Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Ширков, К фурье-преобразованию эффективной функции связи, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 1, 3–19

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf217>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:08:41

© 2003 г.

Д. В. Ширков*

К ФУРЬЕ-ПРЕОБРАЗОВАНИЮ ЭФФЕКТИВНОЙ ФУНКЦИИ СВЯЗИ

Рассматриваются интегральные преобразования ренорминвариантной функции связи КХД. Особое внимание уделено преобразованию Фурье, т.е. переходу от пространственно-временной картины к представлению энергии-импульса. Наше первое заключение состоит в том, что условие возможности такого перехода представляет еще один аргумент против реальности существования нефизических сингулярностей, наблюдаемых в пертурбативной КХД. Второе сводится к способу “перевода” некоторых сингулярных “длинноволновых” асимптотик в инфракрасную область переданных импульсов, который следует проводить с учетом теоремы Таубера. Это замечание имеет отношение к недавним результатам по асимптотическому поведению эффективной функции связи КХД, полученным коллаборацией “ALPHA” на основе численных решеточных симуляций.

Ключевые слова: тауберова теорема, ИК-поведение в КХД, преобразование Фурье.

*Посвящается 50-летию безвременно ушедшего
Никиты Алексеевича Свешникова, моего ученика и друга*

1. ИНВАРИАНТНАЯ ФУНКЦИЯ СВЯЗИ В РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

В современных квантово-полевых вычислениях, как правило, выражают наблюдаемые и некоторые другие вспомогательные, инвариантные (или ковариантные) относительно преобразований ренормализационной группы (РГ), объекты через *инвариантную функцию связи* $\bar{\alpha}(Q^2)$ (называемую также *эффективной* или *бегущей константой связи*¹⁾), которая является действительной функцией действительного положительного аргумента $Q^2 \equiv \mathbf{Q}^2 - Q_0^2$ – квадрата переданного импульса.

Понятие инвариантной связи (ИС) первоначально было введено²⁾ (см., например, работы [1], а также главу “Ренормализационная группа” в монографии [2]) в виде произ-

---

¹⁾ Ввиду явной семантической абсурдности последнего выражения мы используем термин *инвариантная функция связи*, а также *инвариантная* или *эффективная связь*.

²⁾ С использованием термина “инвариантный заряд” (электрона), естественного в контексте КЭД.

---

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: shirkovd@thsun1.jinr.ru

ведения *действительных* констант z_i , входящих в конечные перенормировочные преобразования Дайсона

$$D_i(\dots, \alpha) \rightarrow D'_i(\dots, \alpha') = z_i^{-1} D_i(\dots, z_3 \alpha), \quad \alpha \rightarrow \alpha' = z_3 \alpha, \quad (1)$$

где пропагаторы $D_i(\dots, \alpha) = D_i(Q, m, \mu; \alpha)$ обычно берутся в импульсно-энергетическом представлении. Здесь ИС выражается через скалярные (т.е. лоренц-инвариантные) квантово-полевые амплитуды, взятые также в импульсном представлении. Так, например, в КЭДИС

$$\bar{\alpha}(Q^2) \equiv \alpha d\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}; \alpha\right),$$

где d – поперечная амплитуда фотонного пропагатора, является действительной в евклидовой области. В КХДИС $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ обычно определена подобным образом в виде произведения параметра взаимодействия α_s и подходящих скалярных пропагаторных и вершинных амплитуд (см., например, работу [3] и приведенные в ней ссылки).

Эта ИС используется для параметризации ренормализационно-инвариантных величин, в том числе наблюдаемых. Для этого следует взять интересующий нас объект в соответствующем представлении. В частности, через $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ можно выразить лишь величину, представленную в импульсном представлении. Более того, последняя, для того чтобы быть представимой через действительную функцию $\bar{\alpha}_s(Q^2)$, сама должна быть действительной, т.е. быть функцией переменной $Q^2 > 0$ в евклидовой области.

Между тем некоторые наблюдаемые, подобные эффективным поперечным сечениям рассеяния, зависят от другого лоренц-инвариантного аргумента s – квадрата энергии в системе центра масс. Как хорошо известно, поляризационный оператор $\Pi(Q^2)$, представленный в виде интеграла Коши, доставляет нам техническую возможность интегральной связи между функциями переменных Q^2 и s . Его логарифмическая производная, известная как функция Адлера, определяется через интеграл

$$D(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s + Q^2)^2} R(s), \quad (2)$$

полученный дифференцированием спектрального представления Челлена–Лемана для $\Pi(Q^2)$. Здесь $R(s)$ – мнимая часть поляризационного оператора – в силу оптической теоремы пропорциональна полному эффективному поперечному сечению, являющемуся наблюдаемой величиной.

Ниже мы будем использовать соотношение (2) как основу для определения интегральной операции $\mathbb{D}$, преобразующей действительную функцию $M(s)$ положительного (времениподобного) аргумента в другую действительную функцию $E(Q^2)$ положительного действительного (пространственноподобного) аргумента Q^2 (см. ниже соотношение (7)).

Введем более общее линейное интегральное преобразование с ядром $K(x)$, зависящим от одного аргумента:

$$f(x) \rightarrow F(y) = \mathbb{L}[f](y) = \int_0^\infty d(xy) K(xy) f(x), \quad (3)$$

и включающим различные виды одномерного преобразования Фурье (обычное, Лапласа, синус- и косинус-преобразования Фурье и некоторые другие, например с ядром $K(x) \sim J_1(x)x^2$, которое можно получить из 4-мерного преобразования Фурье) и, при $K(x) = (1+x^2)^2$, только что упомянутое *преобразование Адлера* $\mathbb{D}$, определенное ниже соотношением (7).

Раздел 2 мы начинаем с рассмотрения взаимоотношения между РГ-инвариантностью и интегральным преобразованием. Наш первый явный пример, взятый из так называемой аналитической теории возмущений (АТВ), относится к переходу из минковской части импульсно-энергетического многообразия в соответствующую евклидову область. Затем рассматривается переход из *представления расстояний* (трехмерного пространства координат) в общепринятое представление (переданных) импульсов с помощью одномерного синус-преобразования Фурье.

Далее в разделе 3 мы обращаем особое внимание на соотношение между асимптотическим поведением на *больших расстояниях* и *инфракрасной* (ИК) асимптотикой КХД, что приводит нас к замечанию по поводу возможной интерпретации в ИК-области некоторых недавних результатов коллаборации “ALPHA”.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2.1. РГ-инвариантность и интегральные преобразования. Прежде всего отметим, что преобразование $\mathbb{L}$ совместно с РГ-преобразованием. Так, например, пусть (в безмассовом случае) исходная функция $f(x/\mu; \alpha)$ инвариантна по отношению к РГ-преобразованию

$$R_\tau: \{\mu^2 \rightarrow (\mu')^2 = \mu^2 \tau; \quad \alpha \rightarrow \alpha' = \bar{\alpha}_{\text{tr}}(\tau, \alpha)\}. \quad (4)$$

Тогда ее интегральный образ $F(y\mu; \alpha) = \mathbb{L}[f](y)$ будет инвариантным по отношению к тому же самому РГ-преобразованию (4) – и наоборот – с *той же самой функцией преобразования* $\bar{\alpha}_{\text{tr}}$, удовлетворяющей функциональному уравнению

$$\bar{\alpha}(\theta\tau, \alpha) = \bar{\alpha}(\theta, \bar{\alpha}(\tau, \alpha)), \quad (5)$$

вытекающему из группового закона сложения $R_\theta R_\tau = R_{\theta\tau}$. Отметим, что из этого уравнения для функции $\bar{\alpha}_{\text{tr}}$ следует каноническое условие нормировки

$$\bar{\alpha}_{\text{tr}}(1, \alpha) = \alpha, \quad (6)$$

отвечающее тождественному преобразованию R_1 .

Соотношение (2) обычно рассматривается как определение функции Адлера D . Вместо этого, однако, мы будем считать его определением интегральной операции $\mathbb{D}$, преобразующей функцию $M(s)$ положительного действительного аргумента s в другую функцию $E(Q^2)$ положительного действительного аргумента Q^2 :

$$M(s) \rightarrow \mathbb{D}[M](Q^2) \equiv Q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s+Q^2)^2} M(s) = E(Q^2). \quad (7)$$

При этом обратная операция $\mathbb{R} = [\mathbb{D}]^{-1}$ представима с помощью контурного интеграла (более подробно об этом см., например, в работах [4], [5]).

Преобразования $\mathbb{D}$ и $\mathbb{R}$ сохраняют РГ-инвариантность. Так, например, они преобразуют ренормализационно-инвариантную функцию $M(s/\mu^2; \alpha)$ в другую инвариантную функцию $E(Q^2/\mu^2; \alpha)$ и наоборот. Первый из этих инвариантов M должен быть представим в виде функции от подходящей “минковской” инвариантной связи $\alpha(s)$, тогда как другой инвариант E – от обычной “евклидовой” функции связи $\bar{\alpha}(Q^2)$. Это, в частности, означает, что, отправляясь от обычной функции связи КХД $\bar{\alpha}_s(Q^2)$, посредством операции $\mathbb{R}$ можно определить³⁾ эффективную функцию связи КХД во времениподобной (минковской) области $\alpha_M(s) = \mathbb{R}[\bar{\alpha}_s](s)$ через $\bar{\alpha}_s(Q^2)$, инвариантную функцию связи КХД, первоначально определенную в евклидовой области.

В качестве другого примера возьмем физическую амплитуду A , зависящую от двух лоренц-инвариантных кинематических аргументов s и t . Положим, что она также ренормализационно-инвариантна: $A(s, t; \mu, \alpha) = A(s, t; \mu', \alpha')$. Здесь возникают две возможности. Первая связана с интегральным преобразованием по отношению лишь к одному из аргументов, подобным преобразованию эйконала $F(s, t) \rightarrow \Phi(s, b)$. Новая амплитуда Φ имеет трансформационные РГ-свойства, подобные свойствам F . Как и в общем случае нескольких кинематических переменных, РГ-свойства F и Φ не оказываются особенно полезными.

Однако положение меняется при интегральном преобразовании второго типа, вовлекающем функцию отношения обеих переменных $\varphi(s/t)$. Такое преобразование

$$A(s, t) \rightarrow A_k(s) = \int_0^\infty A(s, t) K_{(k)}\left(\frac{s}{t}\right) d\varphi\left(\frac{s}{t}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

отображает исходную функцию двух переменных на функцию (набор функций) $A_k(s)$ одного аргумента, которая(ые) является(ются) РГ-инвариантной(ыми). Проекция на парциальные волны и моменты структурных функций доставляют примеры такого рода.

Еще один пример интегрального преобразования “одноаргументной” функции, совместного с РГ-инвариантностью, дает преобразование Фурье, которое является частным случаем линейного преобразования (3). Оно связывает функцию $f(r)$ пространственно-временного лоренц-инвариантного аргумента $r = \sqrt{\mathbf{r}^2 - t^2}$ с функцией $F(Q)$ инварианта $Q = \sqrt{Q^2} = \sqrt{\mathbf{Q}^2 - Q_0^2}$ импульсно-энергетического представления.

Известно, что преобразование Дайсона (1), реализующее свойство самоподобия [6] уравнений Швингера–Дайсона, может, на равных основаниях с энергетически-импульсным (как в (1)), формулироваться также и в пространственно-временном представлении, т.е. для функции вида $D(\dots, \alpha) = \tilde{D}(x, m, \mu; \alpha)$, $x = \{\mathbf{r}, t\}$.

В контексте КЭД последнее представление⁴⁾ было использовано Дираком в 30-х годах при обсуждении эффектов поляризации вакуума в терминах *эффективного заряда электрона* [7]

$$\bar{e}_D(r) = e_0 \left\{ 1 - \frac{\alpha_0}{3\pi} \ln \frac{r}{r_e} \right\}, \quad \alpha_0 = \frac{e_0^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137.0360}, \quad r_e = \frac{h}{m_{ec}}, \quad (8)$$

³⁾ Однако на практике нефизические сингулярности пертурбативной $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ препятствуют выполнению необходимого интегрирования. Более подробно этот вопрос обсуждается в работе [5].

⁴⁾ Мы будем именовать его *представлением расстояний*.

введенного им в виде пространственного распределения электрического заряда вокруг точечного “голового” электрона.

В наше время аналогичный объект – эффективная функция связи КХД $\bar{g}^2(L)$, являющаяся функцией пространственного размера решетки L , – был введен [8] и использован [9]–[12] в работах коллаборации “ALPHA”.

Некоторые другие примеры взаимоотношения между интегральными преобразованиями и РГ-симметриями в задачах классической и математической физики читатель может найти в недавнем обзоре Ковалева [13] (см., в частности, пример 2 на с. 358 и имеющиеся там ссылки).

Вопрос соответствия между формулировками РГ в различных представлениях имеет два аспекта. Один из них относится к основным объектам, т.е. к формулировке РГ-преобразований. Второй связан с корреляцией этих объектов через подходящие интегральные преобразования.

Согласно терминологии, используемой в разделе 48.5 книги [2] и в работе [14], инвариантную функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению (5) и каноническому условию нормировки, следует именовать *эффективной связью* (ЭС). Случаю инвариантной функции $\bar{\alpha}_N$ с более общим условием нормировки

$$\bar{\alpha}_N(1, \alpha) = N(\alpha) \neq \alpha$$

отвечает термин *инвариантная связь*. Последняя, в отличие от ЭС, не может использоваться в качестве функции преобразования константы связи в РГ-преобразовании (4). В общем случае интегральное преобразование (3) отображает ЭС $\bar{\alpha}(x)$ на некоторую РГ-инвариантную функцию $A(y)$, являющуюся ИС, а не ЭС.

В этой связи возникают следующие вопросы:

1. Как явно определить $\bar{\alpha}$ и ее интегральный образ A для данной модели КТП?
2. Как выразить их друг через друга?
3. Какую из них можно использовать в роли функции РГ-преобразования α_{tr} ?

“Немедленные” ответы:

1) использовать обычный алгоритм с пертурбативными бета-функциями для получения $\bar{\alpha}$ и A ,

2) соотнести их с помощью подходящего преобразования (3)

– оказываются несовместимыми друг с другом.

2.2. От представления энергии в с.п.м. к представлению переданного импульса. Эта ситуация может быть разъяснена с помощью известных ответов на те же самые вопросы для интегрального преобразования (7). Рассмотрим частный случай этого преобразования – преобразование функции связи

$$\alpha(s) \rightarrow \mathbb{D}[\alpha](Q^2) \equiv Q^2 \int_0^\infty \frac{ds}{(s + Q^2)^2} \alpha(s) = \bar{\alpha}(Q^2). \quad (9)$$

Оказывается невозможным использовать обычную пертурбативную функцию связи КХД $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ в качестве $\bar{\alpha}(Q^2)$ из-за ее нефизических сингулярностей, подобных полюсу Ландау при $Q^2 = \Lambda^2$, наличие которых противоречит интегральному представлению (9). Последнее подразумевает, что функция $\bar{\alpha}(Q^2)$ является свободной от каких-

либо сингулярностей вне разреза $0 > Q^2 > -\infty$. То же самое относится к кандидатуре $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ на роль функции $\alpha(s)$. Одно из возможных решений, предложенное в рамках АТВ (см. [15], [5]), состоит в использовании $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ только в качестве прототипа как для $\bar{\alpha}(Q^2)$, так и для $\alpha(s)$, которые в однопетлевом приближении при

$$\bar{\alpha}_s^{(1)}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad \Lambda^2 = \mu^2 e^{-1/(\beta_0 \alpha_s)}, \quad (10)$$

имеют вид

$$\alpha^{(1)}(s) = \frac{1}{\pi\beta_0} \arccos \frac{L_s}{\sqrt{L_s^2 + \pi^2}} \Big|_{L_s > 0} = \frac{\arctg(\pi/L_s)}{\pi\beta_0}, \quad L_s = \ln \frac{s}{\Lambda^2}, \quad (11)$$

и

$$\bar{\alpha}^{(1)}(Q^2) = \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{1}{L} - \frac{\Lambda^2}{Q^2 - \Lambda^2} \right], \quad L = \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}. \quad (12)$$

Обе эти функции, соответствующие (10) в пределе слабой связи, являются свободными от нефизических сингулярностей монотонными функциями, связанными между собой преобразованием (9) $\bar{\alpha}(Q^2) = \mathbb{D}[\alpha](Q^2)$ и ему обратным.

Как было отмечено в работе [5], переход от выражения (10) для $\bar{\alpha}_s^{(1)}(Q^2)$ к $\alpha(s)$ и $\bar{\alpha}(Q^2)$ может быть представлен как следствие преобразования от обычной константы связи КХД α_s к новым константам α_M и α_E :

$$\alpha_s \rightarrow \alpha_M = \frac{1}{\pi\beta_0} \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2 \beta_0^2 \alpha_s^2}} = \frac{1}{\pi\beta_0} \arctg(\pi\beta_0 \alpha_s)$$

и

$$\alpha_s \rightarrow \alpha_E = \alpha_s + \frac{1}{\beta_0} (1 - e^{1/(\beta_0 \alpha_s)})^{-1}.$$

Тем самым переход от минковской функции связи $\alpha(s)$ к евклидовой $\bar{\alpha}(Q^2)$ можно представлять индуцированным следующим преобразованием константы связи:

$$\alpha_M \rightarrow \alpha_E(\alpha_M) = \frac{1}{\pi\beta_0} \operatorname{tg}(\pi\beta_0 \alpha_M) + \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{1 - e^{\pi \operatorname{ctg}(\pi\beta_0 \alpha_M)}} \quad (13)$$

при $0 < \alpha_M \leq 1/\beta_0$ и $0 < \alpha_E \leq 1/\beta_0$.

В свою очередь, отсюда следует, что интегральное преобразование (9) действительно изменяет нормировку функции связи и, в частности, отображает ЭС на ИС.

2.3. Импульсное представление и представление расстояний. Обратимся теперь к преобразованию Фурье. Нам окажется удобным использовать модифицированное синус-преобразование Фурье⁵⁾ вида

$$\mathbb{F}_{\sin/r}[f](Q) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dr}{r} \sin(Qr) f(r) = F(Q), \quad (14)$$

⁵⁾ Оно является частным случаем преобразования (3) при $K(z) = 2 \sin z/(\pi z)$, а также вытекает из обычного трехмерного преобразования

$$\bar{\psi}(Q) = (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{r} \psi(r) e^{i\mathbf{Q}\mathbf{r}} \quad \text{при} \quad F(Q) = Q^2 \bar{\psi}(Q), \quad f(r) = r\psi(r).$$

совместное с РГ-преобразованием, а также ему обратное

$$\mathbb{F}_{\sin/r}^{-1}[F](r) \equiv r \int_0^\infty dQ \sin(Qr) F(Q) = f(r).$$

Вернемся теперь к выражению (8), возведя его в квадрат и переписав в более современных и общих обозначениях:

$$\alpha_D^{\text{pt}}\left(\frac{r^2}{r_\mu^2}, \alpha_\mu\right) = \alpha_\mu \left\{ 1 - \frac{\alpha_\mu}{3\pi} \ln \frac{r^2}{r_\mu^2} \right\}. \quad (15)$$

Здесь r_μ – некоторое отсчетное расстояние, входящее в соотношение соответствия: $\alpha_\mu = \alpha_0$ при $r_\mu = r_e$. Эта *пертурбативная ЭС* в представлении расстояний $\alpha_D^{\text{pt}}(\rho^2, \alpha)$ может быть связана преобразованием

$$\bar{\alpha}_{\text{pt}}\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha\right) = \mathbb{F}_{\sin/r}[\alpha_D^{\text{pt}}](Q^2)$$

с более привычной пертурбативной функцией связи КЭД в импульсном представлении

$$\bar{\alpha}_{\text{pt}}\left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha_\mu\right) = \alpha_\mu \left\{ 1 + \frac{\alpha_\mu}{3\pi} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} \right\}, \quad (16)$$

где $\mu = c_E/r_\mu$, $c_E = e^{-\mathbf{C}} = 0.5614$. Выражение (16) может быть также получено из (15) заменой аргумента

$$r \rightarrow \frac{c_E}{Q}, \quad (17)$$

которая близка к соотношению квантово-механического соответствия $r \rightarrow 1/Q$, отличающаяся от него лишь корректировкой шкалы Q . Заметим, что положительный эффект корректировочного фактора c_E четко виден на рис. 2 (см. ниже).

В полной аналогии с представленным выше примером обе функции $\bar{\alpha}^{\text{RG}}$ и α_D^{RG} , будучи явно определены (в знакомой форме суммы геометрической прогрессии) обычной РГ-процедурой с использованием выражений (15) и (16) для нахождения бета-функций, не связаны между собой преобразованием (14). Вместо этого они оказываются связанными более сложным соотношением $\bar{\alpha}^{\text{RG}}(Q) = \Psi\{\mathbb{F}_{\sin}[\alpha_D^{\text{RG}}](Q)\}$.

Более того, вообще говоря, преобразование Фурье отображает ЭС на некоторую инвариантную функцию связи, которая не может быть использована как α_{tr} в (5). Так, например, отправляясь от пертурбативной ЭС в представлении расстояний

$$\alpha_D^{\text{pt}}(\rho^2, \alpha) = \alpha - \beta(\alpha) \ln \rho^2 + \alpha \left(\frac{\alpha}{3\pi} \right)^2 \ln^2 \rho^2, \quad \rho^2 = \frac{r^2}{r_\mu^2}, \quad \alpha = \alpha_\mu, \quad (18)$$

в результате использования синус-преобразования Фурье (14) получим

$$\bar{\alpha}_{\text{pt}}(q^2, \alpha) = \alpha + \beta(\alpha) \ln q^2 + \alpha \left(\frac{\alpha}{3\pi} \right)^2 \{\ln^2 q^2 + \Delta_2\}, \quad q^2 = \frac{Q^2}{\mu^2} = \left(\frac{Q r_\mu}{c_E} \right)^2, \quad (19)$$

причем $\Delta_2 = \pi^2/12$. Поэтому $\bar{\alpha}(1, \alpha) = \alpha + \alpha(\alpha/(3\pi))^2 \Delta_2 = \alpha' \neq \alpha$ и $\bar{\alpha}(q^2, \alpha)$ представляет собой ИС⁶⁾. Переходом к другой константе связи $\alpha \rightarrow \alpha'$ она может быть преобразована (см. раздел 3 работы [14]) в ЭС $\bar{\alpha}'(q^2, \alpha')$. Это обстоятельство может оказаться существенным в случае сильной связи в ИК-области.

Отметим также, что логарифмические члены в (18) и (19) приводят к суммам геометрических прогрессий с аргументами логарифмов, связанными соотношением (17).

3. АСИМПТОТИКА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЙ И ИК-АСИМПТОТИКА

3.1. Тауберова теорема. Обратимся теперь к частному вопросу о степени корреляции между асимптотиками функций f и F , связанных преобразованием Фурье.

Использование подобных корреляций обычно в квантовой механике, где зачастую применяют правило *квантово-механического соответствия*

$$r \rightarrow \frac{1}{Q}, \quad (\text{QMC})$$

которое в ИК-пределе эквивалентно условию

$$F(Q) \sim f(Q^{-1}) \quad \text{при} \quad Q \rightarrow 0. \quad (20)$$

Последнее свойство может быть эвристически понято путем замены переменной интегрирования $r \rightarrow x = rQ$ общего линейного преобразования (3):

$$F(Q) = \int_0^\infty \frac{dx}{x} K(x) f\left(\frac{x}{Q}\right). \quad (3a)$$

Однако для более строгого вывода соотношения (20) следует конкретизировать асимптотическое поведение функции $f(r)$ при $r \rightarrow \infty$, наложив на него некоторое ограничение. Упрощая ситуацию, можно сформулировать следующую *тауберову теорему* (здесь символ “ $\sim$ ” означает “ведет себя подобно”)⁷⁾:

ТЕОРЕМА. Если функция $f(r)$ асимптотически удовлетворяет условию сепарбельности

$$f(kr) \sim C\phi(r)\varrho(k) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad C \neq 0, \quad (S)$$

тогда, при выполнении некоторых дополнительных условий, ее фурье-образ обладает свойством

$$F(Q) \sim \varrho\left(\frac{1}{Q}\right) \quad \text{при} \quad Q \rightarrow 0. \quad (T)$$

⁶⁾ Отметим, что это обстоятельство оказывается несущественным (так же как и для преобразования (13)) в случае слабой связи на однопетлевом и двухпетлевом уровнях.

⁷⁾ Первоначально тауберовыми теоремами назывались утверждения, связывающие свойства суммируемости и сходимости рядов. Позднее, в середине XX столетия, этот термин стал использоваться применительно к асимптотическим свойствам функций, связанных интегральными преобразованиями. Мы приводим лишь упрощенную формулировку этой важной теоремы для случая преобразования типа Фурье, ее набросок, достаточный для наших приложений. Более полное и строгое изложение этого материала читатель может найти в главе 3 монографии [16] (см. также теорему 4 в разделе 14 работы [17]).

Последнее свойство, с некоторыми оговорками, следует из уравнения (3а).

Теперь, для некоторого допустимого класса функций $\varrho(k)$, удовлетворяющих условию (S), например для степенных и/или логарифмических функций

$$f(r) \sim \varrho(r) \sim r^\beta (\ln r)^\gamma (\ln \ln r)^\delta \dots, \quad r \rightarrow \infty, \quad (21)$$

оказывается возможным получить из (Т) правило соответствия (20).

3.2. Примеры. Рассмотрим несколько простых примеров, приведенных в таблице.

	$f(r)$	$F(Q) = \mathbb{F}_{\sin/r}[f]$	S_{LR}^f	$(20)_{\text{IR}}$
$\{*\}$	$rF(r)$	$\frac{2f(Q)}{\pi Q}$	$r \rightarrow \infty$	$Q \rightarrow 0$
$\{1\}$	$r^\nu, 0 \leq \nu < 1$	$\frac{2}{\pi\nu} \sin(\frac{\pi\nu}{2}) \Gamma(1+\nu) Q^{-\nu}$	+	+
$\{2\}$	$\ln r$	$\ln Q^{-1} - \mathbf{C}, \mathbf{C} = 0.5772$	+	+
$\{3\}$	$(\ln r)^n, n \geq 2$	$(\ln Q^{-1} - \mathbf{C})^n + \Delta_n$	+	+
$\{4\}$	$\frac{r^2}{r^2+a^2}$	$e^{-aQ}, a \geq 0$	+	+
$\{5\}$	$e^{-ar}, a \geq 0$	$\frac{2}{\pi} \arctg(\frac{Q}{a})$	—	—

В двух правых колонках отмечено (не)соответствие поведения функции $f(r)$ при $r \rightarrow \infty$ условию (S) тауберовой теоремы, а также (не)выполнение условия (QMC) лишь в ИК-области в виде (20). При этом символы “+” и “—” оказываются полностью коррелированными.

Как следует из приводимой таблицы, в соответствии с (21) класс допустимых функций оказывается довольно узким. Он не включает, например, тригонометрические и показательные $\sim e^{ar}$ функции. Только функция из первой строки $F_{\{1\}}$ отвечает (с точностью до множителя!) правилу (QMC) на всем интервале изменения аргумента. Уже выражение из второй строки $F_{\{2\}} = \ln(Q^{-1}) - \mathbf{C}$ (где $\mathbf{C}$ – постоянная Эйлера), удовлетворяющее условию тауберовой теоремы при $Q \rightarrow 0$, вообще говоря, отличается от $f_{\{2\}}(1/Q)$, особенно в области $Q \simeq 1$. То же самое относится к строке $\{3\}$, где константа Δ_2 уже встречалась выше в (19).

Следующая строка $\{4\}$ содержит пример функции, удовлетворяющей тауберovu условию (S), но существенно нарушающей правило (QMC) для поведения функции $F_{\{4\}}$ в целом. Сравнение поведения фурье-образа $F_{\{4\}}(Q) = e^{-aQ}$ с “QMC-преобразованной” исходной функцией $f_{\{4\}}(1/Q) = (1 + a^2 Q^2)^{-1}$ оказывается весьма поучительным. Как видно на рис. 1, относительная погрешность, будучи уже при $aQ \geq 0.2$ величиной порядка 15%, быстро возрастает и при $aQ \simeq 1$ достигает уровня 30%.

Лишь функция $f_{\{5\}}$ не удовлетворяет тауберовой теореме, несмотря на то что предельные значения $f_{\{5\}}(\infty) = F_{\{5\}}(0) = 0$ совпадают.

Для того чтобы приблизиться к более реалистическому для КХД случаю, рассмотрим синус-преобразование Фурье (14) для класса функций $f(Q)$, удовлетворяющих спектральному представлению Челлена–Лемана

$$f(q) \rightarrow F(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dQ}{Q} \sin(Qr) \int_0^\infty \frac{d\sigma \rho(\sigma)}{\sigma + Q^2} \quad (22)$$

Рис. 1. Поведение “QMC-преобразованной” функции $f_{\{4\}}(1/Q) = (1 + a^2 Q^2)^{-1}$ в сравнении с ее синус-фурье-образом $F_{\{4\}}(Q) = e^{-aQ}$.

со спектральной плотностью $\rho(\sigma)$. Меняя порядок интегрирования и интегрируя по Q с помощью строки $\{4\}$ из таблицы, получаем

$$F(r) = \int_0^\infty \frac{\rho(\sigma) d\sigma}{\sigma} (1 - e^{-r\sqrt{\sigma}}). \quad (23)$$

В случае положительной спектральной плотности это выражение определяет монотонно возрастающую функцию r с возможной сингулярностью при $r \rightarrow \infty$.

В качестве конкретного примера рассмотрим “анализированную” функцию связи КХД $\bar{\alpha}(Q^2)$ (соотношение (12) со спектральной плотностью $\rho_{\text{АРТ}}(\sigma) \sim [(\ln \sigma)^2 + \pi^2]^{-1}$), взятую из однопетлевого приближения АТВ [18]. Для $a_{\text{АРТ}} = \beta_0 \alpha_{\text{АРТ}}$ это дает

$$a_{\text{АРТ}}(r) = \int_0^\infty \frac{d\sigma (1 - e^{-r\sqrt{\sigma}})}{\sigma[(\ln \sigma)^2 + \pi^2]} = 1 - I(r), \quad I(r) = \int_0^\infty \frac{e^{-r\sqrt{\sigma}} d\sigma}{\sigma[(\ln \sigma)^2 + \pi^2]}. \quad (24)$$

Интеграл в правой части $I(r)$ напоминает интеграл Рамануджана (см. главу 18.3 в книге [19])

$$R(r) \equiv \int_0^\infty \frac{e^{-rx} dx}{x[(\ln x)^2 + \pi^2]} = 2 \int_0^\infty \frac{e^{-r\sqrt{\sigma}} d\sigma}{\sigma[(\ln \sigma)^2 + 4\pi^2]} = \nu(r) - e^r,$$

выражаемый через специальную трансцендентную функцию $\nu(x)$. Мы используем эту близость для анализа поведения $I(r)$ при $r \rightarrow 0$. Асимптотика функции ν хорошо изучена [19]. Получаем

$$R(r) \rightarrow -1 + \frac{1}{\ln r^2} + O\left(\frac{1}{\ln^2 r^2}\right) \quad \text{при } r \rightarrow 0. \quad (25)$$

Разность

$$\Delta(r) = I(r) - \frac{R(r)}{2} = 3\pi^2 \int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma} \frac{e^{-r\sqrt{\sigma}}}{[(\ln \sigma)^2 + \pi^2][(\ln \sigma)^2 + 4\pi^2]},$$

будучи положительной, исчезает на бесконечности, $\Delta(\infty) = 0$. В то же время $\Delta(0) = 1/4$. Поэтому

$$a_{\text{APT}}(r) \rightarrow \frac{1}{\ln r^2} \text{ при } r \rightarrow 0; \quad a_{\text{APT}}(\infty) = 1. \quad (26)$$

Интересно сравнить монотонную исходную функцию

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\text{an}}(Q^2) &= \beta_0 \bar{\alpha}(Q^2) = \int_0^\infty \frac{\rho_{\text{APT}}(w^2) dw^2}{w^2 + q^2} = \frac{1}{\ln q^2} + \frac{1}{1 - q^2}, \\ a_{\text{an}}(0) &= 1, \quad a_{\text{an}}(Q^2) \rightarrow \frac{1}{\ln q^2} \text{ при } q^2 \equiv \frac{Q^2}{\Lambda^2} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (27)$$

с ее фурье-образом a_D в координатах $r = 1/Q$.

Рис. 2. Поведение АТВ-анализированной функции связи КХД $a_{\text{an}}(Q)$ в сравнении с ее фурье-образом $a_D(1/Q)$, в котором произведена замена аргумента по правилу (QMC). Пунктирная линия представляет фурье-образ $a_D(c_F/Q)$ с модификацией шкалы согласно (17).

Такое сравнение (см. рис. 2) выявляет удивительное подобие функций $a_{\text{an}}(Q^2)$ и $a_D(1/Q)$, которое значительно улучшается при замене $a_D(1/Q)$ на $a_D(c_F/Q)$. В частности, максимальная ошибка, которая для первого случая достигает 30% в области $4 \lesssim Q/\Lambda \lesssim 70$, во втором случае не превышает 10%. Тем самым возникает впечатление, что этот пример представляет собой сильный довод в пользу полезности правила (QMC) и (17) для качественной оценки фурье-образа функций с “правильными”, т.е. соответствующими условию (21), асимптотиками.

К сожалению, это впечатление обманчиво. Так, например, изучение семейства функций

$$f(q^2) = \frac{1}{\ln^2(q^2) + b^2}, \quad q^2 = \frac{Q^2}{\Lambda^2},$$

с “правильными” асимптотиками показывает⁸⁾, что отмеченное на рис. 2 подобие является скорее всего удивительным исключением из общей картины, которая, как правило, не дает даже качественного подобия типа, изображенного на рис. 1.

Таким образом, правило (QMC) в общем случае не является разумной основой для качественной оценки поведения фурье-образа даже для функции, удовлетворяющей условию тауберовой теоремы.

3.3. Функция связи КХД-функционала Шредингера. Для получения непертурбативной информации об ИК-поведении группа “ALPHA” изучает КХД (как в бескварковом варианте, так и с двумя безмассовыми кварковыми ароматами) на решетке и использует для решеточных симуляций так называемый *функционал Шредингера*, определенный на 4-мерном евклидовом пространственно-временном многообразии специальным образом: по трем пространственным измерениям наложены циклические граничные условия, тогда как “временная” координата выделена – значения калибровочных полей на “верхней” и “нижней” крышках отличаются на фазовый фактор, содержащий параметр η . Перенормированная эффективная функция связи α_{SF} определена через производную $\Gamma' = \partial\Gamma/\partial\eta$ эффективного действия, представленного в виде разложения $\Gamma = \alpha^{-1}\Gamma_0 + \Gamma_1 + \alpha\Gamma_2 + \dots$, как функция пространственного размера L многообразия (см. уравнение (2.43) в работе [8] и (8.3) в [10]) $\alpha_{\text{SF}}(L) = \Gamma'_0/\Gamma'$, т.е. как *функция в координатном представлении*.

Полученные на этой основе недавние результаты выявляют чрезвычайно быстрый рост $\alpha_{\text{SF}}(L)$ в области $L \rightarrow \infty$ при $\alpha_{\text{SF}} \simeq 1$. Аналитическая аппроксимация [12] для результатов численных расчетов поведения α_{SF} имеет экспоненциальную форму

$$\alpha_{\text{SF}}(L) \simeq e^{ML}, \quad (28)$$

где $M \simeq 2.3/L_{\text{max}}$, а L_{max} – точка отсчета в области достаточно слабой связи, неявно определяемая условием $\alpha_{\text{SF}}(L_{\text{max}}) = 0.275$, что дает $L_{\text{max}} \sim 1/m_\tau$. При обсуждении ИК-поведения КХД (т.е. области $Q^2 \rightarrow 0$) в работах группы “ALPHA” используется “обычное квантово-механическое” отождествление в виде

$$L \rightarrow \frac{1}{\mu}, \quad (\text{QMC}') \quad (29)$$

причем μ практически рассматривается как импульс нормировки. Такой способ перехода от представления расстояний к импульсному эквивалентен рассмотренному в п. 3.1. Он хорошо работает в УФ-области, поскольку поведение $\sim \ln^{-1} Q^2$ совместно с тауберовой теоремой. Тем не менее в прецизионных оценках, как, например, в оценках связи различных шкал [9]⁹⁾, следует принимать во внимание модификацию шкалы (17). В то

⁸⁾ Частное сообщение А.В. Нестеренко.

⁹⁾ На эту важную работу наше внимание было обращено д-ром У. Волффом, которому автор выражает признательность.

же время быстро возрастающая функция типа (28) не удовлетворяет условию (S) этой теоремы. Поэтому соответствие с ИК-поведением (т.е. при $Q^2 \rightarrow 0$) требует более подробного анализа.

3.4. Представление результатов группы “ALPHA” в ИК-области. Вообще говоря, возможны две разные точки зрения при обсуждении перехода от результатов численных симуляций для функционала Шредингера, проведенных на конечной решетке размером L . С одной стороны, можно считать, что полученные численные результаты и их аналитическая аппроксимация (28) представляют собой основу для некоторого приближения к предельной, непрерывной функции $\alpha_{\text{SF}}(L)$, которая может быть отображена с помощью преобразования Фурье. С другой стороны, поскольку на пространственных границах решетки наложены периодические граничные условия, можно полагать, что ряд Фурье более адекватен, нежели интеграл Фурье.

Ниже мы попытаемся построить фурье-образ в ИК-области для функции $\alpha_{\text{SF}}(L)$, имея в виду обе эти возможности.

Для того чтобы приступить к выполнению интегрирования Фурье, представим полученную коллаборацией “ALPHA” функцию связи в представлении расстояний α_{SF} в виде суммы двух слагаемых

$$\alpha_{\text{SF}}(L) = \alpha_{\text{PT}}(L) + \alpha_{\text{AL}}(L),$$

где α_{PT} – пертурбативный вклад, а α_{AL} – существенно непертурбативная часть.

Поскольку результаты *всех* непертурбативных вычислений в КХД – как численных симуляций на решетке, так и решений уравнений Швингера–Дайсона (УШД) – не обнаруживают каких-либо следов нефизических сингулярностей, мы, с одной стороны, заменим первый пертурбативный член α_{PT} на некоторое регулярное выражение $\alpha_{\text{PT-R}}$, например на АТВ-анализированное (24), или на выражение, подобное таковому из “модели с массивными глюболами” [20] либо полученному из решения УШД [21].

С другой стороны, мы аппроксимируем второе, непертурбативное слагаемое выражением, близким к (28), которое поддается дальнейшему интегрированию:

$$\alpha_{\text{AL}}(L) \simeq \alpha_k(L) = C_k \frac{\pi}{2} \left(\frac{L}{L_m} \right)^k e^{m(L-L_m)}. \quad (29)$$

Здесь $k \geq 1$ – небольшое целое число, а значения параметров $mL_m \simeq 2.0$, m и C_k следуют из решеточных аппроксимаций. Так, например, $C_1 \simeq 0.013$.

Итак,

$$\alpha_{\text{SF}}(L) = \alpha_{\text{PT-R}}(L) + \alpha_k(L). \quad (30)$$

Для фурье-образа регуляризованной $\alpha_{\text{PT-R}}$ мы предположим поведение, связанное с исходной функцией подстановкой (QMC):

$$\bar{\alpha}_{\text{PT-R}}(Q) \equiv \mathbb{F}_{\text{sin}}[\alpha_{\text{PT-R}}](Q) \simeq \alpha_{\text{PT-R}}\left(\frac{1}{Q}\right), \quad (31)$$

с конечным ИК-пределом, подобным (27),

$$\bar{\alpha}_{\text{PT-R}}(0) = C, \quad 0 < C < \infty. \quad (32)$$

Такое предположение выглядит вполне правдоподобным в свете АТВ-примера из п. 3.2 (см. рис. 2).

Для проведения интегрирования (14) с функцией $\alpha_k(L)$ необходимо прибегнуть к регуляризации. Для этого в подынтегральное выражение в правой части (14) мы вводим фактор обрезания¹⁰⁾

$$\exp\{(m + \mu)\theta(L - \xi L_m)(\xi L_m - L)\}, \quad \xi = 2.5 \div 3, \quad \mu \geq 0,$$

с параметрами ξ и μ , регулируемыми “место включения” и интенсивность обрезания.

В итоге искомая функция связи группы “ALPHA” в импульсном представлении выражается в виде суммы трех членов

$$\bar{\alpha}_{\text{SF}}(Q) = \bar{\alpha}_{\text{PT-R}}(Q) + \bar{\alpha}_{k,\text{reg}}(Q) + \bar{\alpha}_{k,\text{sing}}(Q; \mu), \quad (33)$$

причем первый из них определен формулой (31), а остальные могут быть получены (дифференцированием по параметру m) из выражений, соответствующих случаю $k = 1$ в (29) при

$$\bar{\alpha}_{1,\text{reg}}(Q) = \frac{C_1}{L_m} \int_{L_m}^{\xi L_m} dL \sin(QL) e^{mL} = \frac{C_1}{L_m} [f_1(Q, \xi L_m) - f_1(Q, L_m)] \quad (34)$$

и

$$\bar{\alpha}_{1,\text{sing}}(Q; \mu) = e^{m(\xi-1)L_m} \frac{C_1}{L_m} \int_{\xi L_m}^{\infty} dL \sin(QL) e^{\mu(\xi L_m - L)} = \frac{C_1}{L_m} \varphi_1(Q, \xi L_m; \mu), \quad (35)$$

где

$$f_1(Q, L) = e^{mL} \frac{m \sin(QL) - Q \cos(QL)}{m^2 + Q^2}, \quad \varphi_1(Q, L; \mu) = e^{mL} \frac{Q \cos(QL) + \mu \sin(QL)}{\mu^2 + Q^2}.$$

Для периодической функции в результате преобразования возникает ряд, а не интеграл Фурье, и последний член в (33) отсутствует.

Наиболее важной качественной чертой функций f_k и φ_k является их ИК-поведение. Все эти функции стремятся к нулю линейно по $Q \rightarrow 0$. Исключение возникает лишь при $\mu = 0$, когда появляется степенная сингулярность $\varphi_k(Q \rightarrow 0, \dots) \rightarrow 1/Q$.

Комбинируя этот результат с (32), заключаем, что функция $\bar{\alpha}_{\text{SF}}(Q)$ в ИК-асимптотике может иметь либо конечный предел, либо полюс первого порядка (последнее только в случае интегрального преобразования Фурье), в полной противоположности с экспоненциальным ростом типа $\sim e^{m/Q}$, на мысль о котором наводят результаты коллаборации “ALPHA” (мы имеем в виду рис. 3 и 4 из работы [12]).

Отметим, что с более общей точки зрения экспоненциальный рост по L является наиболее сильным из возможных для $\alpha(L)$. В частности, при $\ln \alpha(L) \sim L^\nu$, $\nu > 1$, не имеется известных математических средств для выполнения преобразования Фурье. И наоборот, для ИК-асимптотики $\sim e^{m/Q}$ невозможно совершить обратное преобразование Фурье и “возвратиться” к L -представлению.

¹⁰⁾ Строго говоря, такая экспоненциальная регуляризация соответствует *обобщенному преобразованию Фурье* (см., например, раздел 1.3 в книге [22]).

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Наше первое наблюдение относится к вопросу о существовании нефизических сингулярностей у эффективной функции связи КХД и у некоторых других величин, подобных амплитудам пропагаторов. Эти сингулярности несовместны с интегральными преобразованиями. В частности, известная полюсная особенность при $Q \sim \Lambda \simeq 300\text{--}400$ ГэВ у обычной пертурбативной функции связи КХД $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ препятствует процедуре интегрирования, необходимой для выполнения преобразования Фурье. Это дает нам еще один теоретический *аргумент против существования нефизических сингулярностей в физически содержательных теориях*, подобных КЭД и КХД. Напомним, что *все* непертурбативные вычисления в КХД – как с помощью численных симуляций на решетке, так и на основе решения приближенных УШД – не дают нам каких-либо намеков на наличие нефизических сингулярностей.

Второй результат, основанный на анализе свойств преобразования Фурье, имеет отношение к квантово-механическому правилу соответствия (QMC), связывающему асимптотические поведения функции $f(r)$ при $r \rightarrow \infty$ и ее фурье-образа $F(Q)$ при $Q \rightarrow 0$. Было показано, что это правило, являясь разумным для некоторого допустимого класса асимптотик (степенных и логарифмических), имеет свои жесткие пределы применимости.

Во-первых, даже для функции с допустимой асимптотикой правило (QMC) в области далекой от сингулярности приводит лишь к качественному соответствию, как это видно на рис. 1. Во-вторых, оно совершенно неверно для широкого класса асимптотик (нарушающих условия тауберовой теоремы (S)), включающих экспоненциальные.

В частности, это относится к экспоненциально растущей вместе с размером решетки L эффективной функции связи КХД

$$\alpha_{\text{SF}}(L) \sim e^{mL},$$

наблюдаемой в работах коллаборации “ALPHA” на основе численных решеточных симуляций для функционала Шредингера, которая согласно анализу п. 3.4 в представлении переданного импульса может соответствовать либо

$$\text{конечному, либо} \quad (\text{ALPHA-IRa})$$

$$\text{“слабо сингулярному”} \sim 1/Q \quad (\text{ALPHA-IRb})$$

поведению в ИК-асимптотике. Поэтому упомянутые результаты, будучи правильно перенесены в импульсное представление, в ИК-области могут оказаться качественно близкими к результатам других групп¹¹⁾, которые проводят численные симуляции на решетке для функциональных интегралов, определенных в импульсном представлении, а также решают подходящим образом усеченные УШД.

По нашему мнению, с физической точки зрения имеется по крайней мере два обстоятельства, которые можно отметить в связи с ИК-асимптотикой КХД.

Во-первых, следует помнить, что область $Q \lesssim 500$ МэВ физически отвечает расстояниям $r \gtrsim 10^{-13}$ см, т.е. адронным масштабам, на которых все понятия КХД, подобные

¹¹⁾См., например, работы [21], [23], [24] и короткое обсуждение различий их результатов в [14].

пропагаторам кварков и глюонов, по всей видимости, являются лишенными физического смысла. Даже в более “умеренной области” $0.5 \text{ МэВ} \lesssim Q \lesssim 3 \text{ ГэВ}$, где ЭС КХД оказывается сильной, возникает вопрос о непосредственном физическом смысле пертурбативных функций КХД, включая эффективную функцию связи.

Результаты [21], [23], [24] для ЭС КХД, полученные недавно с помощью численных симуляций на решетке для функциональных интегралов, определенных в импульсном представлении, сформулированы на “обычном языке КТП” с использованием вершинных функций с фиксированной динамикой, как, например, в работах [23], [25] для модели КХД с двумя массивными кварками. В этих работах инвариантная функция связи $\bar{g}(Q^2)$ введена на основе глюон-кварковой вершины $\Gamma_{q-gl}(0; Q^2, Q^2)$ в частной МОМ-схеме при импульсе глюона, равном нулю. Определенная таким образом функция связи КХД имеет обычный для МОМ-схем недостаток – калибровочную зависимость. Тем не менее она может быть непосредственно соотнесена определенной физической ситуации (например, использована в разложении для наблюдаемой с калибровочно-зависимыми коэффициентами).

Во-вторых, уместно соотнести ИК-поведение функций КХД с явлением конфайнмента. Здесь можно обратиться к так называемому условию Куго–Оджима [26], отвечающему условию запрета на “открытый цвет” в асимптотических состояниях. В терминах КХД оно соответствует обращению в нуль констант перенормировки глюонного и кварковых полей, что, в свою очередь, эквивалентно обращению в нуль одетых пропагаторов этих полей в ИК-пределе. Такое поведение, вообще говоря, возможно при нулевом или конечном (см. работу [21]) ИК-пределе эффективной функции связи КХД. Как раз такое поведение было получено в большей части работ по решеточным симуляциям КХД [21], [23], [24]. Совсем недавно оно получило подтверждение в результатах группы Орсе [27] на основе модели инстантонной жидкости, а также, в определенном смысле, в результатах анализа τ -распада [28].

В этом контексте поведение (ALPHA-IRa) представляет вполне разумную возможность корреляции всех результатов решеточных симуляций друг с другом и с условием конфайнмента.

Благодарности. Автор признателен И.А. Арефьевой, В.С. Владимирову, Ю.Н. Дрожжину, Б.И. Завьялову, М. Мюллеру-Пройскеру, С.В. Михайлову, О. Пену и А.А. Славнову за полезные советы, а также А.В. Нестеренко за стимулирующие обсуждения и помощь в численных расчетах. Исследование было частично поддержано грантами РФФИ № 00-15-96691 и 02-01-00601, а также CERN INTAS № 99-0377.

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. ДАН СССР. 1955. Т. 103. С. 203; С. 391; ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 77; N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov. Nuovo Cimento. 1956. V. 3. P. 845.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [3] D. Gross, F. Wilczek. Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1343.
- [4] D. V. Shirkov. Toward the correlated analysis of perturbative QCD observables. Препринт ОИЯИ Е2-2000-46. Дубна: ОИЯИ, 2000; hep-ph/0003242.
- [5] Д. В. Ширков. ТМФ. 2001. Т. 127. С. 3; hep-ph/0012283.

- [6] *В. З. Бланк, В. Л. Бонч-Бруевич, Д. В. Ширков.* ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 265.
- [7] *P. A. M. Dirac.* Theorie du positron. In: Septième Conseil de Physique Solvay: Structure et Propriété des Noyaux Atomiques (Oct. 22–29, 1933). Paris: Gauthier-Villars, 1934. P. 203.
- [8] *M. Lüscher, R. Narayanan, P. Weisz, U. Wolff.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 384. P. 168.
- [9] *ALPHA collaboration.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 437. P. 447; hep-lat/9411017.
- [10] *M. Lüscher.* Advanced lattice QCD. In: Probing the Standard Model of Particle Interactions. Eds. R. Gupta et al. Amsterdam: Elsevier Sc., 1999. P. 229.
- [11] *A. Bode, R. Frezzotti, B. Gehrman et al.* Phys. Lett. B. 2001. V. 515. P. 49; hep-lat/0105003.
- [12] *J. Heitger, H. Simma, R. Sommer, U. Wolff.* Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 2002. V. 106. P. 859; hep-lat/0110201.
- [13] *V. F. Kovalev.* Acta Phys. Slovaca. 2002. V. 52. № 4. P. 353.
- [14] *Д. В. Ширков.* ТМФ. 2002. Т. 132. № 3. С. 484; hep-ph/0208082.
- [15] *K. A. Milton, I. L. Solovtsov.* Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 5295; hep-ph/9611438.
- [16] *В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрозжжинов, Б. И. Завьялов.* Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций. М.: Наука, 1986.
- [17] *А. Г. Постников.* Тр. МИАН. 1979. Т. 144. С. 3.
- [18] *D. V. Shirkov, I. L. Solovtsov.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 1209; hep-ph/9704333.
- [19] *Г. Бэйтмен, А. Эрдейи.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 3. М.: Наука, 1969.
- [20] *Ю. А. Симонов.* ЯФ. 1995. Т. 58. С. 113; *А. М. Бадалян, Ю. А. Симонов.* ЯФ. 1997. Т. 60. С. 714; *Ю. А. Симонов.* ЯФ. 2003. Т. 66. С. 796; hep-ph/0109159.
- [21] *L. Alkofer, L. von Smekal.* Phys. Rep. 2001. V. 353. P. 281; hep-ph/0007355.
- [22] *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.: ОГИЗ, 1946.
- [23] *J. I. Skullerud, A. Kizilersu, A. G. Williams.* Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 2002. V. 106. P. 841; hep-lat/0109027.
- [24] *Ph. Boucaud, J. P. Leroy, J. Micheli et al.* Nucl. Phys. B. Proc. Suppl. 2002. V. 106. P. 266; hep-ph/0110171.
- [25] *J. Skullerud, A. Kizilersu.* JHEP. 2002. V. 0209. P. 013; hep-ph/0205318.
- [26] *T. Kugo, I. Ojima.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1979. V. 66. P. 1.
- [27] *Ph. Boucaud et al.* JHEP. 2003. V. 0304. P. 005.
- [28] *S. L. Brodsky et al.* Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 055008; hep-ph/0212078.

Поступила в редакцию 2.XII.2002 г.