Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пупышев, Строение регулярных решений трехчастичного уравнения Шредингера вблизи точки парного удара, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 1, 90–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:27:39

СТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ТРЕХЧАСТИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ВБЛИЗИ ТОЧКИ ПАРНОГО УДАРА

Исследуется шестимерное уравнение Шредингера для системы трех частиц с центральными парными взаимодействиями более общего вида, чем кулоновские. Регулярные общее и частные физические решения такого уравнения представлены бесконечными асимптотическими рядами по целым степеням расстояния между двумя частицами и искомым функциям других трехчастичных координат. Построение таких функций в угловых базисах, образованных сферическими и бисферическими гармониками или симметризованными D -функциями Вигнера, сведено к решению простых алгебраических рекуррентных уравнений. Для проекций физических решений на угловые базисные функции выведены граничные условия в точке парного удара.

Ключевые слова: задача трех частиц, уравнение Шредингера, регулярные решения, асимптотические разложения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Приведем основные определения. Будем использовать систему единиц, в которой заряд электрона e и постоянная Планка $\hbar$ равны единице. В трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ фиксируем декартову систему координат S с осями $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ и $\hat{e}_3$ и начальной точкой O , совпадающей с центром масс исследуемой системы (p_1, p_2, p_3) трех частиц p_1 , p_2 и p_3 с массами m_1 , m_2 , m_3 и зарядами z_1 , z_2 , z_3 . Пусть в этой системе $\mathbf{a}_{ij}$ — разность радиус-векторов $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{a}_j$ частиц p_i и p_j , а $\mathbf{x}_k$ и $\mathbf{y}_k$ — приведенные векторы Якоби [1],

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &\equiv \sqrt{2\mu_{ij}} (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i), & \mu_{ij} &\equiv \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \\ \mathbf{y}_k &\equiv \sqrt{2\mu_{k,ij}} \left(\frac{m_i \mathbf{a}_i + m_j \mathbf{a}_j}{m_i + m_j} - \mathbf{a}_k \right), & \mu_{k,ij} &\equiv \frac{m_k (m_i + m_j)}{m_1 + m_2 + m_3}, \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы i, j, k образуют циклическую перестановку индексов 1, 2, 3: индекс i переходит в k , j — в i , а k — в j . В шестимерном координатном пространстве $\mathcal{R}^6$ векторам $\mathbf{x}_k$

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

и $\mathbf{y}_k$ сопоставим вектор $\mathbf{r}_k = (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$. Выберем пару (p_j, p_k) частиц p_j и p_k . Пусть R – расстояние между ними, $\mathbf{R} \equiv \mathbf{a}_{jk} \uparrow \mathbf{x}_i$, а ρ – расстояние от оставшейся частицы p_i до центра масс этой пары, $\boldsymbol{\rho} \uparrow \mathbf{y}_i$. В $\mathcal{R}^6$ под окрестностью точки парного удара частиц p_j и p_k подразумевается шестимерная область $\mathcal{G}$, в которой эти частицы близки друг к другу, но отделены от частицы p_i ,

$$\mathcal{G} \equiv \{\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_i: R \ll 1, \rho > 0\} = \{\mathbf{r}: x \equiv x_i \ll 1, y \equiv y_i > 0\}.$$

Пусть Ψ – общее регулярное ($|\Psi(\mathbf{r})| < \infty \forall \mathbf{r}$) решение уравнения Шредингера для системы (p_1, p_2, p_3) в $\mathcal{R}^6$,

$$(H - E)\Psi = 0, \quad H = H_0 + V, \quad V \equiv \sum_{k=1}^3 V_k, \quad (2)$$

где H_0 – свободный гамильтониан, E – полная энергия, V_k – взаимодействие между частицами p_i и p_j . Явный вид решения Ψ , как правило, неизвестен. Поэтому судить о его поведении в физически интересных областях пространства $\mathcal{R}^6$ можно лишь по асимптотическим разложениям.

Вывод и анализ асимптотических разложений общего регулярного решения Ψ представляется теоретически важным и интересным. Зная такие разложения, можно легко найти разложение любого регулярного частного решения, например, трехчастичной волновой функции Ψ^ε , обладающей (в отличие от Ψ) полным набором ε сохраняющихся квантовых чисел. Вывод разложения для Ψ^ε сводится к проецированию найденного разложения для Ψ на базис из собственных функций всех операторов, коммутирующих с полным гамильтонианом H .

Стоит отметить, что замена функции Ψ^ε в уравнениях Фаддеева [1]

$$(H_0 - E)\Psi_k^\varepsilon = -V_k \Psi^\varepsilon, \quad \Psi^\varepsilon = \Psi_1^\varepsilon + \Psi_2^\varepsilon + \Psi_3^\varepsilon \quad (3)$$

полученным для нее разложением открывает способ построения разложений фаддеевских компонент Ψ_k^ε , отличный от предложенного в работе [2].

В случае центральных парных взаимодействий, например, кулоновских

$$V_k(x_k(a_{ij})) = \frac{z_i z_j}{a_{ij}}, \quad V_k(x_k) = \frac{q_k}{x_k}, \quad q_k \equiv z_i z_j \sqrt{2\mu_{ij}}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

или взаимодействий более общего вида

$$V_k(x_k) = \frac{q_k}{x_k} + \bar{V}_k(x_k), \quad \bar{V}_k(x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} x_k^n \bar{V}_{kn}, \quad \bar{V}_{kn} = \text{const}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

с гамильтонианом H коммутируют квадрат оператора полного углового момента $\mathbf{l}$, его компонента l_3 и оператор P_r инверсии $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$. Набор $\varepsilon = (E, \ell, m, \sigma)$ состоит из собственных чисел этих операторов. В качестве соответствующих собственных функций

часто используются бисферические гармоники $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}$ и симметризованные линейные комбинации D -функций Вигнера $D_{mm'}^{\ell}$. Бисферические гармоники выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана $C_{a\alpha b\beta}^{\ell m}$ и сферические функции

$$Y_{fe}(\hat{a}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ie\varphi_a} \Theta_{fe}(\cos \theta_a), \quad \hat{a} \equiv (\theta_a, \varphi_a), \quad \hat{a} = \hat{x}, \hat{y}, \quad (6)$$

формулами [3], [4]

$$\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \equiv \sum_{\alpha=-a}^a C_{a\alpha b\beta}^{\ell m} Y_{a\alpha}(\hat{y}) Y_{b\beta}(\hat{x}), \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l}, \quad (-1)^{a+b} = \sigma, \quad (7)$$

а симметризованные D -функции можно представить в виде [5]

$$D_{mm'}^{\ell\sigma}(\omega^t) = \left[\frac{2\ell+1}{16\pi^2(1+\delta_{m'0})} \right]^{1/2} [D_{mm'}^{\ell}(\omega^t) + \sigma(-1)^{\ell-m'} D_{m,-m'}^{\ell}(\omega^t)], \quad (8)$$

где $\omega^t = (\alpha^t, \beta^t, \gamma^t)$ – набор углов Эйлера, определяющих ориентацию выбранной “подвижной” системы координат S^t относительно системы S . Например, в работах [6], [7] использовалась система S^t , $t = R$, с ортом $\hat{\mathbf{e}}_3^R$, коллинеарным вектору $\mathbf{R}$, соединяющему частицы p_1 и p_2 , и ортом $\hat{\mathbf{e}}_1^R$, расположенным в плоскости трех частиц и направленным к частице p_3 .

Знание асимптотических разложений волновой функции Ψ^{ε} необходимо для вычисления с высокой точностью ее приближения $\tilde{\Psi}^{\varepsilon}$ и, следовательно, для последующего достоверного определения всех наблюдаемых величин. Дело в том, что учет всех особенностей поведения искомого решения дифференциального уравнения (в нашем случае Ψ^{ε}) улучшает поточечную сходимость любого численного метода [8]. В [6], [7] было отмечено, что такой учет поведения Ψ^{ε} в области $\mathcal{G}$ особенно важен и эффективен при реализации метода Ритца [8], [9], когда координатную зависимость опорных функций F_n^{ε} вариационного анзаца $\tilde{\Psi}^{\varepsilon} \approx F_1^{\varepsilon} + F_2^{\varepsilon} + \dots$ приходится определять заранее и всюду в пространстве $\mathcal{R}^6$.

С другой стороны, такие наблюдаемые характеристики трехчастичных систем, как релятивистские поправки, γ -факторы, коэффициенты рекомбинации и сечения астрофизических ядерных процессов [10], выражаются через интегралы, содержащие волновую функцию $\tilde{\Psi}^{\varepsilon}$. Поэтому точность вычисления таких характеристик тем выше, чем лучше аппроксимация $\Psi^{\varepsilon} \approx \tilde{\Psi}$ во всей области $\mathcal{G}$.

В подходе Ритца, в вариационно-разностных и проекционно-сеточных схемах [8] и в методе сплайн-коллокаций [9], [11] задачу такого приближения можно решить, подчинив частные производные искомой функции $\tilde{\Psi}^{\varepsilon}$ или ее проекций на базисы (6)–(8) тем же линейным граничным условиям (связям при $x = 0$, $y > 0$), которым удовлетворяют частные производные точного решения Ψ^{ε} уравнения Шредингера (2) или соответствующие проекции этого решения. Примером такой связи может служить соотношение

$$\sum_{n=0}^{n' < \infty} A_n(\hat{x}, \mathbf{y}) \partial_x^n \Psi^{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad x = 0, \quad y > 0, \quad (9)$$

где A_n — известные функции или линейные комбинации известных функций и операторов частных производных по аргументам $\hat{x}$ и $\mathbf{y}$. Знание связей типа (9) позволяет решить и обратную задачу: по величине невязки

$$\chi = \sum_{n=0}^{n' < \infty} A_n(\hat{x}, \mathbf{y}) \partial_x^n \tilde{\Psi}^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad x = 0, \quad y > 0,$$

оценить, насколько приближенное решение $\tilde{\Psi}^\varepsilon$, полученное каким-то способом, близко к точному решению Ψ в окрестности точки парного удара.

Для примера выведем связи из известных асимптотик функции Ψ^ε . Под проекцией $\langle f(\xi)|g \rangle$ функции g на функцию $f(\xi)$ будем подразумевать интеграл от произведения $f^*(\xi)g$ по всей области изменения аргументов ξ .

Като [12] впервые показал, что S -волновая ($\ell = 0$) функция $\Psi^\varepsilon(a_1, a_2, a_{12})$ двух электронов p_1 и p_2 в кулоновском поле бесконечно тяжелого ($m_3 = \infty$) ядра p_3 подчиняется нелокальному граничному условию

$$\partial_a \langle \Psi^\varepsilon(a_1, a_2, a_{12}) \rangle_\delta = \lambda \Psi^\varepsilon(a_1, a_2, a_{12}), \quad a = 0, \quad (10)$$

где $\langle \Psi^\varepsilon \rangle_\delta$ — среднее по сфере бесконечно малого радиуса δ с центром в точке $a = 0$; $\lambda = m_1 z_3$ при $a = a_i$, $i = 1, 2$, и $\lambda = \mu_{12} = m_1/2$ при $a = a_{12}$.

Позже в работе [13] для той же волновой функции было получено асимптотическое разложение

$$\Psi^\varepsilon(a_1, a_2, a_{12}) = (1 + m_1 z_3 a_1) \Psi^\varepsilon(0, a_2, a_{12}) + (\mathbf{a}_1 \mathbf{A}) + O(a_1^2), \quad a_1 \rightarrow 0, \quad (11)$$

где $\mathbf{A}$ — неопределенный вектор из $\mathcal{R}^3$. Проекция $\Psi_{00}^\varepsilon \equiv \langle Y_{00}(\hat{a}_1) | \Psi^\varepsilon \rangle$ на сферическую функцию $Y_{00}(\hat{a}_1)$ не содержит $\mathbf{A}$ и удовлетворяет связи типа (9),

$$(\partial_{a_1} - m_1 z_3) \Psi_{00}^\varepsilon(a_1, a_2, a_{12}) = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 > 0.$$

Авторы работы [14] записали N -частичное уравнение Шредингера с кулоновскими взаимодействиями в асимптотическом виде

$$\left[-\frac{\Delta_R}{2\mu_{12}} + \frac{z_1 z_2}{R} + O(1) \right] \Psi = 0, \quad R = a_{12} \rightarrow 0,$$

что позволило им определить асимптотику общего решения Ψ , но лишь с точностью порядка $O(R^2)$. В случае $N = 3$ такая асимптотика имеет вид

$$\Psi = f_{00}^0 Y_{00}(\hat{R})(1 + \mu_{12} z_1 z_2 R) + R \sum_{\beta=-1}^1 f_{1\beta}^1 Y_{1\beta}(\hat{R}) + O(R^2), \quad R \rightarrow 0. \quad (12)$$

Если ее продифференцировать по R и результат спроецировать на функцию $Y_{00}(\hat{R})$, то для проекции $\Psi_{00} \equiv \langle Y_{00}(\hat{R}) | \Psi \rangle$ получится связь, не содержащая неопределенных и не зависящих от R множителей f_{00}^0 и $f_{1\beta}^1$,

$$(\partial_R - \mu_{12} z_1 z_2) \Psi_{00} = 0, \quad R = 0.$$

В работе [6] для D -компонент $\Psi_{m'}^{\varepsilon R}$ трехчастичной волновой функции

$$\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{R}, \rho) = \sum_{m'=0}^{\ell} D_{mm'}^{\ell \sigma *}(\omega^R) \Psi_{m'}^{\varepsilon R}(R, \rho, \theta), \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{R}\rho}{R\rho}, \quad \sigma = (-1)^{\ell},$$

в случае кулоновских взаимодействий (4) была доказана асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \Psi_{m'}^{\varepsilon}(R, \rho, \theta) = & f_{\ell m'}^0(\rho) Y_{\ell m'}(\theta, 0) (1 + \mu_{12} z_1 z_2 R) + \\ & + R \sum_{a=|\ell \pm 1|} f_{am'}^1(\rho) Y_{am'}(\theta, 0) + O(R^2), \quad R \rightarrow 0, \quad \rho > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Дифференцируя (13) по R и проецируя полученное равенство на функции $\Theta_{\ell m'}(\theta)$, исключаем все неизвестные функций $f_{\ell m'}^0$, $f_{am'}^1$ и приходим к связям

$$(\partial_R - \mu_{12} z_1 z_2) \Psi_{\ell m'}^{\varepsilon R}(R, \rho) = 0, \quad \Psi_{\ell m'}^{\varepsilon R}(R, \rho) \equiv \langle \Theta_{\ell m'}(\theta) | \Psi_{m'}^{\varepsilon R} \rangle, \quad R = 0, \quad \rho > 0.$$

Из формул (11)–(13) нельзя получить никаких других связей типа (9), потому что явный вид слагаемых, убывающих как $O(R^2)$, неизвестен. Для вывода граничных условий, связывающих производные решений Ψ или Ψ^{ε} более высокого порядка, необходимо знать в области $\mathcal{G}$ их полные асимптотические разложения (бесконечные ряды). Выводи анализ таких разложений в случае центральных взаимодействий более общего вида (5), чем кулоновские взаимодействия (4), составляет основное содержание данной работы.

2. РЯДЫ ПАРНЫХ И ПОЛНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Пусть некулоновские слагаемые $\bar{V}_k$ парных взаимодействий (5) являются аналитическими функциями. Будем далее полагать

$$x \equiv x_i \rightarrow 0, \quad y \equiv y_i > 0, \quad u \equiv \cos \theta = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{xy}, \quad k \neq i, \quad q \equiv q_i,$$

и использовать координатное представление $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | \equiv \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i |$.

Так как векторы Якоби (1) кинематически связаны [15],

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} +c_{ki} & s_{ki} \\ -s_{ki} & c_{ki} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{y}_i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{ki} \\ s_{ki} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos \gamma_{ki} \\ \sin \gamma_{ki} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{ki} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right],$$

где γ_{ki} – кинематический угол, зависящий только от отношений масс частиц, то x_k – функция аргументов x, y, u ,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} | x_k \rangle = x_k(x, y, u) = \frac{|s_{ki}|y}{g(v)}, \quad g(v) \equiv (1 - 2uv + v^2)^{-1/2}, \quad v \equiv -\frac{xc_{ki}}{ys_{ki}}, \quad (14)$$

а функция $1/x_k$ пропорциональна производящей функции $g(v)$ для полиномов Лежандра $P_n(u)$ [3]. Поэтому слагаемые q_k/x_k в суммах (5) представляют собой ряды

$$\frac{q_k}{x_k} = \frac{q_k}{|s_{ki}|y} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{c_{ki}x}{s_{ki}y} \right)^n P_n(u), \quad k \neq i. \quad (15)$$

Из соотношений (14) и (15) вытекает формула дифференцирования

$$\partial_x^n x_k|_{x=0} = c_{ki} \frac{s_{ki}}{|s_{ki}|} \frac{n!}{2n-1} \left(-\frac{c_{ki}}{s_{ki}y} \right)^{n-1} [P_n(u) - P_{n-2}(u)], \quad n = 0, 1, \dots,$$

откуда следует, что каждый член T_p ряда Тейлора функции $\bar{V}_k(x_k(x, y, u))$ с центром в точке $x = 0$ записывается в виде суммы по полиномам $P_s(u)$ с индексом $s \leq p$,

$$T_p(y, u) = \frac{x^p}{p!} \partial_x^p \bar{V}_k(x_k(x, y, u)) \Big|_{x=0} = \frac{x^p}{p!} \sum_{s=0}^p \bar{V}_k^{ps}(|s_{ki}|y) P_s(u).$$

Если P_x и P_u – операторы инверсии $x \rightarrow -x$ и $u \rightarrow -u$, то

$$P_u P_s(u) = (-1)^s P_s(u), \quad P_x x^p = (-1)^p x^p, \quad P_x P_u x_k = x_k, \quad (1 - P_x P_u) V_k(x_k) = 0.$$

Из этих соотношений и линейной независимости функций $x^0, x^1, \dots$ следует, что $P_x P_u T_p = T_p$ для всех p . Поэтому ряд Тейлора для $\bar{V}_k$ сводится к сумме по индексам p и s таким, что $p + s$ – четное число:

$$\bar{V}_k(x_k(x, y, u)) = \sum_{p=0}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^p \bar{V}_k^{ps}(|s_{ki}|y) P_s(u), \quad (-1)^{p+s} = 1. \quad (16)$$

Вследствие представления (5) для $\bar{V}_i$ и представлений (15), (16) полное взаимодействие $V = V_1 + V_2 + V_3$ разлагается в двойной ряд

$$\begin{aligned} V(x, y, u) &= \frac{q}{x} + V^{00}(y) + \sum_{p=1}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^p V^{ps}(y) P_s(u), \quad q \equiv q_i, \\ V^{ps}(y) &\equiv \bar{V}_{ip} \delta_{s0} + \delta_{ps} \sum_{k \neq i} \frac{q_k}{|s_{ki}|y} \left(-\frac{c_{ki}}{s_{ki}y} \right)^p + \sum_{k \neq i} \bar{V}_k^{ps}(y), \end{aligned} \quad (17)$$

где отличны от нуля только константы $V^{p0} = \bar{V}_{ip}$ с нечетным p и функции $V^{ps}(y)$ с четной суммой $p + s$. При $p \leq 2$ их можно найти по формулам

$$\begin{aligned} V^{00}(y) &= \bar{V}_{i0} + \sum_{k \neq i} [q_k (|s_{ki}|y)^{-1} + \bar{V}_k(|s_{ki}|y)], \quad V^{10}(y) = \bar{V}_{i1}, \\ V^{11}(y) &= \sum_{k \neq i} c_{ki} (s_{ki} |s_{ki}|^{-1}) [\bar{V}_k'(|s_{ki}|y) - q_k (s_{ki}y)^{-2}], \\ V^{20}(y) &= \bar{V}_{i2} + g^-(y), \quad V^{22}(y) = \sum_{k \neq i} q_k c_{ki}^2 (|s_{ki}|y)^{-3} + g^+(y), \\ g^{\pm}(y) &\equiv \frac{1}{6} \sum_{k \neq i} c_{ki}^2 [\bar{V}_k''(|s_{ki}|y) \pm 2\bar{V}_k'(|s_{ki}|y) (|s_{ki}|y)^{-1}], \end{aligned}$$

где $\bar{V}_k'$ и $\bar{V}_k''$ – первая и вторая производные функции $\bar{V}_k(x_k)$ по аргументу x_k в точке $x_k = |s_{ki}|y$, т.е. при $x = 0$.

Для проецирования ряда (17) потребуются матричные элементы полинома P_s в базисах (6) и (7). Если использовать известные формулы [3]

$$P_s(u) = \frac{4\pi}{2s+1} \sum_{\alpha=-s}^s Y_{s\alpha}^*(\hat{y}) Y_{s\alpha}(\hat{x}),$$

$$\langle Y_{c\gamma}(\hat{x}) | Y_{a\alpha}(\hat{x}) Y_{b\beta}(\hat{x}) \rangle = (-1)^a \left(\frac{2a+1}{4\pi} \right)^{1/2} C_{a0c0}^{b0} C_{a\alpha b\beta}^{c\gamma}$$

и представление (6), то нетрудно получить искомые выражения

$$\langle Y_{b\beta}(\hat{x}) | P_s(u) | Y_{b'\beta'}(\hat{x}) \rangle = (-1)^s \left(\frac{4\pi}{2s+1} \right)^{1/2} C_{s0b0}^{b'0} C_{s\alpha b\beta}^{b'\beta'} Y_{s\alpha}^*(\hat{y}), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) | P_s(u) | \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) \rangle &= (-1)^{a+b-\ell+s} C_{s0a'0}^{a0} C_{s0b'0}^{b0} \times \\ &\times [(2a'+1)(2b'+1)]^{1/2} \left\{ \begin{matrix} a & a' & s \\ b' & b & \ell \end{matrix} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\langle \Theta_{b\beta}(u) | P_s(u) | \Theta_{b'\beta'}(u) \rangle = \delta_{\beta\beta'} (-1)^s \left(\frac{2s+1}{2} \right)^{1/2} C_{s0b0}^{b'0} C_{s0b'\beta}^{b\beta}, \quad (20)$$

и убедиться в том, что их правые части равны нулю, если не выполнено условие треугольника $\mathbf{b} = \mathbf{b}' + \mathbf{s}$ или если $(b+s-b')$ – нечетное число.

3. СТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ

Докажем, что общее регулярное решение Ψ уравнения Шредингера (2) со взаимодействиями (5) является формальным рядом по целым степеням x ,

$$\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Psi^n(\hat{x}, \mathbf{y}), \quad (21)$$

а каждая компонента Ψ^n этого ряда ортогональна любой сферической гармонике $Y_{b\beta}(\hat{x})$ с $b > n$, т.е. представима, вообще говоря, в виде конечного сферического ряда с ненулевыми сферическими компонентами $\Psi_{b\beta}^n$, $b \leq n$,

$$\Psi^n(\hat{x}, \mathbf{y}) = \sum_{b=0}^n \sum_{\beta=-b}^b \Psi_{b\beta}^n(\mathbf{y}) Y_{b\beta}(\hat{x}), \quad \Psi_{b\beta}^n(\mathbf{y}) \equiv \langle Y_{b\beta}(\hat{x}) | \Psi(\hat{x}, \mathbf{y}) \rangle. \quad (22)$$

Учитывая разложение (17), для оператора H можно записать представление

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\partial_x^2 - \frac{2}{x} \partial_x + \frac{\mathbf{l}_x^2}{x^2} + \frac{q}{x} + \sum_{p=1}^{\infty} x^p \sum_{s=0}^p V^{ps}(y) P_s(u) + h(\mathbf{y}) + E, \quad (23)$$

$$h(\mathbf{y}) \equiv -\partial_y^2 - \frac{2}{y} \partial_y + \frac{\mathbf{l}_y^2}{y^2} + V^{00}(y) - E, \quad \mathbf{l}_x \equiv -i\mathbf{x} \times \nabla_x, \quad \mathbf{l}_y \equiv -i\mathbf{y} \times \nabla_y. \quad (24)$$

Уравнение Шредингера (2) после подстановки (21) сводится к рекуррентной по индексу n цепочке уравнений

$$\mathbf{l}_x^2 \Psi^0(\hat{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (25)$$

$$(\mathbf{l}_x^2 - 2) \Psi^1(\hat{x}, \mathbf{y}) = -q \Psi^0(\hat{x}, \mathbf{y}), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{l}_x^2 - (n+2)(n+3)] \Psi^{n+2}(\hat{x}, \mathbf{y}) = & -q \Psi^{n+1}(\hat{x}, \mathbf{y}) - h(\mathbf{y}) \Psi^n(\hat{x}, \mathbf{y}) - \\ & - \sum_{p=1}^n \sum_{s=0}^p V^{ps}(y) P_s(u) \Psi^{n-p}(\hat{x}, \mathbf{y}), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Поэтому доказательство существования представления (21) сводится к доказательству разрешимости такой цепочки. Согласно теории дифференциальных уравнений [16] уравнение для Ψ^{n+2} , $n \geq -2$, разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна общему решению соответствующего однородного уравнения, т.е. всем гармоникам $Y_{n+2,\beta}(\hat{x})$ с $|\beta| \leq n+2$. Докажем такую ортогональность по индукции.

Общее регулярное решение уравнения (25) является произведением гармоники $Y_{00}(\hat{x})$ и произвольной функции Ψ_{00}^0 аргумента $\mathbf{y}$,

$$\Psi^0(\hat{x}, \mathbf{y}) = \Psi_{00}^0(\mathbf{y}) Y_{00}(\hat{x}). \quad (28)$$

Поэтому правая часть уравнения (26) для неизвестной функции Ψ^1 ортогональна гармоникам $Y_{1\beta}(\hat{x})$, $\beta = 0, \pm 1$. Следовательно, решение Ψ^1 существует и равно сумме частного решения $q\Psi^0/2$ исследуемого неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения, т.е.

$$\Psi^1(\hat{x}, \mathbf{y}) = \frac{q}{2} \Psi_{00}^0(\mathbf{y}) Y_{00}(\hat{x}) + \sum_{\beta=0, \pm 1} \Psi_{1\beta}^1(\mathbf{y}) Y_{1\beta}(\hat{x}). \quad (29)$$

Итак, решения Ψ^0 и Ψ^1 — это ряды (22) с произвольными компонентами Ψ_{00}^0 и $\Psi_{1\beta}^1$. Следовательно, первый этап доказательства по индукции выполнен. Перейдем ко второму этапу. Предположим, что при некотором n все функции $\Psi^{n'}$ с $n' \leq n+1$ представляют собой известные конечные суммы (22), но искомого решения Ψ^{n+2} , вообще говоря, является бесконечным сферическим рядом. В уравнении (27) заменим все функции $\Psi^{n'}$ с $n' \leq n+2$ их рядами. С помощью (18) спроецируем получившееся уравнение на сферический базис (6). В итоге для искомым проекций $\Psi_{b\beta}^{n+2}(\mathbf{y})$ получатся алгебраические и не зацепляющиеся ни по индексу $b = 0, 1, \dots$, ни по индексу $\beta = -b, \dots, b$ уравнения

$$\begin{aligned} [b(b+1) - (n+2)(n+3)] \Psi_{b\beta}^{n+2}(\mathbf{y}) = & -q \Psi_{b\beta}^{n+1}(\mathbf{y}) - h(\mathbf{y}) \Psi_{b\beta}^n(\mathbf{y}) - \\ & - \sum_{p=1}^n \sum_{s=0}^p (-1)^s \left(\frac{4\pi}{2s+1} \right)^{1/2} V^{ps}(y) \sum_{b'=0}^{n-p} \sum_{\beta'=-b'}^{b'} C_{s0b0}^{b'0} C_{s\alpha b\beta'}^{b\beta} Y_{s\alpha}^*(\hat{y}) \Psi_{b'\beta'}^{n-p}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (30)$$

В этих уравнениях $b' \leq n-p$, а $s \leq p$, т.е. $b' + s \leq n$. Поэтому при $b > n$ все коэффициенты $C_{s0b0}^{b'0}$, а значит, и сумма по индексам b', β' обращаются в нуль. Следовательно, при $b > n+2$, когда по предположению индукции $\Psi_{b\beta}^{n+1}, \Psi_{b\beta}^n = 0$, уравнения (30) становятся однородными и имеют только тривиальные решения $\Psi_{b\beta}^{n+2} \equiv 0$, $|\beta| \leq b$. При $b = n+2$

и любом $\beta = -b, \dots, b$ эти уравнения становятся тождествами типа $0\Psi_{n+2,\beta}^{n+2} = 0$. Им подчиняются произвольные функции $\Psi_{n+2,\beta}^{n+2}(\mathbf{y})$. Так как при $b \leq n+1$ исследуемые уравнения (30) всегда имеют нетривиальные решения $\Psi_{b\beta}^{n+2}$, $|\beta| \leq b$, то Ψ^{n+2} – конечная сумма типа (22). Следовательно, вся цепочка исходных уравнений (25)–(27) разрешима, а для всех ее решений Ψ^n верны представления (22), что и требовалось доказать. Попутно было показано, что все сферические компоненты $\Psi_{b\beta}^n$, $|\beta| \leq b$, с максимально возможным при данном n значении $b = n$ являются произвольными функциями переменной $\mathbf{y}$, через которые однозначно выражаются все остальные компоненты $\Psi_{b\beta}^n$ с $b < n$. Вывод таких представлений несложен и заключается в решении уравнений (30) в порядке возрастания индекса n и убывания индекса b при данном n .

Поясним этот вывод примером. Подставим компоненты $\Psi_{b\beta}^n$, $n = 0, 1$, функций (28) и (29) в правые части уравнений (30) с $n = 0$ и найдем решения,

$$\Psi_{1\beta}^2(\mathbf{y}) = \frac{q}{4}\Psi_{1\beta}^1(\mathbf{y}), \quad \Psi_{00}^2(\mathbf{y}) = \frac{1}{12}[2h(\mathbf{y}) + q^2]\Psi_{00}^0(\mathbf{y}). \quad (31)$$

Далее, используя эти выражения, решим уравнения (30) с $n = 1$,

$$\begin{aligned} \Psi_{2\beta}^3(\mathbf{y}) &= \frac{q}{6}\Psi_{2\beta}^2(\mathbf{y}), \\ \Psi_{1\beta}^3(\mathbf{y}) &= \frac{1}{40}[4h(\mathbf{y}) + q^2]\Psi_{1\beta}^1(\mathbf{y}) + \frac{\sqrt{\pi}}{15}V^{11}(\mathbf{y})\Psi_{00}^0(\mathbf{y})Y_{1\beta}^*(\hat{y}), \\ \Psi_{00}^3(\mathbf{y}) &= \frac{1}{144}[q(8h(\mathbf{y}) + q^2) + 12V^{10}]\Psi_{00}^0(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (32)$$

Увеличивая n от $n = 2$, можно построить функции $\Psi_{b\beta}^{n+2}$ с $b = n+1, n, \dots, 0$:

$$\begin{aligned} \Psi_{n+1,\beta}^{n+2}(\mathbf{y}) &= \frac{q}{2(n+2)}\Psi_{n+1,\beta}^{n+1}(\mathbf{y}), \\ \Psi_{n\beta}^{n+2}(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2(2n+3)}\left[h(\mathbf{y}) + \frac{q^2}{2(n+1)}\right]\Psi_{n\beta}^n(\mathbf{y}) + \\ &+ \frac{\sqrt{4\pi}}{2(2n+3)}\sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{\sqrt{2p+1}}C_{n0p0}^{n-p,0}V^{pp}(\mathbf{y})\sum_{\beta'=p-n}^{n-p} C_{p\alpha,n-p,\beta'}^{n\beta}\Psi_{n-p,\beta'}^{n-p}(\mathbf{y})Y_{p\alpha}^*(\hat{y}), \dots \end{aligned}$$

Отметив, что асимптотика функции Ψ , полученная подстановкой (28) и (29) в (21), совпадает с асимптотикой (12), доказанной в работе [14], перейдем к проблеме построения связей (9) для Ψ . Каждый ряд (22) для функции Ψ^n ($n = 0, 1, \dots$) содержит $n(n+2)$ неизвестных компонент $\Psi_{b\beta}^{n'}(\mathbf{y})$, $b = n' \leq n$, $|\beta| \leq b$. Поэтому не существует конечной линейной комбинации функций Ψ^n , не содержащей ни одной неизвестной компоненты и равной нулю при всех $\hat{x}$ и $\mathbf{y}$. Так как $\partial_x^n \Psi|_{x=0} = (n!)\Psi^n$, то в исследуемом общем случае, когда среди частиц p_1, p_2, p_3 нет тождественных, такую линейную комбинацию, т.е. связь (9), нельзя построить и для частных производных функции Ψ . Докажем, что такие связи имеются, если p_j и p_k – тождественные частицы, а именно бозоны с целыми спинами или фермионы с полуцелыми спинами.

Если частицы имеют спины, то любое решение $\tilde{\Psi}$ трехчастичного уравнения Шредингера в координатно-спиновом пространстве зависит и от спиновых координат частиц. В

нашем случае в формулах взаимодействий (5) не содержатся спинные операторы. Поэтому зависимость от спинов частиц описывается спинной функцией χ , содержащейся в решении $\tilde{\Psi}$ в качестве множителя, $\tilde{\Psi} = \chi\Psi$, а пространственная часть Ψ решения $\tilde{\Psi}$ подчиняется уравнению Шредингера (2) в координатном пространстве.

Пусть P_{jk} – оператор перестановки $p_j \leftrightarrow p_k$. Тогда $P_{jk}\tilde{\Psi}^\pm = \pm\tilde{\Psi}^\pm$, причем знак плюс или минус берется, если p_j и p_k – бозоны или фермионы, соответственно. Если p_j и p_k – бозоны, то $P_{jk}\chi = \chi$ и поэтому возможен только один случай: $P_{jk}\Psi = \Psi$. Если p_j и p_k – фермионы, то возможны два случая: $P_{jk}\chi = \chi$, $P_{jk}\Psi = -\Psi$ и $P_{jk}\chi = -\chi$, $P_{jk}\Psi = \Psi$. Из этих случаев достаточно исследовать только первый, потому что второй случай, когда функция Ψ четна относительно перестановки двух фермионов, эквивалентен случаю двух тождественных бозонов.

Перестановка частиц p_j и p_k приводит к замене $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, относительно которой гамильтониан H инвариантен. Следовательно, $HP_{jk} - P_{jk}H = 0$ и уравнение Шредингера (2) имеет решения $\Psi^\pm$ с определенной перестановочной симметрией: $P_{jk}\Psi^\pm = \pm\Psi^\pm$. В этом соотношении, согласно данным выше пояснениям, выбираем знак плюс, если p_j и p_k – бозоны, и знак минус, если p_j и p_k – фермионы в состоянии с четной относительно их перестановки спинной функцией χ , что и подразумевается всюду далее.

Так как [3]

$$P_{jk}Y_{b\beta}(\theta_x, \varphi_x) = Y_{b\beta}(\pi - \theta_x, \pi + \varphi_x) = (-1)^b Y_{b\beta}(\theta_x, \varphi_x),$$

то $\Psi^\pm = P^\pm\Psi$, где Ψ – исследованное выше общее решение, а P^+ и P^- – ортогональные относительно интегрирования по углам $\hat{x} = (\theta_x, \varphi_x)$ проекторы,

$$P^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm P_{jk}) = \frac{1}{2} \sum_{b=0}^{\infty} [1 \pm (-1)^b] \sum_{\beta=-b}^b |Y_{b\beta}(\hat{x})\rangle \langle Y_{b\beta}(\hat{x})|. \quad (33)$$

Для построения разложений Ψ^+ или Ψ^- достаточно подействовать проектором P^+ или P^- на ряды (21), (22) и уравнения (25)–(27). В итоге получатся ряды с компонентами $\Psi_{b\beta}$ общего решения Ψ с четным либо нечетным b ,

$$\begin{aligned} \Psi^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Psi^{n\pm}(\hat{x}, \mathbf{y}), \\ \Psi^{n+}(\hat{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{b=0,2,\dots}^n \sum_{\beta=-b}^b \Psi_{b\beta}^n(\mathbf{y}) Y_{b\beta}(\hat{x}), \\ \Psi^{n-}(\hat{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{b=1,3,\dots}^n \sum_{\beta=-b}^b \Psi_{b\beta}^n(\mathbf{y}) Y_{b\beta}(\hat{x}), \end{aligned} \quad (34)$$

а компоненты $\Psi_{b\beta}^n$, $n \geq 2$, с четным (нечетным) b будут удовлетворять системе (30), в которой b' будет только четным (нечетным), а s – всегда четным.

Пусть p_j и p_k – тождественные бозоны. Тогда представление (34) и проекции $P^+\Psi^0$ и $P^+\Psi^1$ функций (28) и (29)

$$\Psi^+|_{x=0} = \Psi^{0+} = \Psi_{00}^0 Y_{00}(\hat{x}), \quad \partial_x \Psi^+|_{x=0} = \Psi^{1+} = \frac{q}{2} \Psi^{0+}$$

порождают связь (9) решения Ψ^+ с его первой производной $\partial_x \Psi^+$ при $x = 0$,

$$(2\partial_x - q)\Psi^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad x = 0, \quad \forall \hat{x}, \mathbf{y}: y > 0. \quad (35)$$

Проекции Ψ^{n+} , $n = 2, 3$, функций Ψ^n с компонентами (31) и (32) содержат одинаковое число неизвестных функций $\Psi_{2\beta}^2$ в виде суммы S :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \partial_x^2 \Psi^+ \Big|_{x=0} &= \Psi^{2+} = \frac{1}{12} (2h + q^2) \Psi^{0+} + S, \quad S \equiv \sum_{\beta=-2}^2 \Psi_{2\beta}^2 Y_{2\beta}(\hat{x}), \\ \frac{1}{3!} \partial_x^3 \Psi^+ \Big|_{x=0} &= \Psi^{3+} = \frac{1}{144} [q(8h + q^2) + 12V^{10}] \Psi^{0+} + \frac{q}{6} S. \end{aligned}$$

Поэтому выражение $6\Psi^{3+} - q\Psi^{2+}$ не содержит S и дает связь (9) при $x = 0$,

$$12\partial_x^2 (2\partial_x - q)\Psi^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [q(4h(\mathbf{y}) - q^2) + 12V^{10}] \Psi^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (36)$$

Если p_j и p_k – фермионы, то ряд (34) решения Ψ^- содержит функции

$$\begin{aligned} \Psi^{0-} &\equiv 0, \quad \Psi^{1-} = \sum_{\beta=0, \pm 1} \Psi_{1\beta}^1 Y_{1\beta}(\hat{x}), \quad \Psi^{2-} = \frac{q}{4} \Psi^{1-}, \\ \Psi^{3-} &= \frac{1}{40} (4h + q^2) \Psi^{1-} + S, \quad S \equiv \sum_{\beta=-3}^3 \Psi_{3\beta}^3 Y_{3\beta}(\hat{x}), \\ \Psi^{4-} &= \frac{1}{720} [q(14h + q^2) + 40V^{10}] \Psi^{1-} + \frac{q}{8} S. \end{aligned}$$

Поэтому при $x = 0$ имеются следующие связи:

$$\begin{aligned} \partial_x (2\partial_x - q)\Psi^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ 12\partial_x^3 (2\partial_x - q)\Psi^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [q(4h(\mathbf{y}) - q^2) + 32V^{10}] \partial_x \Psi^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (37)$$

Вернемся к случаю нетождественных частиц p_j и p_k и приступим к анализу строения частного решения Ψ^ε , $\varepsilon = (E, \ell, m, \sigma)$, уравнения Шредингера.

4. СТРОЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В БИСФЕРИЧЕСКОМ БАЗИСЕ

В базисе (7) оператор P^ε , проецирующий Ψ на Ψ^ε , является суммой

$$\begin{aligned} P^\varepsilon &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{1}} [1 + \sigma(-1)^{a+b}] |\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})\rangle \langle \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})| = \\ &= \sum_{b=\mu(\sigma)}^{\infty} \sum_a |\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})\rangle \langle \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})|, \quad \mu(\sigma) \equiv \frac{1}{2} [1 - (-1)^\ell \sigma]. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь и далее при заданных b, ℓ и σ индекс $a = b$, если $\ell = 0$, а при $\ell > 0$ индекс a вычисляется с помощью функций $\mu(\sigma)$ и $\chi(b) \equiv [1 - (-1)^b]/2$ по формулам

$$a = a(c; \ell, b, \sigma) = |\ell - b| + 2c + (-1)^\ell \sigma \chi(b) + \mu(\sigma),$$

где

$$c = 0, 1, \dots, c_{\max} = \frac{1}{2}[\ell + b - |\ell - b|] - (-1)^\ell \sigma \chi(b) - \mu(\sigma).$$

Образом $\Psi^\varepsilon = P^\varepsilon \Psi$ ряда (21) является степенной ряд

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Psi^{n\varepsilon}(\hat{x}, \mathbf{y}), \quad \Psi^{n\varepsilon}(\hat{x}, \mathbf{y}) \equiv P^\varepsilon \Psi^n(\hat{x}, \mathbf{y}), \quad (39)$$

в котором вследствие соотношений (22) и (38) функции $\Psi^{n\varepsilon}$ представляются конечными суммами,

$$\Psi^{n\varepsilon}(\hat{x}, \mathbf{y}) = \sum_{b=\mu(\sigma)}^n \sum_a \Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \quad \Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y) \equiv \langle \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) | \Psi^n(\hat{x}, \mathbf{y}) \rangle, \quad (40)$$

а их компоненты выражаются через проекции функций $\Psi_{b\beta}^n$ и Ψ^n ,

$$\Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y) = \sum_{\alpha=-a}^a C_{a\alpha b\beta}^{\ell m} \langle Y_{a\alpha}(\hat{y}) | \Psi_{b\beta}^n(\mathbf{y}) \rangle = \sum_{\alpha=-a}^a C_{a\alpha b\beta}^{\ell m} \langle Y_{a\alpha}(\hat{y}) Y_{b\beta}(\hat{x}) | \Psi^n(\hat{x}, \mathbf{y}) \rangle. \quad (41)$$

Этот же образ можно представить как разложение решения Ψ^ε по базису (7),

$$\begin{aligned} \Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{ab} \Psi_{ab}^\varepsilon(x, y) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \\ \Psi_{ab}^\varepsilon(x, y) &\equiv \langle \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) | \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = \sum_{n=b \geq \mu(\sigma)}^{\infty} x^n \Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y), \end{aligned} \quad (42)$$

и тем самым доказать, что бисферические компоненты Ψ_{ab}^ε такого разложения являются степенными рядами с асимптотиками $\Psi_{ab}^\varepsilon = O(x^b)$, $b = \mu(\sigma)$, при $x \rightarrow 0$.

Как было показано, функции $\Psi_{b\beta}^n$ с $b = n = 0, 1, \dots$ нельзя определить, но через них можно выразить все функции $\Psi_{b\beta}^n$ с $b \leq n$. Поэтому при $b = n$ и любом a суммы (41) являются произвольными функциями $\Psi_{an}^{n\varepsilon}$, через которые однозначно представляются все остальные функции $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}$ с $b \leq n$. Это утверждение можно доказать и другим способом, применив метод индукции к рекуррентной по индексу n цепочке алгебраических уравнений, полученной проецированием цепочки (25)–(27) с помощью формул (19) и (38),

$$\begin{aligned} [b(b+1) - (n+2)(n+3)] \Psi_{ab}^{n+2,\varepsilon}(y) &= -q \Psi_{ab}^{n+1,\varepsilon}(y) - h_a(y) \Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y) - \\ &- (-1)^{a+b-\ell} \sum_{p=1}^n \sum_{s=0}^p (-1)^s V^{ps}(y) \sum_{b'=\mu(\sigma)}^{n-p} (2b'+1)^{1/2} \sum_{a'} (2a'+1)^{1/2} \times \\ &\times C_{s0a'0}^{a0} C_{s0b'0}^{b0} \begin{Bmatrix} a & a' & s \\ b' & b & \ell \end{Bmatrix} \Psi_{a'b'}^{n-p,\varepsilon}(y), \\ n &= -2, -1, \dots, \quad b = \mu(\sigma), 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (43)$$

где h_a – диагональный матричный элемент оператора (24) в базисе (7),

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m} | h(\mathbf{y}) | \mathcal{Y}_{a'b'}^{\ell m} \rangle &= \delta_{aa'} \delta_{bb'} h_a(y), \\ h_a(y) &\equiv -\partial_y^2 - \frac{2}{y} \partial_y + \frac{a(a+1)}{y^2} + V^{00}(y) - E. \end{aligned} \quad (44)$$

Доказательство разрешимости цепочки (43) принципиально не отличается от данного выше анализа системы (27) и поэтому опускается.

Компоненты $\Psi^{n\varepsilon}$ разложения (39) физического решения Ψ^ε можно найти, если известны компоненты Ψ^n или $\Psi_{b\beta}^n$ общего решения Ψ . Например, подействовав проектором (38) на функции (28) и (29), получаем

$$\begin{aligned} \Psi^{0\varepsilon}(\hat{x}, \mathbf{y}) &= \Psi_{\ell 0}^{0\varepsilon}(y) \mathcal{Y}_{\ell 0}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \\ \Psi^{1\varepsilon}(\hat{x}, \mathbf{y}) &= \frac{q}{2} \Psi^{0\varepsilon}(\hat{x}, \mathbf{y}) + \sum_{a=|\ell \pm 1|} \Psi_{a1}^{1\varepsilon}(y) \mathcal{Y}_{a1}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \quad \sigma = (-1)^\ell, \\ \Psi^{0\varepsilon}(\hat{x}, \mathbf{y}) &= \Psi_{\ell 0}^{0\varepsilon}(y) \equiv 0, \quad \Psi^{1\varepsilon}(\hat{x}, \mathbf{y}) = \Psi_{\ell 1}^{1\varepsilon}(y) \mathcal{Y}_{\ell 1}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}), \quad \sigma = (-1)^{\ell+1}, \end{aligned} \quad (45)$$

а подставив сферические компоненты (31) и (32) в суммы (41) и затем упростив ряды (40), доказываем, что при любом σ

$$\begin{aligned} \Psi^{2\varepsilon} &= \frac{1}{12} (2h_\ell + q^2) \Psi^{0\varepsilon} + \frac{q}{4} \sum_a \Psi_{a1}^{1\varepsilon} \mathcal{Y}_{a1}^{\ell m} + \sum_a \Psi_{\ell 2}^{2\varepsilon} \mathcal{Y}_{a2}^{\ell m}, \\ \Psi^{3\varepsilon} &= \frac{1}{144} [q(8h_\ell + q^2) + 12V^{10}] \Psi^{0\varepsilon} + \frac{1}{40} \sum_a (4h_a + q^2) \Psi_{a1}^{1\varepsilon} \mathcal{Y}_{a1}^{\ell m} - \\ &\quad - \frac{V^{11}}{10\sqrt{3}} \Psi_{\ell 0}^{0\varepsilon} \sum_{a=|\ell \pm 1|} C_{\ell 0 10}^{a0} \mathcal{Y}_{a1}^{\ell m} + \frac{q}{6} \sum_a \Psi_{a2}^{2\varepsilon} \mathcal{Y}_{a2}^{\ell m} + \sum_a \Psi_{a3}^{3\varepsilon} \mathcal{Y}_{a3}^{\ell m}. \end{aligned} \quad (46)$$

Третий способ построения функций $\Psi^{n\varepsilon}$ реализуется подстановкой решений $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}$ системы (43) в суммы (40). При этом компоненты Ψ^n или $\Psi_{b\beta}^n$ не требуются. Поэтому такой способ представляется оптимальным для вывода как асимптотики ряда (39), так и асимптотик компонент Ψ_{ab}^ε разложения (42).

Выразив решения $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}$, $n \leq 4$, цепочки (43) через неизвестные функции $\partial_x^n \Psi_{ab}^\varepsilon|_{x=0} = (n!) \Psi_{ab}^{n\varepsilon}$ с $b = n$, получаем следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} \Psi_{\ell 0}^\varepsilon(x, y) &= \left\{ 1 + \frac{qx}{2} + \frac{x^2}{12} [2h_\ell(y) + q^2] + \frac{x^3}{144} [q(8h_\ell(y) + q^2) + 12V^{10}] + \right. \\ &\quad + \frac{x^4}{20} \left[\frac{1}{36} h_\ell(y) [6h_\ell(y) + 5q^2] + \frac{q^4}{144} + V^{20}(y) + \frac{7q}{12} V^{10} \right] \Big\} \Psi_{\ell 0}^\varepsilon(0, y) - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{60} x^4 V^{11}(y) \sum_{a'=|\ell \pm 1|} C_{\ell 0 10}^{a'0} \partial_x \Psi_{a'1}^\varepsilon(x, y)|_{x=0} + O(x^5), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{a1}^\varepsilon(x, y) &= x \left\{ 1 + \frac{qx}{4} + \frac{x^2}{40} [4h_\ell(y) + q^2] + \right. \\ &\quad + \frac{x^3}{720} [q(14h_\ell(y) + q^2) + 40V^{10}] \Big\} \partial_x \Psi_{a1}^\varepsilon(x, y)|_{x=0} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{270} V^{11}(y) C_{\ell 0 10}^{a0} (9 + 2qx) x^3 \Psi_{\ell 0}^\varepsilon(0, y) + O(x^5), \end{aligned} \quad (48)$$

где $a = |\ell \pm (1 - \mu(\sigma))|$,

$$\begin{aligned} \Psi_{a2}^\varepsilon(x, y) = & \frac{x^2}{2} \left\{ 1 + \frac{qx}{6} + \frac{x^2}{84} [6h_\ell(y) + q^2] \right\} \partial_x^2 \Psi_{a2}^\varepsilon(x, y)|_{x=0} - (-1)^{\ell+a} \frac{x^4}{7} V^{11}(y) \times \\ & \times \sum_{a'=|\ell \pm 1|} (2a' + 1)^{1/2} C_{a'010}^{a0} \begin{Bmatrix} a & a' & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{Bmatrix} \partial_x \Psi_{a'1}^\varepsilon(x, y)|_{x=0} + \\ & + \frac{x^4}{14\sqrt{5}} V^{22}(y) C_{\ell 020}^{a0} \Psi_{\ell 0}^\varepsilon(0, y) + O(x^5), \end{aligned} \quad (49)$$

где $a = |\ell \pm \mu(\sigma)|$, $|\ell \pm (2 - \mu(\sigma))|$.

Вычисляя частные производные ∂_x^n , $n \leq 4$, от этих асимптотик, получаем следующие связи (9) при $x = 0$ и $y > 0$. Для компоненты $\Psi_{\ell 0}^\varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} (2\partial_x - q)\Psi_{\ell 0}^\varepsilon &= 0, \quad (6\partial_x^2 - 2h_\ell - q^2)\Psi_{\ell 0}^\varepsilon = 0, \\ [24\partial_x^3 - q(8h_\ell + q^2) - 12V^{10}]\Psi_{\ell 0}^\varepsilon &= 0, \\ [120(6V^{20} - \partial_x^4) + 5h_\ell(6h_\ell + 5q^2) + q^4 + 84qV^{10}]\Psi_{\ell 0}^\varepsilon = \\ &= 48\sqrt{3}V^{11} \sum_{a'=|\ell \pm 1|} C_{\ell 010}^{a'0} \partial_x \Psi_{a'1}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (50)$$

Для компонент Ψ_{a1}^ε , $a = |\ell \pm (1 - \mu(\sigma))|$, имеем

$$\begin{aligned} \partial_x(2\partial_x - q)\Psi_{a1}^\varepsilon &= 0, \\ [20\partial_x^3 - 3(4h_a + q^2)\partial_x]\Psi_{a1}^\varepsilon &= -4\sqrt{3}V^{11}C_{\ell 010}^{a0}\Psi_{\ell 0}^\varepsilon, \\ \{30\partial_x^4 - [q(14h_a + q^2) + 40V^{10}]\partial_x\}\Psi_{a1}^\varepsilon &= -\frac{16}{\sqrt{3}}qV^{11}C_{\ell 010}^{a0}\Psi_{\ell 0}^\varepsilon, \end{aligned} \quad (51)$$

а для компонент Ψ_{a2}^ε , $a = |\ell \pm \mu(\sigma)|$, $|\ell \pm (2 - \mu(\sigma))|$, находим

$$\begin{aligned} \partial_x^2(2\partial_x - q)\Psi_{a2}^\varepsilon &= 0, \\ 7\sqrt{5}\partial_x^4\Psi_{a2}^\varepsilon &= 12V^{22}C_{\ell 020}^{a0}\Psi_{\ell 0}^\varepsilon - \\ &- 24\sqrt{5}(-1)^{\ell+a} \sum_{a'=|a \pm 1|} (2a' + 1)^{1/2} C_{a'010}^{a0} \begin{Bmatrix} a & a' & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{Bmatrix} \partial_x \Psi_{a'1}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (52)$$

Чтобы воспроизвести соотношения (10) и (11), рассмотрим асимптотику $\Psi^\varepsilon \sim \Psi^{\varepsilon 0} + x\Psi^{\varepsilon 1}$ ряда (39) с компонентами (45) в частном случае $\ell = 0$, $m_3 = \infty$, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_2$, когда согласно (1) и (4) $\mathbf{x} = \mathbf{a}_1\sqrt{2m_1}$ и $q = z_3\sqrt{2m_1}$. Представим второе слагаемое суммы $\Psi^{1\varepsilon}$ (см. (45)) скалярным произведением $(\mathbf{a}_1\mathbf{A})$ с неопределенным вектором $\mathbf{A}$,

$$\Psi^{1\varepsilon}(y)\mathcal{Y}_{11}^{00}(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\Psi_{11}^{1\varepsilon}(y)u = (\mathbf{a}_1\mathbf{A}), \quad \mathbf{A} \equiv -\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\Psi_{11}^{1\varepsilon}(y)\frac{\mathbf{y}}{a_1y}.$$

Тогда исследуемая асимптотика сведется к равенству (11), доказанному в [13], а после ее интегрирования по всем углам $\hat{x}, \hat{y}$ получится условие Като [12] в его исходной форме (10). Этим замечанием закончим анализ решения Ψ^ε в бисферическом базисе и перейдем к исследованию этого же решения, но в D -базисе (8).

5. СТРОЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В D -БАЗИСЕ

Введем две “подвижные” системы координат $S^t = (\mathbf{e}_1^t, \mathbf{e}_2^t, \mathbf{e}_3^t)$, $t = x, y$. Пусть начальные точки O^x и O^y систем S^x и S^y совпадают с начальной точкой O фиксированной системы $S = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, а их реперы таковы, что

$$\mathbf{y}\mathbf{e}_1^x > 0, \quad \mathbf{y}\mathbf{e}_2^x = 0, \quad \mathbf{x}\mathbf{e}_3^x = x, \quad \mathbf{x}\mathbf{e}_1^y < 0, \quad \mathbf{x}\mathbf{e}_2^y = 0, \quad \mathbf{y}\mathbf{e}_3^y = y.$$

Тогда орты $\mathbf{e}_2^x$ и $\mathbf{e}_2^y$ направлены вдоль нормали $\mathbf{n} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ к плоскости трех частиц, система S^x ориентирована так же, как и система S^R в работах [6], [7], и получается поворотом системы S^y вокруг орта $\mathbf{e}_2^y$ на угол θ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Так как в системе S ориентация этих векторов задана углами $\hat{x} = (\theta_x, \varphi_x)$ и $\hat{y} = (\theta_y, \varphi_y)$, а в системе S^t — углами $\hat{x}^t$ и $\hat{y}^t$,

$$\begin{aligned} \hat{x}^t &= (\theta_x^t, \varphi_x^t) = (0, 0), & \hat{y}^t &= (\theta_y^t, \varphi_y^t) = (\theta, 0), & t &= x, \\ \hat{x}^t &= (\theta_x^t, \varphi_x^t) = (\theta, \pi), & \hat{y}^t &= (\theta_y^t, \varphi_y^t) = (0, 0), & t &= y, \end{aligned} \quad (53)$$

то переход $S \rightarrow S^x$ определяется углами Эйлера $\omega^x = (\varphi_x, \theta_x, \gamma^x)$, а переход $S \rightarrow S^y$ — углами Эйлера $\omega^y = (\varphi_y, \theta_y, \gamma^y)$, где углы γ^t таковы, что

$$\cos \gamma^t = \operatorname{ctg} \theta \cos \theta_t - \operatorname{cosec} \theta \cos \theta_{t'}, \quad t \neq t' = x, y.$$

В D -базисе (8) оператор, проецирующий функцию Ψ на Ψ^ε , имеет вид

$$P^{\varepsilon t} = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} |D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t)\rangle \langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t)|, \quad t = x, y. \quad (54)$$

Для построения D -компонент $\Psi_{m'}^{\varepsilon t}$ образа $\Psi^\varepsilon = P^{\varepsilon t} \Psi$,

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} \Psi_{m'}^{\varepsilon t}(x, y, \theta) D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t), \quad (55)$$

как проекций

$$\Psi_{m'}^{\varepsilon t}(x, y, \theta) \equiv \langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) | \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$$

сферического и бисферического рядов (21), (22) и (40) решения Ψ , потребуются разложения функций $Y_{a\alpha}(\hat{y})Y_{b\beta}(\hat{x})$ и $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y})$ по функциям $D_{mm'}^{\ell\sigma*}$. Выведем такие разложения.

Используем равенства (6), формулы (53), известные [3] правила преобразования гармоник $Y_{fe}(\hat{a})$ при переходе $S \rightarrow S^t$, их значения при нулевых аргументах,

$$Y_{fe}(\hat{a}) = \sum_{e'=-f}^f D_{ee'}^{\ell*}(\omega^t) Y_{fe'}(\hat{a}^t), \quad Y_{fe}(0, 0) = \left(\frac{2f+1}{4\pi} \right)^{1/2} \delta_{e0}, \quad a, t = x, y,$$

и разложение произведения двух D -функций по функциям $D_{mm'}^{\ell\sigma*}$. Тогда получим первое искомое разложение

$$\begin{aligned} Y_{a\alpha}(\hat{y})Y_{b\beta}(\hat{x}) &= \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} \langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) | Y_{a\alpha}(\hat{y})Y_{b\beta}(\hat{x}) \rangle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t), \\ \langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) | Y_{a\alpha}(\hat{y})Y_{b\beta}(\hat{x}) \rangle &= \left[\frac{1 + \sigma(-1)^{a+b}}{1 + \delta_{m'0}} \right]^{1/2} (-1)^{m+m'} \times \\ &\times C_{a\alpha b\beta}^{\ell-m} \begin{cases} (-1)^a C_{a-m'\ell m'}^{b0} \Theta_{am'}(u), & t = x, \\ (-1)^{b+m'} C_{b-m'\ell m'}^{a0} \Theta_{bm'}(u), & t = y. \end{cases} \end{aligned} \quad (56)$$

Для вывода второго разложения умножим каждое ($\alpha = -a, \dots, a; \beta = m - a$) равенство (56) на соответствующий коэффициент $C_{a\alpha b\beta}^{\ell m}$ и просуммируем полученные равенства по всем α . Тогда вследствие определения (7) и свойства ортогональности коэффициентов Клебша–Гордана при $t = x$ получим известное разложение [17], а в случае $t = y$ – его аналог

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{x}, \hat{y}) &= \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} \langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) | \mathcal{Y}_{ab}(\hat{x}, \hat{y}) \rangle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t), \\ \langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) | \mathcal{Y}_{ab}(\hat{x}, \hat{y}) \rangle &= \begin{cases} T_{ab}^{\ell m'} \Theta_{am'}(u), & t = x, \\ (-1)^{m'} T_{ba}^{\ell m'} \Theta_{bm'}(u), & t = y, \end{cases} \\ T_{ab}^{\ell m'} &\equiv \left[\frac{1 + \sigma(-1)^{a+b}}{1 + \delta_{m'0}} \right]^{1/2} (-1)^{a+m'} C_{a-m'\ell m'}^{b0}. \end{aligned} \quad (57)$$

Приступим к анализу D -компонент $\Psi_m^{\varepsilon t}$ ряда (55). Применяя (54) и (56), построим образ $\Psi^\varepsilon = P^{\varepsilon t} \Psi$ ряда (21) с компонентами (22) и таким образом докажем, что D -компоненты $\Psi_m^{\varepsilon t}$, являющиеся рядами по целым степеням x и конечным суммам $\Psi_{m'}^{n\varepsilon t}$ проекций $\langle Y_{a\alpha} | \Psi_{b\beta}^n \rangle$ компонент $\Psi_{b\beta}^n$ общего решения,

$$\Psi_{m'}^{\varepsilon t}(x, y, \theta) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \Psi_{m'}^{n\varepsilon t}(y, \theta), \quad m' = \mu(\sigma), \dots, \ell, \quad t = x, y, \quad (58)$$

$$\Psi_{m'}^{n\varepsilon t}(y, \theta) = \sum_{b=\mu(\sigma)}^n \sum_a \langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) | Y_{a\alpha}(\hat{y})Y_{b\beta}(\hat{x}) \rangle \langle Y_{a\alpha}(\hat{y}) | \Psi_{b\beta}^n(\mathbf{y}) \rangle. \quad (59)$$

Следовательно, асимптотики D -компонент $\Psi_{m'}^{\varepsilon t}$, т.е. конечные подсуммы ($n = \mu(\sigma), \dots, n' < \infty$) рядов (58), можно найти, заменив функции $\Psi_{b\beta}^n$ в суммах (59) их явными выражениями, например, при $n \leq 3$ – правыми частями равенств (28), (29), (31) и (32).

Другой вывод представления (58) реализуем проецированием бисферического ряда (40) с помощью формул (54) и (57) на D -базис (8). В итоге при $t = x$ функция $\Psi_{m'}^{n\varepsilon t}$ представляется конечной суммой по индексу a ,

$$\Psi_{m'}^{n\varepsilon x}(y, \theta) = \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} \Psi_{am'}^{n\varepsilon x}(y) \Theta_{am'}(u), \quad (60)$$

с Θ -компонентами

$$\Psi_{am'}^{n\epsilon x}(y) \equiv \langle \Theta_{am'}(u) | \Psi_{m'}^{n\epsilon x}(y, \theta) \rangle = \sum_{b=m'}^n T_{ab}^{\ell m'} \Psi_{ab}^{n\epsilon}(y), \quad (61)$$

а при $t = y$ — конечной суммой по индексу b ,

$$\Psi_{m'}^{n\epsilon y}(y, \theta) = \sum_{b=m'}^n \Psi_{bm'}^{n\epsilon y}(y) \Theta_{bm'}(u), \quad (62)$$

с Θ -компонентами

$$\Psi_{bm'}^{n\epsilon y}(y) \equiv \langle \Theta_{bm'}(u) | \Psi_{m'}^{n\epsilon y}(\theta, y) \rangle = \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} (-1)^{m'} T_{ba}^{\ell m'} \Psi_{ab}^{n\epsilon}(y). \quad (63)$$

В этих суммах $a \leq \ell + n - \mu(\sigma)$, поскольку $\mathbf{a} = \mathbf{l} - \mathbf{b}$, $(-1)^{a+b} = \sigma$ и $b \leq n$. Имеем также $a \geq m'$ и $b \geq m'$, потому что согласно (57) $T_{ab}^{\ell m'}$, $T_{ba}^{\ell m'} = 0$ при $a < m'$ или $b < m'$. По той же причине $\Psi_{am'}^{n\epsilon x} \equiv 0$ при $m' > a$ и $\Psi_{bm'}^{n\epsilon y} \equiv 0$ при $m' > b$. Так как $n \geq b \geq m'$, то $\Psi_{bm'}^{n\epsilon y} \equiv 0$, если $m' > n$, но, вообще говоря, $\Psi_{am'}^{n\epsilon x} \neq 0$ при $m' > n$.

В отличие от системы функций $\Theta_{cm'}(u)$, $m' = -c, \dots, c$, система функций $\Theta_{cm'}(u)$, $c = m', m' + 1, \dots$, ортонормирована на отрезке $u \in [-1, 1]$,

$$\langle \Theta_{cm'}(u) | \Theta_{cm''}(u) \rangle \neq \delta_{m'm''}, \quad \langle \Theta_{cm'}(u) | \Theta_{c'm'}(u) \rangle = \delta_{cc'}.$$

Следовательно, формулы (60) и (62) означают, что компоненты $\Psi_{m'}^{n\epsilon x}$ и $\Psi_{m'}^{n\epsilon y}$ могут быть разложены в конечные суммы по ортонормированным системам функций $\Theta_{am'}(u)$ и $\Theta_{bm'}(u)$ с индексами $a, b \geq m'$. Благодаря конечности таких разложений асимптотики рядов (58), т.е. D -компонент $\Psi_{m'}^{\epsilon t}$, можно построить заменой в (61) или (63) бисферических компонент $\Psi_{ab}^{n\epsilon}$ их явными выражениями (например, (45) и (46)) через неопределенные бисферические компоненты $\Psi_{ab}^{n'\epsilon}$, $b = n' \leq n$. Согласно (61) и (63) при такой замене функции $\Psi_{m'}^{n\epsilon x}$ и $\Psi_{m'}^{n\epsilon y}$ с данным n выразятся через произвольные функции $f_{am'}^{n'x}$ и $f_{m'}^{n'y}$,

$$\begin{aligned} f_{am'}^{n'x}(y) &= T_{ab}^{\ell m'} f_a^{n'x}(y), \quad f_a^{n'x}(y) \equiv \Psi_{ab}^{n'\epsilon}(y), \\ f_{m'}^{n'y}(y) &= \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} (-1)^{m'} T_{ba}^{\ell m'} \Psi_{ab}^{n'\epsilon}(y), \quad b = n' \leq n. \end{aligned} \quad (64)$$

Для полноты приведем равенства, связывающие все введенные компоненты друг с другом. Из (55) и определения систем S^x и S^y следует, что

$$\Psi_{m'}^{\epsilon x}(x, y, \theta) = \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} D_{m'm''}^{\ell\sigma*}(0, \theta, 0) \Psi_{m''}^{\epsilon y}(x, y, \theta), \quad m' = \mu(\sigma), \dots, \ell. \quad (65)$$

Поэтому компоненты $\Psi_{m'}^{n\epsilon x}$ и $\Psi_{m'}^{n\epsilon y}$ рядов (58) связаны аналогичным образом,

$$\Psi_{m'}^{n\epsilon x}(y, \theta) = \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} D_{m'm''}^{\ell\sigma*}(0, \theta, 0) \Psi_{m''}^{n\epsilon y}(y, \theta), \quad m' = \mu(\sigma), \dots, \ell. \quad (66)$$

Умножим каждый ряд (61) или (63) ($m' = \mu(\sigma), \dots, \ell$) на $T_{ab'}^{\ell m'}/(2 - \delta_{m'0})$ или на $T_{ba'}^{\ell m'}/(2 - \delta_{m'0})$. Суммируя получившиеся равенства по всем m' , имеем

$$\begin{aligned}\Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y) &= 2 \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\min(a,\ell)} \frac{(-1)^{a+m'}}{(2 - \delta_{m'0})^{1/2}} C_{a-m'\ell m'}^{b0} \Psi_{am'}^{n\varepsilon x}(y) = \\ &= 2 \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\min(b,\ell)} \frac{(-1)^b}{(2 - \delta_{m'0})^{1/2}} C_{b-m'\ell m'}^{a0} \Psi_{bm'}^{n\varepsilon y}(y).\end{aligned}\quad (67)$$

Просуммировав по всем $b = \mu(\sigma), \dots, n$ равенства (67), умноженные на соответствующие коэффициенты $C_{a-m''\ell m''}^{b0}$, получаем, что при $(-1)^{a+b} = \sigma$

$$\Psi_{am''}^{n\varepsilon x}(y) = \sigma(-1)^{m''} \sum_{b=m'}^n C_{a-m''\ell m''}^{b0} \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\min(b,\ell)} \sqrt{\frac{2 - \delta_{m''0}}{2 - \delta_{m'0}}} C_{b-m'\ell m'}^{a0} \Psi_{bm'}^{n\varepsilon y}(y). \quad (68)$$

Третий способ построения асимптотик компонент $\Psi_{m'}^{\varepsilon t}$ суммы (55) опишем более подробно. Этот способ представляется оптимальным, потому что в нем, в отличие от двух упомянутых выше способов, не нужны ни функции $\Psi_{b\beta}^n$, ни функции Ψ_{ab}^n , а ключевыми являются доказанные представления (58), (60) и (62). Благодаря им для решения уравнения (55) справедливы следующие два разложения:

$$\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^x) \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} \Psi_{am'}^{n\varepsilon x}(y) \Theta_{am'}(u), \quad (69)$$

$$\Psi^{\varepsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^{\infty} x^n \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^y) \sum_{b=m'}^n \Psi_{bm'}^{n\varepsilon y}(y) \Theta_{bm'}(u) \quad (70)$$

по трем системам линейно независимых функций

$$(x^0, x^1, \dots), \quad (D_{mm'}^{\ell\sigma*}, m' = \mu(\sigma), \dots, \ell) \quad \text{и} \quad (\Theta_{am'}, a \geq m') \quad \text{или} \quad (\Theta_{bm'}, b \geq m').$$

Поэтому неизвестные функции $\Psi_{am'}^{n\varepsilon t}(y)$ удастся подчинить линейным системам уравнений. Для сравнения выведем их в двух случаях: $t = x$ и $t = y$.

Пусть $t = x$, т.е. используется система S^x . Тогда действие проектора (54) с $t = x$ на цепочку (25)–(27) дает рекуррентную по индексу n цепочку систем уравнений для искомых компонент $\Psi_{m'}^{n\varepsilon x}$ ряда (58),

$$\begin{aligned}& [\ell(\ell+1) - 2m'^2 + Q_{m'm'}(\theta) - (n+2)(n+3)] \Psi_{m'}^{n+2,\varepsilon x}(y, \theta) - \\ & - \sum_{m''=m'\pm 1} \gamma_{m'm''}^{\ell\sigma} Q_{m'm''}(\theta) \Psi_{m''}^{n+2,\varepsilon x}(y, \theta) = \\ & = -q \Psi_{m'}^{n+1,\varepsilon x}(y, \theta) - h_{m'}^x(y, \theta) \Psi_{m'}^{n\varepsilon x}(y, \theta) - \sum_{p=1}^n \sum_{s=0}^p V^{ps}(y) P_s(u) \Psi_{m'}^{n-p,\varepsilon x}(y, \theta).\end{aligned}\quad (71)$$

Здесь $\Psi_{m'}^{n\epsilon x} \equiv 0$ при $n < 0$, $m' = \mu(\sigma), \dots, \ell$ при каждом $n = -2, 1, \dots$,

$$\begin{aligned}\gamma_{m', m'+1}^{\ell\sigma} &\equiv \{[1 + \delta_{m'0}\sigma(-1)^\ell][\ell(\ell+1) - m'(m'+1)]\}^{1/2}, \\ \gamma_{m', m'-1}^{\ell\sigma} &\equiv (1 - \delta_{m'0})\{[1 + \delta_{m'1}\sigma(-1)^\ell][\ell(\ell+1) - m'(m'-1)]\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Оператор $h_{m'}^x(y, \theta)$ порожден оператором (24),

$$h_{m'}^x(y, \theta) \equiv \langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^x) | h(y) | D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^x) \rangle = -y^{-2} \partial_y (y^2 \partial_y) + y^{-2} Q_{m'm'}(\theta) + V^{00}(y) - E, \quad (72)$$

а операторы $Q_{m'm''}(\theta)$ определены как

$$Q_{m'm'}(\theta) \equiv -\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{m'^2}{\sin^2 \theta}, \quad Q_{m', m' \pm 1}(\theta) \equiv \mp \partial_\theta + (m' \mp 1) \operatorname{ctg} \theta. \quad (73)$$

При действии на функцию $\Theta_{am'}$ оператор $Q_{m'm'}$ и оператор (20) умножения на $P_s(u)$ сохраняют индекс m' , а образы $Q_{m', m' \pm 1} \Theta_{a, m' \pm 1}$ подобны $\Theta_{am'}$ [4],

$$\begin{aligned}[Q_{m'm'}(\theta) - a(a+1)] \Theta_{am'}(u) &= 0, \quad Q_{m'm''}(\theta) \Theta_{am''}(u) = q_{m'm''}^a \Theta_{am'}(u), \\ q_{m'm''}^a &\equiv [a(a+1) - m'm'']^{1/2}, \quad m'' = m' \pm 1.\end{aligned} \quad (74)$$

Поэтому при данном n каждое уравнение системы (71) ($m' = \mu(\sigma), \dots, \ell$) заменой всех функций $\Psi_{m''}^{n'\epsilon x}$, $n' = 0, \dots, n+2$, $m'' = m'$, $m' \pm 1$, их аналогами (60) сводится к уравнению, содержащему функции $\Theta_{am''}$ с разными a , но одним и тем же m'' , равным m' . Так как такие функции линейно независимы, то рассматриваемое уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда коэффициент перед каждой из них равен нулю, т.е. когда для любого допустимого a

$$\begin{aligned}&[\ell(\ell+1) - 2m'^2 - (n+2)(n+3)] \Psi_{am'}^{n+2, \epsilon}(y) - \\ &- \sum_{m''=m' \pm 1} \gamma_{m'm''}^{\ell\sigma} q_{m'm''}^a \Psi_{am''}^{n+2, \epsilon x}(y) = -q_{am'}^{n+1, \epsilon x}(y) - h_{am'}^x(y) \Psi_{am'}^{n\epsilon x}(y) - \\ &- \sum_{p=1}^n \sum_{s=0}^p (-1)^s V^{ps}(y) \sum_{a'=m'}^{\ell+n-p-\mu(\sigma)} C_{s0a0}^{a'0} C_{s0a'm'}^{am'} \Psi_{a'm'}^{n-p, \epsilon x}(y),\end{aligned} \quad (75)$$

где $\Psi_{am'}^{n\epsilon x} \equiv 0$ при $n < 0$ или $a < m'$ или же при $a > \ell + n - \mu(\sigma)$ и, как следует из соотношений (44), (72) и (74),

$$h_{am'}^x(y) \equiv \langle \Theta_{am'}(u) | h_{m'}^x(y, \theta) | \Theta_{am'}(u) \rangle = h_a(y).$$

Таким образом, цепочка дифференциальных уравнений (71) сводится к рекуррентной по индексу n цепочке систем линейных уравнений (75) для искомого Θ -компонента $\Psi_{am'}^{n\epsilon x}$ рядов (60). Эти системы нумеруются индексами n и a . Система с данными n и a состоит из уравнений для неизвестных компонент $\Psi_{am'}^{n+2, \epsilon x}$, причем $m' = \mu(\sigma), \dots, \ell$, если $a > \ell$, и $m' = a, \dots, \ell$, если $a \leq \ell$. Матрица такой системы трехдиагональна, а ее неизвестные зацеплены по индексу m' , что существенно затрудняет их нахождение в явном виде. Ключевыми для построения решения $F_{am'}^{n+2, x}$, $m' \leq a$, однородной системы с такой

матрицей являются известные связи [3] для коэффициентов Клебша–Гордана с индексами проекций моментов, отличающихся на единицу, и следующий из представлений (61) и (64) анзац

$$F_{am'}^{n+2,x}(y) = T_{a,n+2}^{\ell m'} f_a^{n+2,x}(y), \quad f_a^{n+2,x}(y) \equiv \Psi_{a,n+2}^{n+2,\varepsilon}(y), \quad m' \leq a.$$

Общие решения $\Psi_{am'}^{n\varepsilon x}(y)$, $n \leq 3$, цепочки (75) выглядят не столь сложно, что позволяет по формулам (60) выразить компоненты $\Psi_{m'}^{n\varepsilon x}(y, \theta)$, $n \leq 3$, рядов (58) с $m' = \mu(\sigma), \dots, \ell$ через неопределенные функции $f_a^{n\varepsilon x}(y)$, известные операторы $h_{am'}^x(y)$ и функции $V^{ps}(y)$ и $\Theta_{am'}(u)$,

$$\begin{aligned} \Psi_{m'}^{0\varepsilon x} &= T_{\ell 0}^{\ell m'} f_{\ell}^{0x} \Theta_{\ell m'}, \quad \Psi_{m'}^{1\varepsilon x} = \frac{q}{2} \Psi_{m'}^{0\varepsilon x} + \sum_{a=|\ell-1|}^{\ell+1} T_{a1}^{\ell m'} f_a^{1x} \Theta_{am'}, \\ \Psi_{m'}^{2\varepsilon x} &= \frac{1}{12} (2h_{\ell m'}^x + q^2) \Psi_{m'}^{0\varepsilon x} + \frac{q}{4} \sum_{a=|\ell-1|}^{\ell+1} T_{a1}^{\ell m'} f_a^{1x} \Theta_{am'} + \sum_{a=|\ell-2|}^{\ell+2} T_{a2}^{\ell m'} f_a^{2x} \Theta_{am'}, \\ \Psi_{m'}^{3\varepsilon x} &= \frac{1}{144} [q(8h_{\ell m'}^x + q^2) + 12V^{10}] \Psi_{m'}^{0\varepsilon x} + \\ &+ \frac{1}{40} \sum_{a=|\ell-1|}^{\ell+1} (4h_{\ell m'}^x + q^2) T_{a1}^{\ell m'} f_a^{1x} \Theta_{am'} - \frac{V^{11}}{10\sqrt{3}} f_{\ell}^{0x} \sum_{a=|\ell\pm 1|} C_{\ell 0 10}^{a0} T_{a1}^{\ell m'} \Theta_{am'} + \\ &+ \frac{q}{6} \sum_{a=|\ell-2|}^{\ell+2} T_{a2}^{\ell m'} f_a^{2x} \Theta_{am'} + \sum_{a=|\ell-3|}^{\ell+3} T_{a3}^{\ell m'} f_a^{3x} \Theta_{am'}. \end{aligned}$$

Используя эти представления, получаем следующие асимптотические формулы для ряда (58):

$$\begin{aligned} \Psi_{m'}^{\varepsilon x}(x, y, \theta) &= \left[1 + \frac{qx}{2} + \frac{x^2}{12} (2h_{\ell m'}^x(y) + q^2) \right] \Psi_{m'}^{\varepsilon x}(0, y, \theta) + \\ &+ \frac{x^3}{144} [q(8h_{\ell m'}^x(y) + q^2) + 12V^{10}] \Psi_{m'}^{\varepsilon x}(0, y, \theta) + \\ &+ x^2 \sum_{a=\ell, |\ell\pm 2|} \left(1 + \frac{qx}{6} \right) T_{a2}^{\ell m'} f_a^{2x}(y) \Theta_{am'}(u) + \\ &+ x \sum_{a=|\ell\pm 1|} \left[1 + \frac{qx}{4} + \frac{x^2}{40} (4h_{am'}^x(y) + q^2) \right] T_{am'}^{\ell m'} f_a^{1x}(y) \Theta_{am'}(u) + \\ &+ x^3 \sum_{a=|\ell\pm 1|} \left[T_{a3}^{\ell m'} f_a^{3x}(y) - \frac{V^{11}(y)}{10\sqrt{3}} C_{\ell 0 10}^{a0} T_{a1}^{\ell m'} f_{\ell}^{0x}(y) \right] \Theta_{am'}(u) + \\ &+ x^3 \sum_{a=|\ell\pm 3|} T_{a3}^{\ell m'} f_a^{3x} \Theta_{3m'}(u) + O(x^4), \quad \sigma = (-1)^{\ell}; \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned}\Psi_{m'}^{\varepsilon x}(x, y, \theta) = & x \left[1 + \frac{qx}{4} + \frac{x^2}{40} (4h_{\ell m'}^x(y) + q^2) \right] \Psi_{m'}^{\varepsilon x}(0, y, \theta) + \\ & + x^2 \sum_{a=|\ell \pm 1|} \left(1 + \frac{qx}{6} \right) T_{a2}^{\ell m'} f_a^{2x}(y) \Theta_{am'}(u) + \\ & + x^3 \sum_{a=\ell, |\ell \pm 2|} T_{a3}^{\ell m'} f_a^{3x}(y) \Theta_{am'}(u) + O(x^4), \quad \sigma = (-1)^{\ell+1}.\end{aligned}$$

При $x = 0$ производные асимптотик (76) $\partial_x^n \Psi_{m'}^{\varepsilon x} = (n!) \Psi_{m'}^{n\varepsilon x}$, $n = 0, 1, 2, 3$, содержат разное число неизвестных функций $f_a^{n'x}$, $n' \leq n$. Поэтому линейной комбинации производных разных порядков, не содержащей ни одной функции $f_a^{n'x}$, не существует. Для проекций $\partial_x^n \Psi_{am'}^{\varepsilon x}$, производных $\partial_x^n \Psi_m^{\varepsilon x}$ на функции $\Theta_{am'}(u)$ такие комбинации, т.е. связи (9), существуют. Например, в случае $a = \ell$ при $\sigma = (-1)^\ell$ и $n = 0$ или $\sigma = (-1)^{\ell+1}$ и $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned}\partial_x^n (2\partial_x - q) \Psi_{\ell m'}^{\varepsilon x}(x, y, \theta) = 0, \\ [12\partial_x^{2+n} (2\partial_x - q) - q(4h_{\ell m'}^x(y) - q^2) - (12 + 20n)V^{10}] \Psi_{\ell m'}^{\varepsilon x}(x, y, \theta) = 0.\end{aligned}\tag{77}$$

Отметим, что асимптотическая формула (13), доказанная в работе [6], следует из разложения (76) при $\sigma = (-1)^\ell$. Чтобы в этом убедиться, в (76) нужно положить $\mathbf{x} = \mathbf{x}_3$ и $q = z_1 z_2 \sqrt{2\mu_{12}}$, затем по формулам (1) выразить $\mathbf{x}_3$ и $\mathbf{y}_3$ через $\mathbf{R}$ и $\boldsymbol{\rho}$ и, наконец, оставить слагаемые, убывающие медленнее, чем $O(R^2)$.

Пусть теперь $t = y$, т.е. выбрана система S^y . Все построения в этом случае проводим в той же последовательности, что и в случае $t = x$. Сначала действием проектора (54) с $t = y$ на систему (25)–(27) подчиним неизвестные $\Psi_{m'}^{n\varepsilon y}$ ряда (58) дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}[Q_{m'm'}(\theta) - (n+2)(n+3)] \Psi_{m'}^{n+2, \varepsilon y}(y, \theta) = & -q \Psi_{m'}^{n+1, \varepsilon y}(y) + \\ & + y^{-2} \sum_{m''=m' \pm 1} \gamma_{m'm''}^{\ell \sigma} Q_{m'm''}(\theta) \Psi_{m''}^{n\varepsilon y}(y, \theta) - \\ & - h_{m'}^y(y, \theta) \Psi_{m'}^{n\varepsilon y}(y, \theta) - \sum_{p=1}^n \sum_{s=0}^p V^{ps}(y) P_s(u) \Psi_{m'}^{n-p, \varepsilon y}(y, \theta),\end{aligned}\tag{78}$$

где $\Psi_{m'}^{n\varepsilon y} \equiv 0$ при $n < 0$ или $n < m' = \mu(\sigma), \dots, \ell$, $Q_{m'm''}$ – операторы (73), а $h_{m'}^y$ – оператор $h(\mathbf{y})$ (см. (24)) в обкладках одинаковых функций $D_{mm'}^{\ell \sigma*}(\omega^y)$,

$$h_{m'}^y(y, \theta) \equiv -y^2 \partial_y (y^2 \partial_y) + y^{-2} Q_{m'm'}(\theta) + y^{-2} [\ell(\ell+1) - 2m'^2] + V^{00}(y) - E.$$

Подстановкой (62) сведем уравнения (78) к алгебраическим уравнениям

$$\begin{aligned}[b(b+1) - (n+2)(n+3)] \Psi_{bm'}^{n+2, \varepsilon y}(y) = & -q \Psi_{bm'}^{n+1, \varepsilon y}(y) + \\ & + y^{-2} \sum_{m''=m' \pm 1} \gamma_{m'm''}^{\ell \sigma} q_{m'm''}^b \Psi_{bm''}^{n\varepsilon y}(y) - h_{bm'}^y(y) \Psi_{bm'}^{n\varepsilon y}(y) - \\ & - \sum_{p=1}^n \sum_{s=0}^p (-1)^s V^{ps}(y) \sum_{b'=m'}^{n-p} C_{s0b0}^{b'0} C_{s0b'm'}^{bm'} \Psi_{b'm'}^{n-p, \varepsilon y}(y),\end{aligned}\tag{79}$$

где $m' = \mu(\sigma), \dots, \min(b, n+2)$, $\Psi_{bm'}^{n\epsilon y} = 0$, если $n < 0$ или $m' > b$ или же $n > b$, а $h_{bm'}^y$ — оператор $h_{m'}^y$ в обкладках одинаковых функций $\Theta_{bm'}(\theta)$,

$$h_{bm'}^y(y) \equiv -y^{-2} \partial_y (y^2 \partial_y) + y^{-2} [\ell(\ell+1) + b(b+1) - 2m'^2] + V^{00}(y) - E.$$

При данных n и b неизвестные $\Psi_{bm'}^{n+2,\epsilon y}$, $m' = \mu(\sigma), \dots, \min(b, n+2)$, системы (79), в отличие от решений $\Psi_{am'}^{n+2,\epsilon y}$ уравнений (75), не зацеплены по индексу m' . Нетривиальное решение $F_{bm'}^{n+2,y}$, $m' = \mu(\sigma), \dots, \min(b, n+2)$, соответствующей однородной системы существует только при $b = n+2$ и элементарно выражается ($F_{bm'}^{n+2,y} = f_{m'}^{n+2,y}$) через произвольные функции $f_{m'}^{n+2,y}(y)$, равные линейным комбинациям (64) произвольных бисферических компонент $\Psi_{a,n+2}^{n+2,\epsilon}$. По указанным причинам построение общего решения $\Psi_{bm'}^{n+2,\epsilon y}$, $m' \leq b \leq n+2$, цепочки систем (79) в порядке возрастания n и убывания b при каждом n не вызывает затруднений:

$$\begin{aligned} \Psi_{n+2,m'}^{n+2,\epsilon y}(y) &= f_{m'}^{n+2,y}(y), \\ \Psi_{n+1,m'}^{n+2,\epsilon y}(y) &= \frac{q}{2n+4} f_{m'}^{n+1,y}(y), \\ \Psi_{nm'}^{n+2,\epsilon y}(y) &= \frac{1}{4n+6} \left[\left(h_{nm'}^y(y) + \frac{q^2}{2n+2} \right) f_{m'}^{ny}(y) - \right. \\ &\quad - y^{-2} \sum_{m''=m' \pm 1} \gamma_{m'm''}^{\ell\sigma} q_{m'm''}^n f_{m''}^{ny}(y) - \\ &\quad - C_{10n0}^{n-10} C_{10n-1m'}^{nm'} V^{11}(y) f_{m'}^{n-1,y}(y) + \\ &\quad \left. + C_{20n0}^{n-20} C_{20n-2m'}^{nm'} V^{22}(y) f_{m'}^{n-2,y}(y) \right], \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

В итоге Θ -компоненты $\Psi_{bm'}^{n\epsilon y}(y)$, а затем и функции $\Psi_{m'}^{n\epsilon y}(y, \theta)$, т.е. суммы (62), выражаются через произвольные функции $f_{m'}^{n'y}(y)$ с $n' \leq n$, известные операторы $h_{bm'}^y(y)$ и функции $V^{ps}(y)$ и $\Theta_{bm'}(u)$. Например,

$$\begin{aligned} \Psi_{m'}^{0\epsilon y} &= f_0^{0y} \Theta_{00} \delta_{m'0} = 2^{-1/2} f_0^{0y}, \quad \Psi_{m'}^{1\epsilon y} = \frac{q}{2} \Psi_{m'}^{0\epsilon y} + f_{m'}^{1y} \Theta_{1m'}, \\ \Psi_{m'}^{2\epsilon y} &= \frac{1}{12} (2h_{00}^y + q^2) \Psi_{m'}^{0\epsilon y} + \frac{q}{4} f_{m'}^{1y} \Theta_{1m'} + f_{m'}^{2y} \Theta_{2m'}, \\ \Psi_0^{3\epsilon y} &= \frac{1}{144} [q(8h_{00}^y + q^2) + 12V^{10}] \Psi_{m'}^{0\epsilon y} + \frac{q}{6} f_0^{2y} \Theta_{20} + f_0^{3y} \Theta_{30} + \\ &\quad + \frac{1}{40} \left[(4h_{10}^y + q^2) \Psi_{m'}^{0\epsilon y} - 4y^{-2} \gamma_{01}^{\ell\sigma} q_{01}^1 f_1^{1y} + \frac{4}{\sqrt{3}} V^{11} \Psi_{m'}^{0\epsilon y} \right] \Theta_{10}, \\ \Psi_1^{3\epsilon y} &= \frac{1}{40} [(4h_{11}^y + q^2) f_1^{1y} - 4y^{-2} \gamma_{01}^{\ell\sigma} q_{01}^1 f_0^{1y}] \Theta_{11} + \frac{q}{6} f_1^{2y} \Theta_{21} + f_1^{3y} \Theta_{31}, \\ \Psi_2^{3\epsilon y} &= \frac{q}{6} f_2^{2y} \Theta_{22} + f_2^{3y} \Theta_{32}, \quad \Psi_3^{3\epsilon y} = f_3^{3y} \Theta_{33}, \end{aligned} \tag{80}$$

где $f_0^{ny}(y) \equiv 0$ при любом n , если $\sigma = (-1)^{\ell+1}$. Используя эти представления, находим следующие асимптотики сумм (58), т.е. D -компонент $\Psi_m^{\varepsilon y}$:

$$\begin{aligned}
\Psi_0^{\varepsilon y}(x, y, \theta) &= \left\{ 1 + \frac{qx}{2} + \frac{x^2}{12}(2h_{00}^y(y) + q^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^3}{144}[q(8h_{00}^y(y) + q^2) + 12V^{10}] \right\} f_0^{0y}(y) \Theta_{00}(u) + \\
&\quad + x \left[1 + \frac{qx}{4} + \frac{x^2}{40}(4h_{00}^y(y) + q^2) \right] f_0^{1y}(y) \Theta_{10}(u) + \\
&\quad + \frac{x^3}{10\sqrt{3}y^2} \{ y^2 V^{11}(y) f_0^{0y}(y) - \\
&\quad - [6\ell(\ell+1)(1 + \sigma(-1)^\ell)]^{1/2} f_1^{1y}(y) \} \Theta_{10}(u) + \\
&\quad + x^2 \left(1 + \frac{qx}{6} \right) f_0^{2y}(y) \Theta_{20}(u) + x^3 f_0^{3y}(y) \Theta_{30}(u) + O(x^4), \\
\Psi_1^{\varepsilon y}(x, y, \theta) &= x \left[1 + \frac{qx}{4} + \frac{x^2}{40}(4h_{11}^y(y) + q^2) \right] f_1^{1y}(y) \Theta_{11}(u) - \\
&\quad - \frac{x^3}{5y^2} [\ell(\ell+1)]^{1/2} f_0^{1y}(y) \Theta_{11}(u) + \\
&\quad + x^2 \left(1 + \frac{qx}{6} \right) f_1^{2y}(y) \Theta_{21}(u) + x^3 f_1^{3y}(y) \Theta_{31}(u) + O(x^4), \\
\Psi_2^{\varepsilon y}(x, y, \theta) &= x^2 \left[1 + \frac{qx}{6} \right] f_2^{2y}(y) \Theta_{22}(u) + x^3 f_2^{3y}(y) \Theta_{32}(u) + O(x^4).
\end{aligned} \tag{81}$$

Затем из этих асимптотик выводим связи (9) при $x = 0, y > 0$ для проекций $\partial_x^n \Psi_{bm'}^{\varepsilon y} \equiv (n!) \Psi_{bm'}^{\varepsilon y}$, производных $\partial_x^n \Psi_{m'}^{\varepsilon y}$ на функции $\Theta_{bm'}(u)$,

$$\begin{aligned}
\partial_x^b (2\partial_x - q) \Psi_{bm'}^{\varepsilon y}(x, y) &= 0, \quad b \geq m' = 0, 1, 2, \\
[6\partial_x^2 - 2h_{00}^y(y) - q^2] \Psi_{00}^{\varepsilon y}(x, y) &= 0, \\
[24\partial_x^3 - q(8h_{00}^y(y) + q^2) - 12V^{10}] \Psi_{00}^{\varepsilon y}(x, y) &= 0, \\
\partial_x [20\partial_x^2 - 3(4h_{10}^y(y) + q^2)] \Psi_{10}^{\varepsilon y}(x, y) &= \\
= 4 \left\{ \sqrt{3} V^{11}(y) \Psi_{00}^{\varepsilon y}(x, y) - 3y^{-2} [2\ell(\ell+1)(1 + \sigma(-1)^\ell)]^{1/2} \partial_x \Psi_{11}^{\varepsilon y}(x, y) \right\}, \\
\partial_x [20\partial_x^2 - 3(4h_{11}^y(y) + q^2)] \Psi_{11}^{\varepsilon y}(x, y) &= -\frac{24}{y^2} \sqrt{\ell(\ell+1)} \partial_x \Psi_{10}^{\varepsilon y}(x, y).
\end{aligned} \tag{82}$$

Осталось рассмотреть случай тождественных частиц p_j и p_k . Вернемся к бисферическому представлению (42) решения Ψ^ε . Как следует из формул (7) и (33), физическое решение $\Psi^{\varepsilon+} = P^+ \Psi^\varepsilon$ или $\Psi^{\varepsilon-} = P^- \Psi^\varepsilon$, обладающее кроме набора квантовых чисел $\varepsilon = (E, \ell, m, \sigma)$ определенной перестановочной симметрией $P^+ \Psi^{\varepsilon+} = \Psi^{\varepsilon+}$ или $P^- \Psi^{\varepsilon-} = -\Psi^{\varepsilon-}$, ортогонально всем бисферическим гармоникам $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}$ с нечетным или соответственно четным индексом b . Такую ортогональность можно обеспечить единственным способом, а именно выбрав все произвольные функции $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y)$, $b = n$, нулевыми при нечетном или четном b , равном n . Действительно, при таком выборе по построению, описанному в разделе 4, все функции $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}$ с $b \leq n$, а значит, и все бисферические

компоненты Ψ_{ab}^ε с нечетным или четным b окажутся нулевыми. Поэтому формулы (42) станут бисферическим представлением искомого решения $\Psi^{\varepsilon+}$ или $\Psi^{\varepsilon-}$. Согласно формулам (64) функции $f_{m'}^{nx}$ и $f_{m'}^{ny}$ равны нулю тогда и только тогда, когда равны нулю функции $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}(y)$ с $n = b$. Следовательно, если положить $f_a^{nx}(y) = f_{m'}^{ny}(y) \equiv 0$ при всех нечетных или четных n , то построенные по формулам (58)–(63), (75) и (79) D -компоненты $\Psi_{m'}^{\varepsilon t}$ будут D -компонентами $\Psi_{m'}^{\varepsilon+,t}$ или $\Psi_{m'}^{\varepsilon-,t}$ разложения искомого решения $\Psi^{\varepsilon+}$ или $\Psi^{\varepsilon-}$, т.е.

$$\Psi^{\varepsilon\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P^\pm \Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^\ell D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) \Psi_{m'}^{\varepsilon\pm,t}(x, y, \theta).$$

Другой способ построения компонент $\Psi_{m'}^{\varepsilon t\pm}$ основан на формуле

$$\begin{aligned} \Psi_{m'}^{\varepsilon\pm,t}(x, y, \theta) &\equiv \langle D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^t) | P^\pm \Psi^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = \\ &= [\Psi_{m'}^{\varepsilon t}(x, y, \theta) \pm \sigma(-1)^{m'} \Psi_{m'}^{\varepsilon t}(x, y, \pi - \theta)], \end{aligned}$$

следующей из определений (8), (33) и равенств

$$P_{jk} D_{mm'}^\ell(\omega^t) = (-1)^\ell D_{m,-m'}^\ell(\omega^t), \quad P_{jk} \theta = \pi - \theta, \quad t = x, y.$$

Стоит отметить, что исследованные разложения (69) и (70) решения Ψ^ε порождают аналогичные представления его фаддеевской компоненты Ψ_i^ε ,

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^\infty x^n \sum_{m'=\mu(\sigma)}^\ell D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^x) \sum_{a=m'}^{\ell+n-\mu(\sigma)} \Psi_{iam'}^{n\varepsilon x}(y) \Theta_{am'}(u), \quad (83)$$

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=\mu(\sigma)}^\infty x^n \sum_{m'=\mu(\sigma)}^\ell D_{mm'}^{\ell\sigma*}(\omega^y) \sum_{b=m'}^n \Psi_{ibm'}^{n\varepsilon y}(y) \Theta_{bm'}(u). \quad (84)$$

Чтобы убедиться в этом, сначала нужно в уравнение Фаддеева (3) для Ψ_i^ε подставить Ψ_i^ε в виде анзаца (83) или (84), заменить V_i рядом (5), а Ψ^ε – рядом (69) или (70), затем спроецировать полученное уравнение на D -базис (8) и вывести для искомым Θ -компонент $\Psi_{iam'}^{n\varepsilon t}(y)$, $t = x, y$, рекуррентные цепочки уравнений. Например, в случае $t = y$ получится цепочка

$$\begin{aligned} [b(b+1) - (n+2)(n+3)] \Psi_{ibm'}^{n+2,\varepsilon y}(y) &= -q \Psi_{bm'}^{n+1,\varepsilon y}(y) - \sum_{p=0}^n V_{ip} \Psi_{b'm'}^{n-p,\varepsilon y}(y) + \\ &+ y^{-2} \sum_{m''=m'\pm 1} \gamma_{m'm''}^{\ell\sigma} q_{m'm''}^b \Psi_{ibm''}^{n\varepsilon y}(y) - [h_{bm'}^y(y) - V^{00}(y)] \Psi_{ibm'}^{n\varepsilon}(y), \end{aligned}$$

разрешимость которой несложно доказать по индукции. Потом можно выразить компоненты $\Psi_{ibm'}^{n\varepsilon y}$ через найденные компоненты $\Psi_{bm'}^{n\varepsilon y}$ и построить асимптотику ряда (84). Это и предполагается сделать в дальнейшем.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты работы. Было показано, что в случае центральных взаимодействий (5) довольно широкого класса общее Ψ и физическое Ψ^ε регулярные решения уравнения Шредингера (2) вблизи точки парного удара являются рядами (21), (39) и (42), (69), (70) по целым степеням x . Ключевые для построения таких рядов компоненты $\Psi_{b\beta}^n$, $\Psi_{ab}^{n\varepsilon}$ и $\Psi_{bm'}^{n\varepsilon y}$ удалось подчинить простым цепочкам алгебраических уравнений (30), (43) и (79), рекуррентных по индексу n и не зацепляющихся при данном n по индексу b , индексам a, b или b, m' . Предложенная редукция исходного шестимерного уравнения Шредингера (2) к таким цепочкам позволила вывести в явном виде асимптотические формулы (47)–(49) и (76), (81) бисферических Ψ_{ab}^ε и D -компонент $\Psi_{m'}^{\varepsilon t}$, $t = x, y$, физического решения Ψ^ε вплоть до слагаемых $O(x^4)$ и $O(x^3)$. Как выяснилось, из этих формул следуют и ранее неизвестные связи (50)–(52), (77), (82), и соотношения (10)–(13), доказанные другими авторами [6], [7], [12]–[14], причем в частном случае чисто кулоновских парных взаимодействий (4). В заключение отметим, что выбор системы S^y в качестве “подвижной” представляется оптимальным для построения D -компонент физического решения Ψ^ε вблизи точки парного удара. После того как последовательно найдены компоненты $\Psi_{bm'}^{n\varepsilon y}$ и $\Psi_{m'}^{\varepsilon y}$, все отвечающие им в системе S^x компоненты, в том числе и бисферические, можно найти по доказанным формулам (65)–(68).

Список литературы

- [1] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
- [2] V. V. Kostykin, A. A. Kvitsinsky, S. P. Merkuriev. Few-Body Syst. 1989. V. 6. P. 97.
- [3] Д. А. Варшолович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975.
- [4] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974.
- [5] С. И. Виноцкий, Л. И. Пономарев. ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 1336.
- [6] В. И. Коробов. ЯФ. 1989. Т. 50. С. 1595.
- [7] V. I. Korobov, I. V. Puzynin, S. I. Vinitzky. Muon Catalyzed Fusion. 1992. V. 7. P. 63.
- [8] Г. И. Марчук. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
- [9] P. M. Prenter. Splines and Variational Methods. N. Y.: Wiley, 1975.
- [10] К. Вильдермут, Я. Тан. Единая теория ядра. М.: Мир, 1980.
- [11] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
- [12] T. Kato. Commun. Pure and Appl. Math. 1957. V. 10. P. 151.
- [13] W. A. Bingel. Z. Naturforsch. A. 1963. V. 18. P. 1249.
- [14] R. T. Pack, W. B. Brown. J. Chem. Phys. 1966. V. 45. P. 556.
- [15] F. T. Smith. J. Chem. Phys. 1959. V. 31. P. 1352.
- [16] В. И. Смирнов. Курс высшей математики, Т. 3. Ч. 1, 2. М.: Наука, 1974.
- [17] E. S. Chang, U. Fano. Phys. Rev. A. 1972. V. 6. P. 173.

Поступила в редакцию 25.IV.2002 г.,
после доработки 18.XII.2002 г.