описания глобальных характеристик, таких как интегралы движения, необходимо зафиксировать эти дополнительные данные.

Рассмотрим конечную кубическую решетку с открытыми граничными условиями и соответствующую задачу Коши. В случае кубической решетки размера $N_1 \times N_2 \times N_3$ наложим следующие ограничения на координаты n_1, n_2, n_3 трехмерного вектора $\mathbf{n}$ (1):

$$0 \leq n_{\alpha} < N_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3. \tag{36}$$

На $\Delta = N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_3 N_1$ входящих ребрах кубической решетки может быть задано 2Δ начальных данных,

$$\begin{aligned}
u_{1:n_2,n_3} &\equiv u_{1,0\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3}, & w_{1:n_2,n_3} &\equiv w_{1,0\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3}, \\
u_{2:n_1,n_3} &\equiv u_{2,n_1\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3}, & w_{2:n_1,n_3} &\equiv w_{2,n_1\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3}, \\
u_{3:n_1,n_2} &\equiv u_{3,n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+0\mathbf{e}_3}, & w_{3:n_1,n_2} &\equiv w_{3,n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+0\mathbf{e}_3}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Уравнения движения (6)–(8), будучи применены рекуррентно, определяют преобразование 2Δ начальных данных (37) в 2Δ конечных данных,

$$\begin{aligned}
u'_{1:n_2,n_3} &\equiv u_{1,N_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3}, & w'_{1:n_2,n_3} &\equiv w_{1,N_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3}, \\
u'_{2:n_1,n_3} &\equiv u_{2,n_1\mathbf{e}_1+N_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3}, & w'_{2:n_1,n_3} &\equiv w_{2,n_1\mathbf{e}_1+N_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3}, \\
u'_{3:n_1,n_2} &\equiv u_{3,n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+N_3\mathbf{e}_3}, & w'_{3:n_1,n_2} &\equiv w_{3,n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+N_3\mathbf{e}_3}.
\end{aligned} \tag{38}$$

Предположим, что начальные данные (37) находятся в общем положении. Можно ли обратить параметризацию, описанную формулами (31)–(33), чтобы восстановить алгебро-геометрические данные через набор (37) и параметры $\kappa_{\alpha:n_\beta,n_\gamma}$ (суммарное число свободных параметров равно 3Δ)?

Вообще говоря, решение этой задачи не единственно. Очевидно, что одни и те же начальные данные могут быть параметризованы различными наборами алгебро-геометрических данных, связанными с алгебраическими кривыми достаточно высокого рода. Однако существует одна выделенная компактная риманова поверхность, в определенном смысле минимальная среди всех прочих кривых, параметризующих динамику (6)–(8).

Для задачи Коши с начальными и конечными данными (37) и (38) эта кривая появляется следующим образом. Пусть начальные данные параметризованы некоторой кривой Γ . Тогда можно записать

$$u_{\alpha:n_\beta,n_\gamma} = u_{\alpha:n_\beta,n_\gamma}(\mathbf{v}), \quad w_{\alpha:n_\beta,n_\gamma} = w_{\alpha:n_\beta,n_\gamma}(\mathbf{v}).$$

В силу формул (27), (28) решение задачи Коши имеет вид

$$u'_{\alpha:n_\beta,n_\gamma} = u_{\alpha:n_\beta,n_\gamma}(\mathbf{v} + \mathbf{T}_\alpha), \quad w'_{\alpha:n_\beta,n_\gamma} = w_{\alpha:n_\beta,n_\gamma}(\mathbf{v} + \mathbf{T}_\alpha),$$

где

$$\mathbf{T}_1 = \sum_{n_1=0}^{N_1} \mathbf{I}(X'_{n_1}, X_{n_1}), \quad \mathbf{T}_2 = \sum_{n_2=0}^{N_2} \mathbf{I}(Y'_{n_2}, Y_{n_2}), \quad \mathbf{T}_3 = \sum_{n_3=0}^{N_3} \mathbf{I}(Z'_{n_3}, Z_{n_3}). \quad (39)$$

Преобразование от начальных данных к конечным является *эволюцией*, если

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_3 = \mathbf{T} \pmod{\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g}. \quad (40)$$

Ниже все соотношения такого типа будут пониматься по модулю $\mathbb{Z}^g + \Omega\mathbb{Z}^g$.

Эволюционные условия (40) означают, что в силу теоремы Абеля существуют две мероморфные функции $\lambda(P)$ и $\mu(P)$, $P \in \Gamma$, с дивизорами

$$\begin{aligned} (\lambda) &= \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_{N_1}} X_{n_1} - \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_{N_1}} X'_{n_1} - \sum_{n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}} Z_{n_3} + \sum_{n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}} Z'_{n_3}, \\ (\mu) &= \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} Y_{n_2} - \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} Y'_{n_2} - \sum_{n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}} Z_{n_3} + \sum_{n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}} Z'_{n_3}. \end{aligned} \quad (41)$$

Отсюда следует, что Γ является компактной римановой поверхностью, заданной полиномиальным уравнением $J_\Delta(\lambda, \mu) = 0$ (см., например, теорему 10-23 в [6]). Более того, соотношения (41) фиксируют структуру полинома $J_\Delta(\lambda, \mu)$ (ниже мы определим ее формулой (48)). Ключевым фактом является то, что благодаря эволюционным условиям (40) полином $J_\Delta(\lambda, \mu)$ как функционал начальных данных должен генерировать набор инвариантов эволюции. Таким образом, кривая, определяемая этим полиномом, является спектральной.

Полином J_Δ может быть получен при помощи линейной системы типа (3), написанной для всей вспомогательной плоскости. Зафиксируем положения вспомогательных плоскостей, отвечающих начальным и конечным данным. Вспомогательная плоскость для начальных данных пересекает все входящие ребра кубической решетки, тогда как плоскость для конечных данных пересекает все выходящие ребра. Эти вспомогательные плоскости играют роль пространственноподобных поверхностей, и дискретная эволюция отвечает трансляции вспомогательной плоскости в направлении, перпендикулярном к этой пространственноподобной поверхности.

Все объекты, а именно динамические и вспомогательные линейные переменные на пространственноподобной поверхности, могут быть занумерованы двумерным дискретным индексом. Мы выберем нумерацию линейных переменных в форме, подобной нумерации начальных (37) или конечных (38) данных,

$$\begin{aligned}\Phi_{0\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3} &= \Phi_{1:n_2,n_3}, \\ \Phi_{n_1\mathbf{e}_1+0\mathbf{e}_2+n_3\mathbf{e}_3} &= \Phi_{2:n_1,n_3}, \\ \Phi_{n_1\mathbf{e}_1+n_2\mathbf{e}_2+0\mathbf{e}_3} &= \Phi_{3:n_1,n_2}, \\ 0 \leq n_i &\leq N_i, \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}\tag{42}$$

Пример такой нумерации на вспомогательной плоскости в простейшем случае $N_1 = N_2 = N_3 = 2$ показан на рис. 5.

Пусть $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ – матрица линейной системы

$$\begin{aligned}0 &= \Phi_{1:n_2+1,n_3} - \Phi_{1:n_2+1,n_3+1}u_{1:n_2,n_3} + \Phi_{1:n_2,n_3}w_{1:n_2,n_3} + \\ &\quad + \Phi_{n_2,n_3+1}\kappa_{1:n_2,n_3}u_{1:n_2,n_3}w_{1:n_2,n_3}, \\ 0 &= \Phi_{2:n_1,n_3} - \Phi_{2:n_1,n_3+1}u_{2:n_1,n_3} + \Phi_{2:n_1+1,n_3}w_{2:n_1,n_3} + \\ &\quad + \Phi_{2:n_1+1,n_3+1}\kappa_{2:n_1,n_3}u_{2:n_1,n_3}w_{2:n_1,n_3}, \\ 0 &= \Phi_{3:n_1,n_2+1} - \Phi_{3:n_1,n_2}u_{3:n_1,n_2} + \Phi_{3:n_1+1,n_2+1}w_{3:n_1,n_2} + \\ &\quad + \Phi_{3:n_1+1,n_2}\kappa_{3:n_1,n_2}u_{3:n_1,n_2}w_{3:n_1,n_2},\end{aligned}\tag{43}$$

записанной в матричном виде $0 = \Phi \cdot \mathcal{L}(\lambda, \mu)$, где линейные переменные удовлетворяют условиям отождествления

$$\Phi_{1:0,n_3} = \Phi_{2:0,n_3}, \quad \Phi_{1:n_2,0} = \Phi_{3:0,n_2}, \quad \Phi_{2:n_1,0} = \Phi_{3:n_1,0}\tag{44}$$

и квазипериодичности

$$\frac{\Phi_{3:N_1,n_2}}{x} = \frac{\Phi_{1:n_2,N_3}}{z}, \quad \frac{\Phi_{3:n_1,N_2}}{y} = \frac{\Phi_{2:n_1,N_3}}{z}, \quad \frac{\Phi_{1:N_2,n_3}}{y} = \frac{\Phi_{2:N_1,n_3}}{x}\tag{45}$$

для граничных областей на вспомогательной плоскости. Параметры

$$\lambda = \frac{x}{z}, \quad \mu = \frac{y}{z}\tag{46}$$

являются комплексными числами, и мы будем называть их спектральными параметрами. Очевидно, что согласно (44) и (45) общее число независимых линейных переменных в системе (43) равно Δ и матрица $\mathcal{L}(\lambda, \mu)$ является квадратной матрицей размера $\Delta \times \Delta$.

Рис. 5

Пусть

$$J_{\Delta}(\lambda, \mu) = \det \mathcal{L}(\lambda, \mu) \left(\prod_{n_2, n_3} u_{1:n_2, n_3} \right)^{-1}, \quad (47)$$

т.е. $J_{\Delta}(\lambda, \mu)$ является нормализованным полиномом Лорана ($J_{0,0} = 1$) от спектральных параметров λ и μ ,

$$J_{\Delta} = \sum_{a, b \in \Pi} \lambda^a \mu^{-b} J_{a,b}, \quad (48)$$

$$\Pi = \{0 \leq a \leq N_2 + N_3, 0 \leq b \leq N_1 + N_3, -N_1 \leq a - b \leq N_2\}.$$

Область Π (многоугольник Ньютона для J_{Δ}) показана на рис. 6. Можно доказать (см. [1]), что коэффициенты этого полинома Лорана являются инвариантами эволюции, т.е. совпадают для начальных (37) и конечных (38) данных и могут быть использованы как источник алгебро-геометрических данных для решения этих уравнений с открытыми граничными условиями.

Требование того, что линейная система (43) имеет нетривиальное решение, эквивалентно требованию, что спектральные параметры принадлежат алгебраической кривой, т.е.

$$P = (\lambda, \mu) \in \Gamma_{\Delta} \Leftrightarrow J_{\Delta}(\lambda, \mu) = 0. \quad (49)$$

Рис. 6

Предполагая, что все начальные данные вместе с параметрами $\kappa_{\alpha:n_\beta,n_\gamma}$ находятся в общем положении, можно вычислить род кривой (49), используя многоугольник Ньютона. Для кубической решетки размера $N_1 \times N_2 \times N_3$ такой, что $N_1 \geq N_2 \geq N_3$, многоугольник Ньютона, ассоциированный с кривой (49), показан на рис. 6. Род кривой Γ_Δ равен числу точек с целочисленными координатами внутри многоугольника Ньютона,

$$g_\Delta = (N_1 N_2 + N_1 N_3 + N_2 N_3) - (N_1 + N_2 + N_3) + 1. \quad (50)$$

Заметим, что g_Δ коэффициентов $J_{a,b}$ в полиноме Лорана $J_\Delta(\lambda, \mu)$, отвечающих внутренним точкам многоугольника Ньютона с целочисленными координатами, связаны с модулями алгебраической кривой Γ_Δ и, следовательно, с матрицей периодов Ω_Δ . Коэффициенты $J_{a,b}$, отвечающие периметру многоугольника, связаны с дивизорами мероморфных на Γ_Δ функций λ, μ и, таким образом, задают набор точек $X_{n_1}, \dots, Z'_{n_3}$. Из формул (41) и (34) можно получить

$$\begin{aligned} \lambda(p) &= \prod_{n_1=0}^{N_1-1} \frac{E(P, X_{n_1})E(A_{n_1}, X'_{n_1})}{E(P, X'_{n_1})E(A_{n_1}, X_{n_1})} \prod_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{E(P, Y'_{n_2})E(B_{n_2}, Y_{n_2})}{E(P, Y_{n_2})E(B_{n_2}, Y'_{n_2})}, \\ \mu(p) &= \prod_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{E(P, Y_{n_2})E(B_{n_2}, Y'_{n_2})}{E(P, Y'_{n_2})E(B_{n_2}, Y_{n_2})} \prod_{n_3=0}^{N_3-1} \frac{E(P, Z'_{n_3})E(C_{n_3}, Z_{n_3})}{E(P, Z_{n_3})E(C_{n_3}, Z'_{n_3})}. \end{aligned} \quad (51)$$

В работе [7] был развит несколько иной подход к этой проблеме. На основании теоремы 2 из [7] решение $\Phi(\lambda, \mu)$ линейной задачи $\Phi \cdot \mathcal{L}(\lambda, \mu) = 0$, как вектор мероморфных функций на кривой Γ_Δ , задавалось формулой (34) на якобиане $\text{Jac}(\Gamma_\Delta)$. При помощи (34) параметризация (27)–(30) может быть восстановлена единственным образом.

Завершим обсуждение проблемы Коши вычислением количества степеней свободы алгебро-геометрической параметризации. Обозначим $\Delta = N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_3 N_1$ и $\Delta' = N_1 + N_2 + N_3$. Тогда $g = \Delta - \Delta' + 1$ и мы имеем g модулей кривой Γ_Δ , g комплексных чисел $\mathbf{v} \in \text{Jac}(\Gamma_\Delta)$, g независимых кроссоотношений, составленных из $\xi_{\mathbf{n}}$, $2\Delta' - 2$ независимых дивизоров $X_{n_1}, \dots, Z'_{n_3}$ и Δ' произвольных дивизоров $A_{n_1}, B_{n_2}, C_{n_3}$, но при этом учтена одна лишняя степень свободы, отвечающая произволу в выборе Q . Таким образом, всего получаем 3Δ параметров. Это рассуждение доказывает полноту алгебро-геометрической параметризации с использованием кривой Γ_Δ .

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

Кривая Γ_Δ отвечает начальным данным, находящимся в общем положении, и открытым граничным условиям. Для приложения полученных результатов к интегрируемым спиновым моделям необходимо задать периодические граничные условия $\mathbf{T} = 0$, т.е. положить

$$\sum_{n_1 \in \mathbb{Z}_{N_1}} \mathbf{I}(X'_{n_1}, X_{n_1}) = \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} \mathbf{I}(Y'_{n_2}, Y_{n_2}) = \sum_{n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}} \mathbf{I}(Z'_{n_3}, Z_{n_3}) = 0. \quad (52)$$

Эти граничные условия редуцируют спектральную кривую Γ_Δ . В силу условий (52) параметры x, y, z в (45) становятся мероморфными функциями с дивизорами

$$(x) = \sum_{n_1} X_{n_1} - \sum_{n_1} X'_{n_1}$$

и (58) (см. ниже). Так как теперь сами параметры x, y, z (а не только их отношения) являются мероморфными функциями, кривая может быть определена алгебраическим уравнением для любой пары из x, y, z , т.е.

$$J_1(y, z) = J_2(x, z) = J_3(x, y) = 0. \quad (53)$$

Полином Лорана $J_\Delta(x/z, y/z)$ не является неприводимым, и условие $J_\Delta = 0$ становится следствием алгебраических соотношений (53).

В этом разделе мы опишем редуцированную спектральную кривую и мероморфные функции, ее униформизирующие, для другого выбора вспомогательной плоскости. Интерпретация задачи в этом случае будет отличаться от рассмотренного выше примера задачи Коши для открытой кубической решетки и дискретную эволюцию можно будет рассматривать как последовательность преобразований Беклунда для квадратной вспомогательной плоскости.

Зафиксируем новое положение вспомогательной плоскости. Пусть она пересекает входящие ребра для вершин трехмерной решетки с координатами $n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3$. При этом выборе переменные u_α и w_α , $\alpha = 1, 2, 3$, играют разные роли. Переменные $u_{2,\mathbf{n}}, w_{2,\mathbf{n}}, u_{3,\mathbf{n}}, w_{3,\mathbf{n}}$ являются вспомогательными, а $u_{1,\mathbf{n}}, w_{1,\mathbf{n}}$ — динамическими. Эволюция в этом случае будет означать изменение динамических переменных относительно “времени” n_1 с периодическими граничными условиями по второму и третьему направлениям, т.е.

$$u_{1:n_2+N_2, n_3} = u_{1:n_2, n_3+N_3} = u_{1:n_2, n_3}, \quad w_{1:n_2+N_2, n_3} = w_{1:n_2, n_3+N_3} = w_{1:n_2, n_3}. \quad (54)$$

Вспомогательные для этой эволюции переменные будут также меняться от слоя к слою в соответствии с уравнениями (7), (8). В первом направлении мы оставим открытые граничные условия.

Рассмотрим слой кубической решетки, отвечающий начальному значению $n_1 = 0$. Уравнения движения (6) и периодические граничные условия (54) описывают преобразование

$$u_{1:n_2, n_3}, w_{1:n_2, n_3} \mapsto u'_{1:n_2, n_3}, w'_{1:n_2, n_3}. \quad (55)$$

В соответствии с (27)–(30) можно определить переменные

$$u_{1:n_2, n_3} = u_{1:n_2, n_3}(\mathbf{v}), \quad w_{1:n_2, n_3} = w_{1:n_2, n_3}(\mathbf{v}), \quad (56)$$

где $\mathbf{v} \in \text{Jас}(\Gamma)$ для некоторой алгебраической кривой Γ . Тогда преобразование (55) примет вид

$$u'_{1:n_2, n_3} = u_{1:n_2, n_3}(\mathbf{v} + \mathbf{I}(X'_0, X_0)), \quad w'_{1:n_2, n_3} = w_{1:n_2, n_3}(\mathbf{v} + \mathbf{I}(X'_0, X_0)). \quad (57)$$

Периодические условия (54) в параметризации (27)–(30) означают, что $\sum_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} \mathbf{I}(Y'_{n_2}, Y_{n_2}) = \sum_{n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}} \mathbf{I}(Z'_{n_3}, Z_{n_3}) = 0$ (см. (52)). Как и при получении формул (41), мы заключаем, что существуют две мероморфные функции y и z на кривой Γ такие, что

$$(y) = \sum_{n_2} Y_{n_2} - Y'_{n_2}, \quad (z) = \sum_{n_3} Z_{n_3} - Z'_{n_3}, \quad (58)$$

и компактная риманова поверхность Γ определяется полиномиальным уравнением $J_{\square}(y, z) = 0$. Более того, структура функций (y) и (z) фиксирует вид кривой Γ (см. ниже формулу (61)).

Мы будем называть преобразование (55) преобразованием Беклунда для двумерной квадратной решетки, так как оно является каноническим преобразованием, сохраняющим интегралы движения. Для определения этих интегралов движения рассмотрим линейную задачу, ассоциированную с выбранной вспомогательной плоскостью. Линейная система в этом случае состоит из $N_2 N_3$ уравнений

$$\begin{aligned} j_{n_2, n_3} &= 0, & \Phi_{-1, n_3} &= y^{-1} \Phi_{N_2-1, n_3}, \\ \Phi_{n_2, N_3} &= z \Phi_{n_2, 0}, & \Phi_{-1, N_3} &= y^{-1} z \Phi_{N_2-1, 0}, \end{aligned} \quad (59)$$

где $0 \leq n_2 < N_2$, $0 \leq n_3 < N_3$ и линейная форма j_{n_2, n_3} определена первым уравнением системы (3) с перенумерованными вспомогательными линейными переменными Φ_{n_2, n_3} ,

$$\begin{aligned} j_{n_2, n_3} &= \Phi_{n_2, n_3} - \Phi_{n_2, n_3+1} u_{1:n_2, n_3} + \Phi_{n_2-1, n_3} w_{1:n_2, n_3} + \\ &+ \Phi_{n_2-1, n_3+1} \kappa_{1:n_2, n_3} u_{1:n_2, n_3} w_{1:n_2, n_3}. \end{aligned} \quad (60)$$

Уравнения в системе (59), включающие в себя спектральные параметры y и z , являются квазипериодическими граничными условиями для линейных переменных Φ_{n_2, n_3} .

Пусть $L(y, z)$ — полная матрица коэффициентов системы (59), т.е. $j = \Phi \cdot L(y, z)$. Определим полином Лорана

$$J_{\square}(y, z) = \det L(y, z) = \sum_{a=0}^{N_3} \sum_{b=0}^{N_2} J_{a,b} y^{-a} z^b, \quad J_{0,0} = 1. \quad (61)$$

Коэффициенты $J_{a,b}$ являются в этом случае инвариантами преобразования Беклунда (55) [1]. Чтобы система $\Phi(P) \cdot L(y, z) = 0$ имела ненулевое решение, спектральные параметры y и z должны принадлежать спектральной кривой, т.е.

$$P = (y, z) \in \Gamma_{\square} \Leftrightarrow J_{\square}(y, z) = 0. \quad (62)$$

Предполагая, что динамические переменные $u_{1:n_2,n_3}$, $w_{1:n_2,n_3}$ и параметры $\kappa_{1:n_2,n_3}$ находятся в общем положении, можно вычислить род спектральной кривой (62): $g_\square = (N_2 - 1)(N_3 - 1)$. Напомним, что вид полинома $J_\square$ (61) сразу же следует из условий на дивизоры (58).

Обратно, теорема 2 из работы [7] утверждает, что решение системы $\Phi(P) \cdot L(y, z) = 0$, как мероморфная векторнозначная функция на $\Gamma_\square$, находится по формуле

$$\begin{aligned} \Phi_{n_2,n_3}(P) &= \prod_{m_2=0}^{n_2-1} \frac{E(P, Y_{m_2})}{E(P, Y'_{m_2})} \frac{E(B_{m_2}, Y'_{m_2})}{E(B_{m_2}, Y_{m_2})} \prod_{m_3=0}^{n_3-1} \frac{E(P, Z_{m_3})}{E(P, Z'_{m_3})} \frac{E(C_{m_3}, Z'_{m_3})}{E(C_{m_3}, Z_{m_3})} \times \\ &\times \Theta \left(\mathbf{v} + \mathbf{I}(Q, P) + \sum_{m_2=0}^{n_2-1} \mathbf{I}(Y'_{m_2}, Y_{m_2}) + \sum_{m_3=0}^{n_3-1} \mathbf{I}(Z'_{m_3}, Z_{m_3}) \right), \end{aligned} \quad (63)$$

где тета-функция строится по матрице периодов $\Omega_\square$ алгебраической кривой $\Gamma_\square$. Используя формулу (63), можно найти соответствующие выражения для динамических переменных $u_{1:n_2,n_3}$ и $w_{1:n_2,n_3}$. Эти выражения совпадут с формулами, полученными при доказательстве предложения 1, при условии отождествления произвольной кривой Γ со спектральной кривой $\Gamma_\square$. Явные формулы для спектральных параметров, униформизирующих кривую $\Gamma_\square$, заданы выражениями

$$\begin{aligned} z(P) &= \prod_{n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}} \frac{E(P, Z_{n_3})}{E(P, Z'_{n_3})} \frac{E(C_{n_3}, Z'_{n_3})}{E(C_{n_3}, Z_{n_3})}, \\ y(P) &= \prod_{n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}} \frac{E(P, Y_{n_2})}{E(P, Y'_{n_2})} \frac{E(B_{n_2}, Y'_{n_2})}{E(B_{n_2}, Y_{n_2})}. \end{aligned} \quad (64)$$

В том случае, когда алгебраическая кривая, которая используется для построения общего решения, является рациональной, один шаг эволюции $n_1 \mapsto n_1 + 1$ может быть отождествлен с рождением солитона. В следующем разделе мы изучим это явление более подробно.

В этом разделе мы установили причины возникновения кривой $\Gamma_\square$, когда периодические граничные условия наложены во втором и третьем направлениях. Очевидно, что кривая $J_\square(y, z)$ должна быть отождествлена с кривой $J_1(y, z)$ из (53). Аналогичным образом периодические граничные условия могут быть наложены по другим парам направлений. Соответствующие кривые J_2 и J_3 также будут являться спектральными детерминантами. Если периодические граничные условия наложены по всем трем направлениям, то любое из соотношений $J_1 = 0$, $J_2 = 0$, $J_3 = 0$ должно определять одну и ту же кривую. Так как параметры задачи в этом случае перестают находиться в общем положении, род этой кривой

$$g \leq \min\{(N_1 - 1)(N_2 - 1), (N_2 - 1)(N_3 - 1), (N_3 - 1)(N_1 - 1)\}. \quad (65)$$

7. РАЦИОНАЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

В этом разделе мы рассмотрим рациональный предел алгебро-геометрических решений дискретных уравнений движения (14). Рациональный предел для тета-функций (24) на якобиане алгебраической кривой соответствует пределу (см. [8])

$$\mathbf{e}^{i\pi\Omega_{n,n}+2i\pi v_n} = -f_n \quad (66)$$

и

$$\mathbf{e}^{i\pi\Omega_{n,n}} \mapsto 0, \quad \mathbf{e}^{i\pi\Omega_{k,n}} \mapsto \frac{(q_k - q_n)(p_k - p_n)}{(q_k - p_n)(p_k - q_n)} \stackrel{\text{def}}{=} d_{k,n}. \quad (67)$$

Таким образом, параметры $d_{k,n}$ появляются из матрицы периодов, тогда как набор f_n — из точки на якобиане $\mathbf{v}$. Прим-форма в рациональном пределе становится прим-формой на сфере,

$$\frac{E(A, B)E(C, D)}{E(A, D)E(C, B)} = \frac{(A - B)(C - D)}{(A - D)(C - B)}. \quad (68)$$

Для $g = 1, 2, \dots$ и набора параметров

$$p_0, q_0, f_0; p_2, q_2, f_2; \dots; p_{g-1}, q_{g-1}, f_{g-1} = \{p_k, q_k, f_k\}_{k=0}^{g-1} \quad (69)$$

определим рациональный предел тета-функции (см. приложение в работе [8])

$$H^{(g)}(\{p_k, q_k, f_k\}_{k=0}^{g-1}) = \frac{\det |q_j^i - f_j p_j^i|_{i,j=0}^{g-1}}{\prod_{i>j} (q_i - q_j)}. \quad (70)$$

Положим $H^{(0)} \equiv 1$ по определению. Заметим, что если все параметры f_k исчезают, то $H^{(g)}(\{p_k, q_k, 0\}_{k=0}^{g-1}) = 1$. Определим функции

$$\sigma_k(z) = \frac{p_k - z}{q_k - z}. \quad (71)$$

При $g = 0$ уравнения (14) в рациональном пределе имеют решение $\tau_{\alpha, \mathbf{n}} = 1$ в силу тождества

$$r_{\alpha} = 1 + s_{\beta} + s_{\gamma}^{-1}, \quad (72)$$

где

$$r_{\alpha} = -\frac{X'_{\beta} - X'_{\gamma}}{X_{\beta} - X_{\gamma}} \frac{X_{\alpha} - X_{\beta}}{X_{\alpha} - X_{\gamma}} \frac{X_{\alpha} - X'_{\beta}}{X_{\alpha} - X'_{\gamma}}, \quad s_{\alpha} = -\frac{X_{\alpha} - X_{\gamma}}{X_{\alpha} - X_{\beta}} \frac{X'_{\alpha} - X_{\beta}}{X'_{\alpha} - X_{\gamma}} \quad (73)$$

и (α, β, γ) является четной перестановкой набора $(1, 2, 3)$. Обозначения в (72) и (73) соотносятся с коэффициентами (15) и предложением 1 следующим образом: $r_{\alpha} = r_{\alpha, \mathbf{n}}$, $s_{\alpha} = s_{\alpha, \mathbf{n}}$, $X_1 = X_{n_1}$, $X'_1 = X'_{n_1}$, $X_2 = Y_{n_2}$, $X'_2 = Y'_{n_2}$, $X_3 = Z_{n_3}$, $X'_3 = Z'_{n_3}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Солитонные решения уравнений (14) задаются формулами*

$$\begin{aligned}\tau_{1,\mathbf{n}} &= H^{(g)} \left(\left\{ \frac{I_{\mathbf{n};k}}{\sigma_k(X_{n_1})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right), \\ \tau_{2,\mathbf{n}} &= H^{(g)} \left(\left\{ \frac{I_{\mathbf{n};k}}{\sigma_k(Y_{n_2})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right), \\ \tau_{3,\mathbf{n}} &= H^{(g)} \left(\left\{ \frac{I_{\mathbf{n};k}}{\sigma_k(Z_{n_3})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right),\end{aligned}\tag{74}$$

где $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$,

$$I_{\mathbf{n};k} = f_k \left(\prod_{m_1=0}^{n_1-1} \frac{\sigma_k(X'_{m_1})}{\sigma_k(X_{m_1})} \right) \left(\prod_{m_2=0}^{n_2-1} \frac{\sigma_k(Y'_{m_2})}{\sigma_k(Y_{m_2})} \right) \left(\prod_{m_3=0}^{n_3-1} \frac{\sigma_k(Z'_{m_3})}{\sigma_k(Z_{m_3})} \right)\tag{75}$$

и параметры $r_{\alpha,\mathbf{n}}$ и $s_{\alpha,\mathbf{n}}$ определены формулами (73).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на применении рационального аналога тождества Фэя

$$\begin{aligned}(A-D)(C-B)H^{(g)} \left(\left\{ f_k \frac{\sigma_k(A)}{\sigma_k(B)} \right\}_{k=1}^g \right) H^{(g)} \left(\left\{ f_k \frac{\sigma_k(C)}{\sigma_k(D)} \right\}_{k=1}^g \right) + \\ + (A-B)(D-C)H^{(g)} \left(\left\{ f_k \frac{\sigma_k(A)}{\sigma_k(D)} \right\}_{k=1}^g \right) H^{(g)} \left(\left\{ f_k \frac{\sigma_k(C)}{\sigma_k(B)} \right\}_{k=1}^g \right) = \\ = (A-C)(D-B)H^{(g)} (\{f_k\}_{k=1}^g) H^{(g)} \left(\left\{ f_k \frac{\sigma_k(A)\sigma_k(C)}{\sigma_k(B)\sigma_k(D)} \right\}_{k=1}^g \right),\end{aligned}\tag{76}$$

описанного в работе [8].

До сих пор параметры p_k, q_k, f_k (69) считались произвольными комплексными числами и решение, сформулированное в предложении 2, отвечало решетке, бесконечной во всех направлениях. Нашей целью являются наложение периодических граничных условий (54) во втором и третьем направлениях и интерпретация эволюции в первом направлении как преобразования Беклунда, рождающего солитоны. Чтобы достигнуть этой цели, заметим, что наложение периодических граничных условий (54) означает выполнение следующих алгебраических соотношений на параметры p и q :

$$\prod_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{\sigma(Y'_{n_2})}{\sigma(Y_{n_2})} = \prod_{n_3=0}^{N_3-1} \frac{\sigma(Z'_{n_3})}{\sigma(Z_{n_3})} = 1.\tag{77}$$

Можно убедиться, что для параметров $Y_{n_2}, \dots, Z'_{n_3}$, находящихся в общем положении, система уравнений (77) имеет в точности $g = (N_2 - 1)(N_3 - 1)$ неэквивалентных решений (эквивалентность означает, что если (p, q) есть решение (77), то и (q, p) — тоже решение). Мы выберем этот набор решений в качестве последовательности (69), оставив параметры $f_k, k = 1, \dots, g$, свободными.

Используя эту свободу, переопределим амплитуды f_k следующим образом:

$$f_k = F_k \cdot \sigma_k(X_k), \quad (78)$$

где, как и ранее, параметры p_k и q_k в функциях (71) уже зафиксированы системой уравнений (77), тогда как параметры X_k по-прежнему свободны. Рассмотрим решения для функций $\tau_{2,\mathbf{n}}$ и $\tau_{3,\mathbf{n}}$, определяемые предложением 2 и переопределенные амплитудами (78) при начальном значении дискретной координаты $n_1 = 0$. Используя свободу параметров X_k , положим

$$X_k \mapsto p_k. \quad (79)$$

Ясно, что в этом пределе составляющие набора $\{I_{\mathbf{n};k}\}_{k=0}^{g-1}$ исчезают, и в соответствии с определением (70) мы получим $\tau_{2,\mathbf{n}} = \tau_{3,\mathbf{n}} = 1$. Другими словами, эти функции при $n_1 = 0$ описывают нуль-солитонные решения. Мы повторим ту же процедуру при $n_1 = 1$. А именно, рассмотрим общее решение для этих функций, сформулированное в предложении 2, и затем совершим предельную процедуру (79). Очевидно, что в наборе $\{I_{\mathbf{n};k}\}_{k=0}^{g-1}$ один элемент, отвечающий значению $k = 0$, не обратится в нуль. В результате мы получим односолитонное решение. Увеличение n_1 приведет к увеличению числа солитонов. Ясно, что максимальное число солитонов, возникающих в результате этой процедуры, будет $g = (N_2 - 1)(N_3 - 1)$. Детальное описание этого явления в простейшей ситуации дано в работе [8].

Прежде чем закончить этот раздел, дадим еще одно объяснение процедуры рождения солитонов. Рассмотрим уравнение (14) при $n_1 = 0$ для $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$ и однородных или нуль-солитонных τ -функций $\tau_{2:n_2,n_3}^{(0)} = \tau_{3:n_2,n_3}^{(0)} = 1$. Оно представляет собой разностное линейное уравнение на функцию $\tau_{1:n_2,n_3}$ относительно “пространственных” координат n_2 и n_3 . Используя простую алгебру, можно убедиться, что, кроме тривиального решения $\tau_{1:n_2,n_3} = 1$, это уравнение имеет решение вида

$$\tau_{1:n_2,n_3} = \prod_{m_2=0}^{n_2-1} \frac{\sigma_0(Y'_{m_2})}{\sigma_0(Y_{m_2})} \prod_{m_3=0}^{n_3-1} \frac{\sigma_0(Z'_{m_3})}{\sigma_0(Z_{m_3})},$$

где параметр p_0 функции σ_0 отождествлен с X_0 . Полное решение линейного разностного уравнения есть линейная комбинация

$$\tau_{1:n_2,n_3}^{(1)} = 1 - F_0 \prod_{m_2=0}^{n_2-1} \frac{\sigma_0(Y'_{m_2})}{\sigma_0(Y_{m_2})} \prod_{m_3=0}^{n_3-1} \frac{\sigma_0(Z'_{m_3})}{\sigma_0(Z_{m_3})} \quad (80)$$

с произвольным коэффициентом F_0 . Решая теперь уравнения (14) для $\alpha, \beta, \gamma = 2, 3, 1$ и $3, 1, 2$ с найденной функцией $\tau_{1:n_2,n_3}^{(1)}$, можно найти τ -функции $\tau_{2:n_2,n_3}$ и $\tau_{3:n_2,n_3}$ при значении дискретного времени $n_1 = 1$. Они будут иметь аналогичную (80) односолитонную форму. Используя эти решения в уравнении (14) с $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, мы можем найти двухсолитонное решение для функции $\tau_{1:n_2,n_3}$ и затем двухсолитонные решения для функций $\tau_{2:n_2,n_3}$ и $\tau_{3:n_2,n_3}$ при следующем значении $n_1 = 2$. Ясно, что эта процедура может быть продолжена, она показывает эквивалентность дискретного времени n_1 числу солитонов. Это простое объяснение убедительно подтверждает то, что исследованная в этой работе дискретная динамика, задаваемая уравнениями движения (6)–(8), является набором последовательных преобразований Беклунда.

8. ОБСУЖДЕНИЕ

Из работ [1] ранее было известно, что динамика параметров трехмерных спиновых моделей эквивалентна динамике (6)–(8). Классические решения, обсуждаемые в этой работе, могут быть использованы для описания различных спиновых моделей. Решения с периодическими граничными условиями могут быть применены для построения обобщенных спиновых моделей таких, что их бoльцмановские веса параметризованы тета-функциями на кривых старшего рода. Интегрируемость таких моделей базируется на модифицированном уравнении тетраэдров [9]. Среди таких моделей должны находиться также различные обобщения киральной модели Поттса.

Солитонные решения также удобны для построения полностью однородной модели Замолодчикова–Бажанова–Бакстера (ЗББ) и позволяют развить аналог квантового разделения переменных для этой модели [10]. В частности, эти решения с параметрами $f_k \neq 0$ дают возможность построить полное семейство изоспектральных деформаций трансфер-матриц в модели ЗББ (см. также [8], где аналогичная программа была реализована в случае модели релятивистской цепочки Тоды со спиновыми степенями свободы).

Благодарности. Работа была поддержана грантами INTAS OPEN 00-00055 и CRDF RM1-2334-MO-02. Работа С. П. также частично финансировалась РФФИ (грант № 01-01-00539 и грант поддержки научных школ № 00-15-96557) и программой Гейзенберга–Ландау (HLP-2002-11). Работа С. С. поддержана грантом РФФИ № 01-01-00201 и грантом JSPS для научных исследований.

Список литературы

- [1] *С. М. Сергеев.* ТМФ. 1999. Т. 118. № 3. С. 479–484; 2000. Т. 124. № 3. С. 391–409; *S. Sergeev.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 5693–5714; 2001. V. 34. P. 10493–10503; *Phys. Lett. A.* 2000. V. 265. P. 364–368.
- [2] *И. Кричвер.* УМН. 1978. Т. 33. № 4. С. 215–216.
- [3] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3785–3791.
- [4] *Д. Мамфорд.* Лекции о тета-функциях. М.: Мир, 1988.
- [5] *J. D. Fay.* Theta Functions on Riemann Surfaces. Lect. Notes in Math. V. 352. Berlin: Springer, 1973.
- [6] *Г. Шпрингер.* Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1960.
- [7] *S. Sergeev.* J. Nonlin. Math. Phys. 2000. V. 27. P. 57–72.
- [8] *S. Pakuliak, S. Sergeev.* Int. J. Math. Math. Sci. 2002. V. 31. № 9. P. 513–554.
- [9] *G. von Gehlen, S. Pakuliak, S. Sergeev.* Explicit free parametrization of the modified tetrahedron equation. Preprint MPI-2002-102. Bonn: MPI, 2002.
- [10] *S. Sergeev.* Functional equations and separation of variables for 3d spin models. Preprint MPI-2002-46. Bonn: MPI, 2002.

Поступила в редакцию 23.VIII.2002 г.