Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев, Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 2, 231–245

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf218>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:43:03

© 2003 г.

Ж. И. Абдуллаев*, С. Н. Лакаев*

АСИМПТОТИКА ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА РАЗНОСТНОГО ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

На трехмерной целочисленной решетке рассматривается гамильтониан $H_\mu(K)$ системы трех бозонов, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Получена асимптотика для числа $N(K, z)$ собственных значений, лежащих ниже $z \leq 0$ оператора $H_{\mu 0}(K)$ по полному квазиимпульсу $K \rightarrow 0$ и спектральному параметру $z \rightarrow -0$.

Ключевые слова: оператор Шредингера, существенный спектр, дискретный спектр, оператор Гильберта–Шмидта, асимптотика.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из замечательных результатов спектрального анализа трехчастичного непрерывного оператора Шредингера является так называемый эффект Ефимова [1]: если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из них имеют резонанс с энергией в нуле, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю. Этот эффект описан в литературе (см. [2], [3]). Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было приведено впервые в работе [4], а затем в работах [5]–[7].

В моделях физики твердого тела [8] и решетчатой теории поля [9] возникают дискретные операторы Шредингера, являющиеся решетчатым аналогом обычного трехчастичного оператора Шредингера в непрерывном пространстве. Для таких операторов также естественно ожидать появления эффекта Ефимова, поскольку, как показывает тщательный анализ этого эффекта [4], за него ответственна “длинноволновая часть” спектра оператора Шредингера, одинаковая в обоих случаях – решетчатом и непрерывном. На физическом уровне это было показано в работах [8], [10].

Хотя дискретный оператор Шредингера системы трех решетчатых частиц ограничен и возмущение в парной задаче – компактный оператор, спектр оператора Шредин-

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: info@samarkand.uz, slakaev@mail.ru

гера для системы трех квантовых решетчатых частиц имеет более сложный характер по сравнению с непрерывным случаем.

В непрерывном случае “двухчастичная” и “трехчастичная” ветви существенного спектра состоят из полуосей $[\kappa, \infty)$, где $\kappa \leq 0$, и пересекаются. Для дискретного оператора Шредингера “двухчастичная” и “трехчастичная” ветви существенного спектра состоят из отрезков конечной длины, причем они могут не пересекаться. Поэтому возникает вопрос: существуют ли собственные значения в лакунах и, если существуют, то конечно ли их число?

В работе [11] рассмотрен трехчастичный дискретный оператор Шредингера $H_\mu(K)$ ($\mu > 0$ – энергия взаимодействия двух частиц, $K \in T^3$ – полный квазиимпульс системы, T^3 – трехмерный тор), описывающий систему трех одинаковых частиц (бозонов), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, при общих предположениях на энергию отдельного бозона $\varepsilon(p)$, $p \in T^3$, и доказано существование эффекта Ефимова.

В работе [12] рассмотрен разностный трехчастичный дискретный оператор Шредингера, т.е. случай $\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p_i)$. Показано, что при нулевом значении полного квазиимпульса ($K = 0$) и некотором $\mu = \mu_0 > 0$ имеет место эффект Ефимова, а при всех $K \in U_\delta^o(0) = \{p \in T^3: 0 < |p| < \delta\}$ и $\mu > 0$ оператор $H_\mu(K)$ имеет лишь конечное число собственных значений, лежащих вне существенного спектра.

Пусть $N(z)$, $z < 0$, – число собственных значений трехчастичного непрерывного оператора Шредингера, лежащих левее точки $z < 0$. В работе [6] получена нижняя оценка

$$\lim_{z \rightarrow -0} \inf \frac{N(z)}{|\ln |z||} = \mathcal{U}_0, \quad 0 < \mathcal{U}_0.$$

Этот результат согласуется с результатами работы [13], где установлена экспоненциальная асимптотика собственных значений, соответствующих сферически-симметричным связанным состояниям. В работе [7] найдена асимптотика

$$\lim_{z \rightarrow -0} \frac{N(z)}{|\ln |z||} = \mathcal{U}_0, \quad 0 < \mathcal{U}_0 < \infty, \quad (1.1)$$

где число $\mathcal{U}_0$ не зависит от потенциалов взаимодействий, а зависит только от отношения масс частиц.

Обозначим через $\tau(K)$ нижнюю грань существенного спектра дискретного трехчастичного оператора $H_{\mu_0}(K)$, $K \in T^3$, и через $N(K, z)$ – число собственных значений этого оператора, лежащих левее точки $z \leq \tau(K)$.

В данной работе для числа $N(0, z)$ собственных значений оператора $H_{\mu_0}(0)$, лежащих левее точки $z < 0$, получена аналогичная (1.1) асимптотика

$$\lim_{z \rightarrow -0} \frac{N(0, z)}{|\ln |z||} = \frac{\lambda_0}{2\pi},$$

где λ_0 – единственное положительное решение уравнения

$$\lambda \sqrt{3} \operatorname{ch} \frac{\pi \lambda}{2} = 8 \operatorname{sh} \frac{\pi \lambda}{6}. \quad (1.2)$$

Доказана конечность числа $N(K, \tau(K))$ для любого $K \in U_\delta^o(0)$. Для числа отрицательных собственных значений оператора $H_{\mu_0}(K)$ установлена асимптотическая формула

$$\lim_{|K| \rightarrow 0} \frac{N(K, 0)}{|\ln |K||} = \frac{\lambda_0}{\pi},$$

которая характерна только для решетчатых систем и не имеет аналогов в непрерывном случае.

Кроме того, показано отсутствие собственных значений дискретного оператора Шредингера $H_\mu(0)$ при “малых взаимодействиях μ ($\mu \ll 1$)” и установлено, что при “больших взаимодействиях μ ($\mu \gg 1$)” оператор имеет единственное простое собственное значение ниже существенного спектра.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbb{Z}^3$ – трехмерная целочисленная решетка, $\ell_2^s((\mathbb{Z}^3)^m)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^m$ и симметричных относительно перестановки любых двух переменных.

В координатном представлении разностные операторы Шредингера системы двух и системы трех одинаковых частиц (бозонов) с парными контактными потенциалами взаимодействия на трехмерной решетке действуют соответственно в пространствах $\ell_2^s((\mathbb{Z}^3)^2)$ и $\ell_2^s((\mathbb{Z}^3)^3)$ по формулам

$$\begin{aligned} (\tilde{h}_\mu \varphi)(n_1, n_2) &= \frac{1}{2} \sum_{|s|=1} [2\varphi(n_1, n_2) - \varphi(n_1 + s, n_2) - \varphi(n_1, n_2 + s)] - \mu \delta_{n_1 n_2} \varphi(n_1, n_2), \\ (\tilde{H}_\mu \varphi)(n_1, n_2, n_3) &= \frac{1}{2} \sum_{|s|=1} [3\varphi(n_1, n_2, n_3) - \varphi(n_1 + s, n_2, n_3) - \\ &\quad - \varphi(n_1, n_2 + s, n_3) - \varphi(n_1, n_2, n_3 + s)] - \\ &\quad - \mu(\delta_{n_1 n_2} + \delta_{n_1 n_3} + \delta_{n_3 n_2}) \varphi(n_1, n_2, n_3). \end{aligned}$$

Здесь $\mu > 0$ – энергия взаимодействия двух частиц, δ_{nm} – символ Кронекера.

Пусть T^3 – трехмерный тор, $L_2^s((T^3)^m)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(T^3)^m$ и симметричных относительно перестановки любых двух переменных. В импульсном представлении операторы Шредингера систем двух и трех одинаковых частиц действуют соответственно в гильбертовых пространствах $L_2^s((T^3)^2)$ и $L_2^s((T^3)^3)$ по формулам

$$\begin{aligned} (h_\mu f)(k_1, k_2) &= (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2))f(k_1, k_2) - \mu \int \delta(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) f(k'_1, k'_2) dk'_1 dk'_2, \\ (H_\mu f)(k_1, k_2, k_3) &= (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2) + \varepsilon(k_3))f(k_1, k_2, k_3) - \\ &\quad - \mu \sum_{\alpha=1}^3 \int \delta(k_\alpha - k'_\alpha) \delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma) f(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3. \end{aligned}$$

Здесь $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{1, 2, 3\}$,

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p_i), \quad p = (p_1, p_2, p_3) \in T^3, \quad (2.1)$$

$\delta(k)$ – трехмерная дельта-функция Дирака. Знак интеграла без указания пределов интегрирования обозначает интеграл по всей области изменения переменных.

Пусть $k = k_1 + k_2$ и $K = k_1 + k_2 + k_3$ – полные квазиимпульсы системы двух и системы трех частиц, а

$$\gamma_k = \{(k_1, k_2) \in (T^3)^2 : k = k_1 + k_2\},$$

$$\Gamma_K = \{(k_1, k_2, k_3) \in (T^3)^3 : K = k_1 + k_2 + k_3\}$$

– соответственно трехмерное и шестимерное многообразия. Обозначим через $L_2^e(T^3) \subset L_2(T^3)$ подпространство четных функций, а через $L(K)$ – гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(T^3)^2$ и удовлетворяющих условиям $f(k_1, k_2) = f(k_2, k_1) = f(k_1, K - k_1 - k_2)$.

Операторы h_μ и H_μ разлагаются в прямые операторные интегралы [11]

$$h_\mu = \int \bigoplus h_\mu(k) dk, \quad H_\mu = \int \bigoplus H_\mu(K) dK,$$

где ограниченные самосопряженные операторы $h_\mu(k)$, $k \in T^3$, и $H_\mu(K)$, $K \in T^3$, действуют в гильбертовых пространствах $L_2^e(T^3)$ и $L(K)$, соответственно, по формулам

$$h_\mu(k)f(p) = \varepsilon_k(p)f(p) - \mu \int f(s) ds,$$

$$H_\mu(K)f(p, q) = \varepsilon_K(p, q)f(p, q) - \mu \int [f(p, s) + f(s, q) + f(K - p - q, s)] ds.$$

Здесь $\varepsilon_k(p) = \varepsilon(k/2 - p) + \varepsilon(k/2 + p)$ и $\varepsilon_K(p, q) = \varepsilon(K/3 + p) + \varepsilon(K/3 + q) + \varepsilon(K/3 - p - q)$. Пусть $\tau_\mu(K)$ – нижняя грань существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$ оператора $H_\mu(K)$ и $N_\mu(K, z)$ – число собственных значений оператора $H_\mu(K)$, лежащих левее точки $z \leq \tau_\mu(K)$. Положим

$$\mu_0^{-1} = \frac{1}{2} \int \frac{dq}{\varepsilon(q)}.$$

Для удобства воспользуемся обозначениями

$$N(K, z) = N_{\mu_0}(K, z), \quad \tau(K) = \tau_{\mu_0}(K).$$

Сформулируем основные результаты работы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Существует число t , $0 < t < \mu_0$, такое, что при всех $\mu \leq t$ оператор $H_\mu(0)$ не имеет собственных значений вне существенного спектра.*

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть $\mu = \mu_0$. Тогда оператор $H_{\mu_0}(0)$ имеет бесконечное число отрицательных собственных значений, накапливающихся к нулю, и для функций $N(0, z)$ и $N(K, 0)$ выполняются соотношения*

$$\lim_{z \rightarrow -0} \frac{2N(0, z)}{|\ln |z||} = \lim_{|K| \rightarrow 0} \frac{N(K, 0)}{|\ln |K||} = \frac{\lambda_0}{\pi}, \quad (2.2)$$

где λ_0 – единственное положительное решение уравнения (1.2).

ТЕОРЕМА 2.3. *Существует число $M > 0$ такое, что при всех $\mu > M$ оператор $H_\mu(0)$ имеет единственное простое собственное значение $E(\mu, 0)$ левее существенного спектра, причем*

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{E(\mu, 0)}{\mu} = -3. \quad (2.3)$$

3. СПЕКТР ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА

В соответствии с теоремой Вейля о существенном спектре [14] непрерывный спектр $\sigma_c(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$ совпадает со спектром $\sigma(h_0(k))$ невозмущенного оператора $h_0(k)$, т.е. с отрезком $[m(k), M(k)]$, где

$$m(k) = \min_{p \in T^3} \varepsilon_k(p), \quad M(k) = \max_{p \in T^3} \varepsilon_k(p).$$

Заметим, что при $k = (\pi, \pi, \pi)$ выполняется тождество $\varepsilon_k(q) \equiv 6$ и поэтому отрезок $[m(k), M(k)]$ превращается в точку $\{6\}$.

Для функции $\varepsilon(p)$ имеет место представление (2.1), поэтому $m(k) = 2\varepsilon(k/2)$, $M(k) = 12 - 2\varepsilon(k/2)$, $k = (k_1, k_2, k_3) \in T^3$. Заметим, что эти функции $m(k)$ и $M(k)$ симметричны относительно перестановки любых двух переменных k_i и k_j , четны по каждой переменной $k_i \in [-\pi, \pi]$, $i = 1, 2, 3$. Функция $m(k)$ строго возрастает, а $M(k)$ строго убывает по каждой переменной $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$. Следовательно, $\min_k m(k) = m(0) = 0$, $\max_k M(k) = M(0) = 12$.

Пусть $\Delta(\mu, k, z)$ – определитель Фредгольма оператора $I - \mu v r_0(k, z)$, $r_0(k, z)$ – резольвента оператора $h_0(k)$, v – интегральный оператор с ядром $v(q, q') = 1$, т.е.

$$vf = \int f(s) ds.$$

Функция $\Delta(\mu, k, z)$ имеет вид

$$\Delta(\mu, k, z) = 1 - \mu D(k, z), \quad D(k, z) = \int \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - z}.$$

Функция $D(k, \cdot)$ непрерывна и строго возрастает на каждой из полусосей $(-\infty, m(k))$ и $(M(k), \infty)$. Непрерывность функции $D(k, \cdot)$ следует из непрерывности подынтегральной функции, а монотонность вытекает из неравенства $D'_z(k, z) > 0$.

Из монотонности функции $D(k, \cdot)$ следует существование конечного или бесконечного предела

$$\lim_{z \rightarrow m(k)} D(k, z) = D(k, m(k)).$$

Если для любого $i = 1, 2, 3$ выполнено условие $k_i \neq \pi$, то этот предел конечен.

ЛЕММА 3.1. Число $z \in C \setminus [m(k), M(k)]$ является собственным значением оператора $h_\mu(k)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\mu, k, z) = 0$.

Доказательство можно найти в работе [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ [4]. Будем говорить, что нижняя грань непрерывного спектра является виртуальным уровнем для оператора $h_\mu(0)$, если $\lambda = 1$ является простым собственным значением оператора $\mu v r_0(0, 0)$, причем для нетривиального решения $g = \mu v r_0(0, 0)g$ в пространстве $C(T^3)$ выполняется условие $g(0) \neq 0$.

Отметим, что требование наличия собственного значения $\lambda = 1$ соответствует существованию решения уравнения Шредингера $h_\mu(0)f = 0$, а из условия $g(0) \neq 0$ следует, что решение f уравнения Шредингера не принадлежит пространству $L_2(T^3)$.

Функция $D(k, m(k))$, $k = (k_1, k_2, k_3)$, симметрична относительно перестановки любых двух переменных k_i, k_j , четна по каждой переменной $k_i \in [-\pi, \pi]$ и строго возрастает по $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$. При каждом фиксированном $z \leq 0$ функция $D(\cdot, z)$ строго убывает по каждой переменной $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$. При этом имеют место равенства

$$\min_{k \in T^3} D(k, m(k)) = \max_k D(k, 0) = D(0, 0) = \frac{1}{2} \int \frac{dq}{\varepsilon(q)} = \mu_0^{-1}, \quad (3.1)$$

$$\min_{k \in T^3} D(k, 0) = D(\pi, 0) = \frac{1}{6}, \quad \pi = (\pi, \pi, \pi). \quad (3.2)$$

Доказательство этих утверждений следует из свойств косинуса и монотонности интеграла Лебега (см. также [12]).

ЛЕММА 3.2. Пусть $\mu = \mu_0$. Тогда $z = 0$ является виртуальным уровнем для оператора $h_\mu(0)$, а при всех $k \neq 0$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное простое положительное собственное значение $z_\mu(k)$ левее непрерывного спектра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае уравнение $\mu_0 v r_0(0, 0)g = g$ имеет решение $g(p) \equiv 1$, а уравнение Шредингера $h_\mu(0)f(p) = 0$ имеет нетривиальное решение $f(p) = (\varepsilon(p))^{-1}$, и это решение не принадлежит пространству $L_2(T^3)$, т.е. число 0 является виртуальным уровнем (не является собственным значением) оператора $h_\mu(0)$. Функция $D(k, m(k))$ строго возрастает, а $D(k, 0)$ строго убывает по $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$, поэтому при всех $k \neq 0$ имеем $\mu_0 D(k, 0) < \mu_0 D(0, 0) = 1 < \mu_0 D(k, m(k))$. Отсюда следует, что функция $\Delta(\mu_0, k, z)$ имеет единственный простой нуль в интервале $(0, m(k))$. Теперь из леммы 3.1 заключаем, что оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное простое собственное значение $z_\mu(k)$, причем $0 < z_\mu(k) < m(k)$.

ЛЕММА 3.3. Собственное значение $z_\mu(k) = z_\mu(k_1, k_2, k_3)$ симметрично и четно по каждой переменной $k_i \in [-\pi, \pi]$, $i = 1, 2, 3$, и строго возрастает по $k_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$. При этом

$$z_{\mu_0}(0) = 0, \quad z_\mu(\pi) = 6 - \mu. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1 собственное значение $z_\mu(k_1, k_2, k_3)$ есть решение уравнения $\mu D(k, z) = 1$. Симметричность и четность $z_\mu(k)$ следует из симметричности и четности функции $D(k, z)$. Докажем возрастание функции $z_\mu(k_1, k_2, k_3)$ по k_1 на отрезке $[0, \pi]$. Пусть $k'_1 < k''_1 \in [0, \pi]$ — произвольные числа и $\mu D(k', z') = \mu D(k'', z'') = 1$, где $k' = (k'_1, k_2, k_3)$, $k'' = (k''_1, k_2, k_3)$. Функция $D(\cdot, z)$ строго убывает, поэтому $D(k'', z') < D(k', z') = D(k'', z'')$. Так как функция $D(k, \cdot)$ строго возрастает, то из условия $D(k'', z') < D(k'', z'')$ следует, что $z' < z''$, т.е. $z(k') < z(k'')$. Теперь из соотношений (3.1) и (3.2) следует (3.3). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Собственное значение $z(\mu, k) = z_\mu(k)$ оператора $h_\mu(k)$ как функция от μ строго убывает на интервале $(0, \infty)$ и удовлетворяет неравенствам

$$-\mu \leq z_\mu(k) \leq 6 - \mu. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1 собственное значение $z(\mu, k)$ есть решение уравнения $\mu D(k, z) = 1$. Пусть $\mu_1, \mu_2 \in (0, \infty)$, $\mu_1 < \mu_2$, — два произвольных числа и $D(k, z_1) = 1/\mu_1 > 1/\mu_2 = D(k, z_2)$. Так как функция $D(k, \cdot)$ строго возрастает, то $z_1 > z_2$. Это означает, что $z(\mu_1, k) > z(\mu_2, k)$. Из условия минимальности собственного значения самосопряженного оператора следует, что $-\mu \leq \inf (h_\mu(k)f, f) = z_\mu(k)$. Из условия монотонности находим $\max_k z_\mu(k) = 6 - \mu$. Лемма доказана.

4. СПЕКТР ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Здесь мы опишем существенный спектр трехчастичного оператора $H_\mu(K)$, а исследование собственных значений этого оператора сведем к изучению собственных значений компактного оператора $A_\mu(K, z)$. Обозначим $E_{\mu K}(q) = z_\mu(2K/3 - q) + \varepsilon(q + K/3)$. Как известно [12], существенный спектр оператора $H_\mu(K)$ состоит из объединения областей значений двух функций $E_{\mu K}(q)$ и $\varepsilon_K(p, q)$, т.е.

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K)) = [E_{\min}(\mu, K), E_{\max}(\mu, K)] \cup [\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{\max}(K)],$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\min}(K) &= \min_{p, q} \varepsilon_K(p, q) = 3\varepsilon\left(\frac{K}{3}\right), & \varepsilon_{\max}(K) &= \max_{p, q} \varepsilon_K(p, q), \\ E_{\min}(\mu, K) &= \min_q E_{\mu K}(q), & E_{\max}(\mu, K) &= \max_q E_{\mu K}(q). \end{aligned}$$

Первая часть $[E_{\min}(\mu, K), E_{\max}(\mu, K)]$ называется “двухчастичной” ветвью существенного спектра трехчастичного оператора $H_\mu(K)$ и обозначается $\sigma_{\text{two}}(H_\mu(K))$. Вторая часть $[\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{\max}(K)]$ совпадает со спектром невозмущенного трехчастичного оператора $H_0(K)$ и называется “трехчастичной” ветвью существенного спектра оператора $H_\mu(K)$. Она обозначается $\sigma_{\text{three}}(H_\mu(K))$.

Рассмотрим самосопряженный оператор (решетчатый аналог оператора Фаддеева–Ньютона, см. также [11]) $A_\mu(K, z)$, $z \leq \tau_\mu(K) = \min_q E_{\mu K}(q)$, действующий в $L_2(T^3)$ по формуле

$$\begin{aligned} A_\mu(K, z)g(p) &= \frac{2\mu}{\sqrt{\Delta(\mu, 2K/3 - p, z - \varepsilon(p + K/3))}} \times \\ &\times \int \frac{g(s) ds}{\sqrt{\Delta(\mu, 2K/3 - s, z - \varepsilon(s + K/3))}(\varepsilon_K(p, s) - z)}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.1 [11]. Число $z \in C \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_\mu(K))$ является собственным значением оператора $H_\mu(K)$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 1$ есть собственное значение оператора $A_\mu(K, z)$.

Для самосопряженного оператора B , не имеющего существенного спектра правее точки λ , обозначим через $n(\lambda, B)$ число собственных значений оператора B , превышающих $\lambda > 0$.

ЛЕММА 4.2. Для любого $z < \tau_\mu(K)$ имеет место равенство

$$N_\mu(K, z) = n(1, A_\mu(K, z)). \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем равенство

$$N_\mu(K, z) = n(1, \mu R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)), \quad V = V_1 + V_2 + V_3. \quad (4.2)$$

Пусть для некоторой функции $f \in L_2(T^3)$ выполняется неравенство $(H_\mu(K)f, f) < z(f, f)$, что равносильно

$$((H_0(K) - z)f, f) < (\mu V f, f). \quad (4.3)$$

Неравенство (4.3) эквивалентно неравенству

$$(g, g) < (\mu R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z) g, g), \quad g = (H_0(K) - z)^{1/2} f.$$

Отсюда получаем

$$N_\mu(K, z) \leq n(1, \mu R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)). \quad (4.4)$$

Из обратимости оператора $(H_0(K) - z)$ можно получить и обратное неравенство к (4.4), что и доказывает (4.2). Рассмотрим уравнение для собственных значений оператора $\mu R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)$, т.е. уравнение

$$\lambda g = \sum_{i=1}^3 \mu R_0^{1/2}(K, z) V_i R_0^{1/2}(K, z) g. \quad (4.5)$$

Обозначая $\varphi(p) = (V_i^{1/2} R_0^{1/2}(K, z) g)(p)$ и учитывая равенство $V_i^{1/2} = V_i$, мы получим эквивалентное (4.5) уравнение

$$\begin{aligned} \lambda \varphi(p) &= \mu \int \frac{\varphi(p) dq}{\varepsilon_K(p, q) - z} + 2\mu \int \frac{\varphi(q) dq}{\varepsilon_K(p, q) - z} = \\ &= \mu V_1 R_0(K, z) V_1 \varphi + 2\mu V_1 R_0(K, z) V_2 \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$n(1, \mu R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)) = n(1, \mu V_1 R_0(K, z) V_1 + 2\mu V_1 R_0(K, z) V_2).$$

Теперь воспользуемся вариационным методом:

$$(\varphi, \varphi) < (\mu V_1 R_0(K, z) V_1 \varphi, \varphi) + (2\mu V_1 R_0(K, z) V_2 \varphi, \varphi)$$

или

$$((I - \mu V_1 R_0(K, z) V_1) \varphi, \varphi) < (2\mu V_1 R_0(K, z) V_2 \varphi, \varphi).$$

Обозначив $u = (I - \mu V_1 R_0(K, z) V_1)^{1/2} \varphi$, получим $(u, u) < (A_\mu(K, z) u, u)$. Таким образом,

$$n(1, \mu R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)) \leq n(1, A_\mu(K, z)). \quad (4.6)$$

Поменяв аргументы, получим обратное к (4.6) неравенство, что приводит к равенству

$$n(1, \mu R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)) = n(1, A_\mu(K, z)). \quad (4.7)$$

Из соотношений (4.7) и (4.2) следует (4.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Существует число $\delta > 0$ такое, что при всех $k \in U_\delta(0)$ и $z \in U_\delta(m(k)) = \{z: |z - m(k)| < \delta\}$ функция $\Delta(\mu, k, z)$ разлагается в ряд Пуизо*

$$\Delta(\mu, k, z) = 1 - \mu \sum_{n=0}^{\infty} c_n(k)(m(k) - z)^{n/2}, \quad (4.8)$$

где $c_n(k)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — четная, вещественно-аналитическая функция в $U_\delta(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (4.8) получено в работе [15] при каждом фиксированном $k \in U_\delta(0)$. Аналитичность функций $c_0(k) = D(k, m(k))$, $c_n(k)$, $n = 1, 2, \dots$, по k мы можем получить, пользуясь леммой Морса с параметром. Лемма доказана.

4.1. Случай $\mu = \mu_0$. Пусть $K = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \min_q E_{\mu_0}(q) &= \min_{q \in T^3} [z_\mu(q) + \varepsilon(q)] = z_\mu(0) = 0, \\ \max_{q \in T^3} E_{\mu_0}(q) &= \max_{q \in T^3} [z_\mu(q) + \varepsilon(q)] = 12 - \mu, \\ \min_{p, q} \varepsilon_0(p, q) &= 0, \quad \max_{p, q} \varepsilon_0(p, q) = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(0)) = [0, 12 - \mu] \cup \left[0, \frac{27}{2}\right] = \left[0, \frac{27}{2}\right].$$

При всех $K \in T^3$, $K \neq 0$, имеют место неравенства

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon_{\min}(K) &= \min_{p, q} \varepsilon_K(p, q) = 3\varepsilon\left(\frac{K}{3}\right) \leq \frac{9}{2}, \\ \max_q E_{\mu K}(q) &\geq z_\mu(K - \pi) + \varepsilon(\pi) \geq 6. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что “двухчастичная” и “трехчастичная” ветви существенного спектра пересекаются, т.е.

$$[E_{\min}(\mu, K), E_{\max}(\mu, K)] \cup [\varepsilon_{\min}(K), \varepsilon_{\max}(K)] = [E_{\min}(\mu, K), \varepsilon_{\max}(K)],$$

и при этом $E_{\min}(\mu, K) < \varepsilon_{\min}(K)$. Действительно,

$$\min_q E_{\mu K}(q) \leq z_\mu\left(\frac{2K}{3}\right) + \varepsilon\left(\frac{K}{3}\right) < m\left(\frac{2K}{3}\right) + \varepsilon\left(\frac{K}{3}\right) = 3\varepsilon\left(\frac{K}{3}\right).$$

ЛЕММА 4.4. *Существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $K \in U_\delta^o(0) = \{p \in T^3: 0 < |p| < \delta\}$ оператор $A(K, z) \equiv A_{\mu_0}(K, z)$, $z \leq \tau(K)$, является оператором Гильберта–Шмидта и непрерывен в равномерной операторной топологии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом $z < \tau(K)$ ядро оператора $A(K, z)$ непрерывно и поэтому квадратично-интегрируемо. Докажем квадратичную интегрируемость ядра оператора $A(K, z)$ при $z = \tau(K)$. Функция $\varepsilon_K(p, q) - \tau(K)$ ограничена снизу положительной величиной $\varepsilon_{\min}(K) - \tau(K)$, поэтому имеет место неравенство

$$|A(p, q; K, \tau(K))|^2 \leq C(K) \frac{\Delta^{-1}(2K/3 - p, z - \varepsilon(p + K/3))}{\Delta(2K/3 - q, z - \varepsilon(q + K/3))},$$

где $\Delta(p, z) = \Delta(\mu_0, p, z)$. При всех $K \in U_\delta^o(0)$ функция

$$\Delta\left(\frac{2K}{3} - q, \tau(K) - \varepsilon\left(q + \frac{K}{3}\right)\right)$$

имеет невырожденный минимум в точке $P(K)$ [12], поэтому

$$\left|\Delta\left(\frac{2K}{3} - q, \tau(K) - \varepsilon\left(q + \frac{K}{3}\right)\right)\right| \geq C|p - P(K)|^2.$$

Переходя в сферическую систему координат, можно показать, что ядро $A(p, q; K, \tau(K))$ является квадратично-интегрируемым.

В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим, что

$$\int |A(p, q; K, \tau(K)) - A(p, q; K, z)|^2 dp dq \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \tau(K),$$

что и дает равномерную непрерывность оператора $A(K, z)$ в точке $z = \tau(K)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. Для любого $K \in U_\delta^o(0)$ оператор $H_\mu(K)$ имеет лишь конечное число собственных значений ниже существенного спектра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т.е. оператор $H_\mu(K)$ имеет бесконечное число собственных значений z_n таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \tau(K)$. Пусть $f_n \in L(K)$ — собственная функция оператора $H_\mu(K)$, соответствующая собственному значению z_n , тогда функция

$$g_n(p) = \sqrt{\Delta\left(\frac{2K}{3} - p, z_n - \varepsilon\left(p + \frac{K}{3}\right)\right)} \int f_n(p, s) ds \in L_2(T^3)$$

удовлетворяет симметризованному уравнению Фаддеева–Ньютона при $z = z_n$, т.е. $g_n(p) = A(K, z_n)g_n(p)$. Нормируем g_n и покажем, что

$$\|g_n\| = \|A(K, z_n)g_n\| \leq \|A(K, \tau(K))g_n\| + \|[A(K, z_n) - A(K, \tau(K))]g_n\| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Это следует из равномерной непрерывности $A(K, z)$ в точке $z = \tau(K)$ и компактности предельного оператора $A(K, \tau(K))$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 4.6. Для функции $\Delta(2K/3 - p, z - \varepsilon(K/3 + p))$ имеют место следующие представления:

$$\begin{aligned} \Delta(-p, z - \varepsilon(p)) &= 2\pi^2 \mu_0 \sqrt{\frac{3p^2}{4} - z + O(p^2)} + O(|z|) \quad \text{при } p \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow -0, \\ \Delta\left(\frac{2K}{3} - p, -\varepsilon\left(\frac{K}{3} + p\right)\right) &= 2\pi^2 \mu_0 \sqrt{\frac{K^2}{6} + \frac{3p^2}{4}} + O(p^2) + O(K^2) \end{aligned} \quad (4.9)$$

при $p \rightarrow 0, K \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $D(k, m(k))$ имеет минимум в точке $k = 0$, то

$$\Delta(k, m(k)) = 1 - \mu_0 D(k, m(k)) = O(k^2) \quad \text{при } k \rightarrow 0. \quad (4.10)$$

Из леммы 4.3 следует, что

$$\begin{aligned} \Delta(-p, z - \varepsilon(p)) &= 1 - \mu_0 D(-p, m(p)) - \mu_0 c_1(p) \sqrt{m(p) - (z - \varepsilon(p))} - \\ &\quad - \mu_0 \sum_{n=2}^{\infty} c_n(p) [m(p) - (z - \varepsilon(p))]^{n/2}, \end{aligned}$$

где

$$m(p) + \varepsilon(p) = \frac{3p^2}{4} + O(p^4) \quad \text{при } p \rightarrow 0$$

и

$$c_1(k) = -\frac{2\pi^2 \mu_0}{\sqrt{\cos(k_1/2) \cos(k_2/2) \cos(k_3/2)}}.$$

Следовательно,

$$c_1(k) = -2\pi^2 \mu_0 + O(k^2) \quad \text{при } k \rightarrow 0.$$

Поэтому справедливо первое представление в (4.9).

Из (4.10) получаем

$$\Delta\left(\frac{2K}{3} - p, m\left(\frac{2K}{3} - p\right)\right) = \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} c_{\alpha} \left(\frac{2K}{3} - p\right)^{\alpha}$$

и

$$m\left(\frac{2K}{3} - p\right) + \varepsilon\left(p + \frac{K}{3}\right) = 2\varepsilon\left(\frac{2K/3 - p}{2}\right) + \varepsilon\left(p + \frac{K}{3}\right) = \frac{K^2}{6} + \frac{3p^2}{4} + O(|K|^3) + O(|p|^3)$$

при $K \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 0$. Отсюда следует справедливость представления (4.9). Лемма доказана.

Заметим, что для функции $\varepsilon_K(p, q)$ имеет место представление

$$\varepsilon_K(p, q) = \frac{K^2}{6} + p^2 + (p, q) + q^2 + O(|p|^4) + O(|q|^4) + O(|K|^4), \quad K, p, q \rightarrow 0.$$

Оператор $A_s(K, z)$ называется сингулярной частью оператора $A(K, z)$ и действует в $L_2(T^3)$ по формуле

$$A_s(K, z)w(p) = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{\chi(p)\chi(q)(K^2/6 + 3q^2/4 - z)^{-1/4} w(q) dq}{(K^2/6 + 3p^2/4 - z)^{1/4}(K^2/6 + p^2 + (p, q) + q^2 - z)},$$

где $\chi(\cdot)$ — характеристическая функция единичного шара $B_1 = \{p \in T^3: |p| < 1\}$.

ЛЕММА 4.7. Разность $A(0, z) - A_s(0, z)$ (соответственно $A(K, 0) - A_s(K, 0)$) является оператором Гильберта–Шмидта при $z \leq 0$ (соответственно $K \in T^3$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро

$$A(p, q; 0, z) - A_s(p, q; 0, z) = \frac{2\mu}{\sqrt{\Delta(-p, z - \varepsilon(p))}} \frac{(\varepsilon_0(p, q) - z)^{-1}}{\sqrt{\Delta(-q, z - \varepsilon(q))}} - \frac{1}{\pi^2} \frac{\chi(p)\chi(q)(p^2 + (p, q) + q^2 - z)^{-1}}{(3p^2/4 - z)^{1/4}(3q^2/4 - z)^{1/4}}$$

оператора $A(0, z) - A_s(0, z)$, $z \leq 0$, непрерывно при $p, q \notin B_1$, поэтому оно квадратично-интегрируемо по области $(T^3)^2 \setminus (B_1)^2$. В силу леммы 4.6 ядро оператора $A(0, z) - A_s(0, z)$ допускает оценку

$$|A(p, q; 0, z) - A_s(p, q; 0, z)| \leq C(|p|^{-1/2} + |q|^{-1/2}) \quad (4.11)$$

для всех $p \in B_1$, $q \notin B_1$ и для всех $p \notin B_1$, $q \in B_1$. В случае $(p, q) \in (B_1)^2$ имеет место неравенство

$$|A(p, q; 0, z) - A_s(p, q; 0, z)| \leq \frac{C|p|^{-1/2}}{p^2 + (p, q) + q^2} + \frac{C|q|^{-1/2}}{p^2 + (p, q) + q^2}. \quad (4.12)$$

Переходя в сферическую систему координат и пользуясь неравенствами (4.11), (4.12), можно доказать квадратичную интегрируемость ядра оператора $A(0, z) - A_s(0, z)$, $z \leq 0$. Аналогично доказывается принадлежность классу Гильберта–Шмидта оператора $A(K, 0) - A_s(K, 0)$, $K \in T^3$. Лемма доказана.

Гильбертово пространство $L_2(B_1)$ является инвариантным подпространством относительно оператора $A_s(K, z)$. Этот оператор действует в $L_2(B_1)$ по формуле

$$A_s(K, z)w(p) = \frac{1}{\pi^2} \int_{B_1} \frac{(K^2/6 + 3q^2/4 - z)^{-1/4} w(q) dq}{(K^2/6 + 3p^2/4 - z)^{1/4} (K^2/6 + p^2 + (p, q) + q^2 - z)}.$$

Получим асимптотическую формулу для числа собственных значений $N(0, z)$ оператора $A_s(0, z)$. Оператор $A_s(0, z)$ унитарно-эквивалентен оператору $A_s^{(1)}(0, z)$, действующему в $L_2(B_r)$, $r = |z|^{-1/2}$, по формуле

$$(A_s^{(1)}(0, z)w)(p) = \frac{1}{\pi^2} \int_{B_r} \frac{w(q) dq}{(3p^2/4 + 1)^{1/4} (p^2 + (p, q) + q^2 + 1) (3q^2/4 + 1)^{1/4}}.$$

Эта эквивалентность осуществляется с помощью унитарного преобразования $U_r: L_2(B_1) \rightarrow L_2(B_r)$,

$$(U_r f)(p) = r^{-3/2} f(r^{-1} p). \quad (4.13)$$

Если мы заменим $(3p^2/4 + 1)^{-1/4}$, $(3q^2/4 + 1)^{-1/4}$ и $q^2 + (p, q) + p^2 + 1$ на $(3p^2/4)^{-1/4} \times (1 - \chi(p))$, $(3q^2/4)^{-1/4} (1 - \chi(q))$ и $q^2 + (p, q) + p^2$ соответственно, то получим оператор

$A_s^{(2)}(0, z)$, разность которого с $A_s^{(1)}(0, z)$ будет оператором Гильберта–Шмидта и равномерно непрерывна в точке $z = 0$. Пространство $L_2(B_r \setminus B_1)$ инвариантно относительно оператора $A_s^{(2)}(0, z)$. Ядро этого интегрального оператора имеет вид

$$\frac{2}{\sqrt{3}\pi^2} \frac{|p|^{-1/2}|q|^{-1/2}}{q^2 + (p, q) + p^2}.$$

Этот оператор унитарно-эквивалентен интегральному оператору $\mathbf{S}_R$, $R = (1/2)|\ln|z||$, действующему в пространстве $L_2((0, R) \times \mathbf{S}^2)$ по формуле

$$(\mathbf{S}_R \varphi)(r, w) = \frac{1}{2\sqrt{3}\pi^2} \int_{\mathbf{S}^2} \int_0^R \frac{\varphi(r', w') dr' dw'}{\operatorname{ch}(r - r') + (w - w')/2}. \quad (4.14)$$

Эквивалентность осуществляется унитарным оператором $M: L_2(B_r \setminus B_1) \rightarrow L_2((0, R) \times \mathbf{S}^2)$, где

$$(Mf)(r, \omega) = e^{3r/2} f(e^\omega r), \quad r \in (0, R), \quad \omega \in \mathbf{S}^2. \quad (4.15)$$

Из теоремы 4.1 и леммы 4.9 работы [7] вытекает

ТЕОРЕМА 4.1. *Имеет место равенство*

$$\lim_{z \rightarrow -0} \frac{n(1, A(0, z))}{|\ln|z||} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{n(1, \mathbf{S}_R)}{R} = \frac{\lambda_0}{2\pi}, \quad (4.16)$$

где λ_0 – положительное решение уравнения (1.2).

Теперь получим аналогичные результаты относительно числа $N(K, 0)$. С помощью унитарного отображения $U_\rho: L_2(B_1) \rightarrow L_2(B_\rho)$, определенного формулой (4.13), можно показать, что оператор $A_s(K, 0)$ унитарно-эквивалентен оператору $A_s^{(1)}(K, 0)$, действующему в $L_2(B_\rho)$, $\rho = |K|^{-1}$, по формуле

$$(A_s^{(1)}(K, 0)w)(p) = \frac{1}{\pi^2} \int_{B_\rho} \frac{w(q) dq}{(3p^2/4 + 1/6)^{1/4}(p^2 + (p, q) + q^2 + 1/6)(3q^2/4 + 1/6)^{1/4}}.$$

В пространстве $L_2(B_\rho)$ рассмотрим оператор $A_s^{(2)}(K, 0)$ с ядром

$$\frac{2}{\sqrt{3}\pi^2} \frac{|p|^{-1/2}|q|^{-1/2}}{q^2 + (p, q) + p^2} (1 - \chi(p))(1 - \chi(q)).$$

Разность $A_s^{(1)}(K, 0) - A_s^{(2)}(K, 0)$ является оператором Гильберта–Шмидта и непрерывна в равномерной операторной топологии в точке $K = 0$. Наконец, оператор $MA_s^{(2)}(K, 0)M^{-1} = \mathbf{S}_{R'}$, $R' = |\ln|K||$, действует в пространстве $L_2((0, R') \times \mathbf{S}^2)$ по формуле (4.14), где оператор M определяется формулой (4.15). Разница состоит в том, что теперь величина $R' = |\ln|K||$ зависит от $K \in T^3$, $K \neq 0$.

Из теоремы 4.1 вытекает

ТЕОРЕМА 4.2. *Для функции $n(1, A(K, 0))$ выполняется соотношение*

$$\lim_{|K| \rightarrow 0} \frac{N(K, 0)}{|\ln|K||} = \lim_{|K| \rightarrow 0} \frac{n(1, A(K, 0))}{|\ln|K||} = \lim_{R' \rightarrow \infty} \frac{n(1, \mathbf{S}_{R'})}{R'} = \frac{\lambda_0}{\pi}. \quad (4.17)$$

Теперь доказательство теоремы 2.2 (см. раздел 2) следует из равенств (4.16), (4.17).

4.2. Случай малых $\mu \ll 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. При всех $\mu \in (0, \mu_0)$ существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H_\mu(0)) = [0, 27/2]$. Норма оператора $A_\mu(0, 0) = A(0, 0)$ непрерывно зависит от $\mu > 0$ и допускает оценку $\|A_\mu(0, 0)\| \leq C\mu$, поэтому существует число $t \in (0, \mu_0)$ такое, что при всех $\mu \in (0, t]$ имеем $\|A_\mu(0, 0)\| < 1$. Отсюда и из леммы 4.2 следует, что оператор $H_\mu(0)$ не имеет отрицательных собственных значений. В работе [12] доказано, что оператор $H_\mu(K)$ не имеет собственных значений правее существенного спектра при всех $\mu > 0$ и $K \in T^3$.

4.3. Случай больших $\mu \gg 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.3. При $\mu > \mu_0$ левый край $\tau(\mu)$ существенного спектра оператора $H_\mu(0)$ равен $z_\mu(0)$. В силу (3.4) имеем $-\mu \leq \tau(\mu)$. Применяя вариационный метод, получаем

$$-3\mu \leq \inf_{\|f\|=1} (H_\mu(0)f, f) \leq 9 - 3\mu.$$

Отсюда следует, что при $\mu > 0$ наименьшее собственное значение $E(\mu, 0)$ оператора $H_\mu(0)$ лежит в интервале $(-3\mu, 9 - 3\mu)$. Поэтому имеет место равенство (2.3). Теперь докажем, что оператор $H_\mu(0)$ имеет единственное простое собственное значение, лежащее ниже существенного спектра. В силу леммы 4.2 для этого достаточно показать, что оператор $A_\mu(0, z_\mu(0))$ имеет единственное простое собственное значение, большее 1. Оператор $A_\mu(0, z_\mu(0))$ представим в виде суммы двух операторов

$$A_\mu(0, z_\mu(0)) = A_\mu^{(0)}(0, z_\mu(0)) + A_\mu^{(1)}(0, z_\mu(0)),$$

где

$$\begin{aligned} (A_\mu^{(0)}(0, z_\mu(0))f)(p) &= -\frac{2\mu}{z_\mu(0)\sqrt{\Delta(\mu, -p, z_\mu(0) - \varepsilon(p))}} \int \frac{f(q) dq}{\sqrt{\Delta(\mu, -q, z_\mu(0) - \varepsilon(q))}}, \\ (A_\mu^{(1)}(0, z_\mu(0))f)(p) &= \frac{2\mu}{\sqrt{\Delta(\mu, -p, z_\mu(0) - \varepsilon(p))}} \times \\ &\times \int \frac{\varepsilon_0(p, q)f(q) dq}{z_\mu(0)(\varepsilon_0(p, q) - z_\mu(0))\sqrt{\Delta(\mu, -q, z_\mu(0) - \varepsilon(q))}}. \end{aligned}$$

Оператор $A_\mu^{(0)}(0, z_\mu(0))$ одномерен и имеет собственное значение

$$\lambda(\mu) = -\frac{2\mu}{z_\mu(0)} \int \frac{dq}{\Delta(\mu, -q, z_\mu(0) - \varepsilon(q))} > 1,$$

что следует из неравенств $0 < \Delta(\mu, -q, z_\mu(0) - \varepsilon(q)) < 1$ и $-\mu \leq z_\mu(0) \leq 6 - \mu$. Норма оператора $A_\mu^{(1)}(0, z_\mu(0))$ допускает оценку сверху

$$\|A_\mu^{(1)}(0, z_\mu(0))\| \leq \frac{C}{\mu}$$

при больших $\mu \gg 1$. Из вышеизложенного вытекает, что $n(1, A_\mu(0, z_\mu(0))) = 1$. В силу леммы 4.4 получаем единственность собственного значения оператора $H_\mu(0)$, лежащего ниже $z_\mu(0)$. Теорема доказана.

При $\mu > 12$ “двухчастичная” ветвь $\sigma_{\text{two}}(H_\mu(0))$ и “трехчастичная” ветвь $\sigma_{\text{three}}(H_0(0))$ не пересекаются и появляется лакуна $(12 - \mu, 0)$. Если $\mu > 12$, то функция $\Delta(\mu, -p, z - \varepsilon(p))$ отрицательна при $z \in (12 - \mu, 0)$. Поэтому симметризованный оператор имеет вид

$$A_\mu(0, z)g(p) = -\frac{2\mu}{\sqrt{-\Delta(\mu, -p, z - \varepsilon(p))}} \int \frac{(\varepsilon_0(p, s) - z)^{-1}g(s) ds}{\sqrt{-\Delta(\mu, -s, z - \varepsilon(s))}}.$$

В случае $z = 0$ и $z = 12 - \mu$ ядро оператора Фаддеева–Ньютона $A_\mu(0, z)$ имеет квадратично-интегрируемые особенности вида $(p^2 + q^2)^{-1}$ и $(\sqrt{(p - \pi)^2} \sqrt{(q - \pi)^2})^{-1}$, соответственно. Из компактности предельных операторов $A_\mu(0, 0)$ и $A_\mu(0, 12 - \mu)$ вытекает следующая теорема (см. также теорему 2 в работе [16]).

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\mu > 12$. Тогда оператор $H_\mu(0)$ имеет лишь конечное число собственных значений в лакуне $(12 - \mu, 0)$.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность Р. А. Минлосу за внимание к работе и обсуждения полученных результатов. Работа финансировалась Фондом фундаментальных исследований РУЗ и Deutsche Forschungsgemeinschaft (грант № 436 USB 113/3).

Список литературы

- [1] В. Н. Ефимов. ЯФ. 1970. Т. 12. № 5. С. 1080–1091.
- [2] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
- [3] R. D. Amado, J. V. Noble. Phys. Rev. D. 1971. V. 5. № 8. P. 1992–2002.
- [4] Д. Р. Яфаев. Матем. сб. 1974. Т. 9(136). № 4(8). С. 567–592.
- [5] Yu. N. Ovchinnikov, I. M. Sigal. Ann. Phys. 1989. V. 123. P. 274–295.
- [6] H. Tamura. J. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 433–459.
- [7] A. V. Sobolev. Commun. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 101–126.
- [8] D. C. Mattis. Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. № 2. P. 361–379.
- [9] В. А. Малышев, Р. А. Минлос. Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1983. № 9. С. 63–80.
- [10] A. I. Mogilner. The problem of a few quasi-particles in solid-state physics. In: Applications of Self-Adjoint Extensions in Quantum Physics. Proc. Conf. (Dubna, USSR, 1987). Lect. Notes Phys. V. 324. Eds. P. Exner, P. Seba. Berlin: Springer, 1989. P. 160–173.
- [11] С. Н. Лакаев. Функци. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 3. С. 15–28.
- [12] С. Н. Лакаев, Ж. И. Абдуллаев. Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 686–696.
- [13] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, T. T. Wu. Phys. Lett. A. 1971. V. 83. P. 105–109.
- [14] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [15] С. Н. Лакаев. ТМФ. 1991. Т. 89. № 1. С. 94–104.
- [16] Ж. И. Абдуллаев, С. Н. Лакаев. ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 94–108.

Поступила в редакцию 23.VII.2002 г.,
после доработки 30.XI.2002 г.