Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Катанаев, Топологически-нетривиальные одномерные решения в модели Скирма, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 2, 193–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf22>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 08:08:05

ТОПОЛОГИЧЕСКИ-НЕТРИВИАЛЬНЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ СКИРМА

Модель Скимма рассматривается с использованием явной параметризации группы вращений $\mathrm{SO}(3)$ элементами ее алгебры. Поскольку фундаментальная группа группы $\mathrm{SO}(3)$ равна $\mathbb{Z}_2$, то топологически-нетривиальные решения возникают уже в одномерном случае. Явно найдены и проанализированы статические одномерные решения. Среди них есть топологически-нетривиальные решения с конечной энергией. Предложен новый класс проективных моделей, пространством-мишенью которых являются произвольные действительные проективные пространства $\mathbb{RP}^d$.

Ключевые слова: топологические солитоны, модель Скимма.

1. ВВЕДЕНИЕ

Модель Скимма [1] является одной из фундаментальных моделей современной математической физики, которая находит применение в разных областях физики от теории элементарных частиц до физики твердого тела. Первоначально модель была предложена в терминах четырех скалярных полей, принимающих значения на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$. Поскольку как многообразие сфера $\mathbb{S}^3$ диффеоморфна группе $\mathrm{SU}(2)$, то лагранжиан модели был также записан в терминах элементов алгебры $\mathfrak{su}(2)$. Так как фундаментальная и вторая гомотопическая группы унитарных групп $\mathrm{SU}(n)$, $n \geq 2$, и сфер $\mathbb{S}^n$, $n \geq 3$, тривиальны, то в соответствующих моделях не может существовать одномерных и двумерных топологически-нетривиальных решений. Топологически-нетривиальные решения при такой параметризации модели Скимма связаны с третьей гомотопической группой $\pi_3(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}$. Однако в явном виде эти решения не найдены.

В последующие годы большое внимание привлекли также $\mathrm{SO}(n)$ -модели, в которых пространством-мишенью являются сферы произвольной размерности $\mathbb{S}^{n-1}$, для которых группа вращений $\mathrm{SO}(n)$ есть группа симметрии. Обзор этих моделей и библиографию можно найти в монографиях [2]. В дальнейшем мы будем называть эти модели $\mathbb{S}^n$ -моделями, зарезервировав термин $\mathrm{SO}(n)$ -модели для того случая, когда пространством-мишенью является само групповое многообразие.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия. E-mail: katanayev@mi.ras.ru

Топологические солитоны низшей размерности существуют для S^1 -моделей, для которых $\pi(S^1) = \mathbb{Z}$. Это, например, хорошо известные кинки в модели синус-Гордон. Топологически-нетривиальные решения для более высоких гомотопических групп появляются в S^2 -модели. Для этих решений вторая гомотопическая группа нетривиальна: $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Соответствующие статические решения с нетривиальным топологическим зарядом были найдены и проанализированы в [3].

Как уже было отмечено, лагранжиан модели Скимма может быть записан в терминах элементов алгебры $\mathfrak{su}(2)$. Так как алгебры групп $SU(2)$ и $SO(3)$ изоморфны, то модель Скимма можно рассматривать как $SO(3)$ -модель, пространством-мишенью которой является само групповое многообразие. С этой целью в настоящей статье используется известная (см., например, [4]), но не очень широко применяемая явная параметризация группы вращений $SO(3)$, т.е. мы работаем непосредственно с трехмерным групповым многообразием. Поскольку фундаментальная группа группы вращений $SO(3)$ нетривиальна ($\pi(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$), то топологически-нетривиальные решения появляются уже в одномерном случае. Соответствующие статические решения найдены в явном виде. Проведен их анализ и сравнение со статическими решениями в S^2 -модели.

Явная параметризация группы $SO(3)$, используемая в настоящей статье, позволяет провести обобщение. Хорошо известно, что групповое многообразие $SO(3)$ диффеоморфно трехмерному проективному пространству $\mathbb{RP}^3$ (см., например, [5]). Это позволяет обобщить $SO(3)$ -модель Скимма на случай произвольных проективных пространств над полем вещественных чисел, т.е. когда пространством-мишенью является произвольное проективное пространство $\mathbb{RP}^n = S^n/\mathbb{Z}_2$. Его можно параметризовать точками евклидова пространства $\{\omega^i\} \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$, лежащими внутри шара $\omega = \sqrt{\omega^i \omega_i} \leq \pi$, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки граничной сферы радиуса π . При такой параметризации проективных пространств лагранжиан $\mathbb{RP}^n$ -моделей зависит от n полей $\omega^i(x)$, и инвариантен относительно дискретных локальных преобразований $\omega^i \rightarrow \omega^i + 2\pi \omega^i / \omega$. В отличие от калибровочных моделей, в каждой точке пространства-времени группой симметрии является не группа Ли, а дискретная группа $\mathbb{Z}$ сдвигов на постоянный вектор. При этом представление группы сдвигов локально и зависит от точки пространства-времени, так как направление вектора меняется непрерывно.

Мы начнем рассмотрение с описания явной параметризации группы $O(3)$. В разделах 3, 4 и 5 мы рассмотрим лагранжианы соответственно для $SO(3)$ -, $SU(2)$ - и S^2 -моделей и обсудим их связь. В разделах 6 и 7 будут найдены статические решения для S^2 - и $SO(3)$ -моделей и проведено их сравнение. В восьмом разделе $SO(3)$ -модель будет обобщена на случай произвольных действительных проективных пространств $\mathbb{RP}^d$.

2. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ГРУППЫ ТРЕХМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ

При проведении расчетов с группой $O(3)$ удобно использовать явную параметризацию элементов группы элементами ее алгебры. Элемент алгебры $\mathfrak{so}(3)$ может быть представлен в виде произвольной антисимметричной (3×3) -матрицы

$$(\omega \varepsilon)_i{}^j = (\omega^k \varepsilon_k)_i{}^j = \omega^k \varepsilon_{ki}{}^j \in \mathfrak{so}(3), \quad (1)$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, $\varepsilon_{123} = 1$, а подъем и опускание индексов производится с помощью символов Кронекера. Здесь первый индекс k нумерует базис алгебры, а индексы i, j рассматриваются как матричные. Элемент алгебры параметризуется трехмерным вектором $\omega^k \in \mathbb{R}^3$, и, значит, группа $\mathbb{O}(3)$ является трехмерной. Каждому элементу алгебры соответствует элемент группы $\mathbb{SO}(3)$ (связной компоненты единицы):

$$S_{(+)}i^j = (e^{(\omega\varepsilon)})_i^j = \delta_i^j \cos \omega + \frac{(\omega\varepsilon)_i^j}{\omega} \sin \omega + \frac{\omega_i \omega^j}{\omega^2} (1 - \cos \omega) \in \mathbb{SO}(3), \quad (2)$$

где $\omega = \sqrt{\omega^i \omega_i}$ — модуль вектора ω^i . С помощью прямых вычислений нетрудно убедиться, что $S_{(+)}i^j$ является действительно ортогональной матрицей. Обратно, любую ортогональную матрицу с положительным определителем можно представить в виде (2) для некоторого вектора ω^i . Отметим, что в отличие от элемента алгебры элемент группы имеет как симметричную, так и антисимметричную части. Элемент группы $\mathbb{SO}(3)$ инвариантен относительно сдвига вектора $\omega^i \rightarrow \omega^i + 2\pi\omega^i/\omega$:

$$S_{(+)}i^j \left(\omega^k + 2\pi \frac{\omega^k}{\omega} \right) = S_{(+)}i^j (\omega^k),$$

и это единственная инвариантность. При сдвиге вектора ω^i меняется только его длина $\omega \rightarrow \omega + 2\pi$, а направление остается неизменным. В инвариантности матрицы вращений нетрудно убедиться, если заметить, что отношение ω^i/ω , определяющее направление вектора ω^i , остается неизменным при произвольном сдвиге:

$$\frac{\omega^i}{\omega} \rightarrow \frac{\omega^i + c\omega^i/\omega}{\omega + c} = \frac{\omega^i}{\omega}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Тем самым элемент группы вращений параметризуется точками евклидова пространства $\omega^i \in \mathbb{R}^3$ с единственным отношением эквивалентности

$$\omega^i \approx \omega^i + 2\pi \frac{\omega^i}{\omega}. \quad (3)$$

При этом неопределенность в нуле раскрывается по радиальным направлениям $\omega^i = \epsilon k^i$, $\epsilon \rightarrow 0$, т.е. начало координат отождествляется со всеми сферами радиуса $2\pi m$, $m = 1, 2, \dots$.

Вектор ω^i параметризует группу $\mathbb{SO}(3)$ следующим образом. Направление вектора ω^i совпадает с осью вращения, а модуль вектора ω равен углу поворота. Таким образом, каждый элемент группы $\mathbb{SO}(3)$ отождествляется с точкой трехмерного шара $\mathbb{B}_\pi^3$ радиуса π с центром в начале координат. При этом различным внутренним точкам шара соответствуют различные вращения, а диаметрально противоположные точки граничной сферы необходимо отождествить, так как повороты вокруг фиксированной оси на углы π и $-\pi$ приводят к одному и тому же результату.

Полная группа трехмерных вращений $\mathbb{O}(3)$ состоит из двух несвязных компонент — ортогональных матриц с положительным $S_{(+)}$ и отрицательным $S_{(-)}$ определителем.

Элементы полной группы $\mathbb{O}(3)$ параметризуются элементом алгебры (1), например, следующим образом:

$$S_{(\pm)i}{}^j = \delta_i^j \cos \omega + \frac{(\omega \varepsilon)_i{}^j}{\omega} \sin \omega + \frac{\omega_i \omega^j}{\omega^2} (\pm 1 - \cos \omega) \in \mathbb{O}(3). \quad (4)$$

Отметим, что каждому элементу алгебры $(\omega \varepsilon)_i{}^j \in \mathfrak{so}(3)$ соответствуют два элемента группы $S_{(\pm)} \in \mathbb{O}(3)$ — по одному из каждой компоненты.

Обратные матрицы имеют вид

$$S_{(\pm)i}^{-1}{}^j(\omega^k) = S_{(\pm)i}{}^j(-\omega^k) = \delta_i^j \cos \omega - \frac{(\omega \varepsilon)_i{}^j}{\omega} \sin \omega + \frac{\omega_i \omega^j}{\omega^2} (\pm 1 - \cos \omega) \in \mathbb{O}(3), \quad (5)$$

т.е. соответствуют противоположному вектору $-\omega^i \in \mathbb{R}^3$. Другими словами, обратный элемент группы представляет собой поворот евклидова пространства вокруг той же оси, но на противоположный угол.

Свернем матрицу вращений $S_{(\pm)i}{}^j$ с вектором ω_j : $S_{(\pm)i}{}^j \omega_j = \pm \omega_i$. Это значит, что вектор ω^i является собственным вектором матриц вращений с собственными значениями ± 1 . Другими словами, вращения $S_{(+)}$ и $S_{(-)}$ соответственно оставляют ось вращения без изменения или меняют ее направление на противоположное.

Допустим, что элементы группы $\mathbb{O}(3)$ гладко зависят от точки произвольного многообразия $\mathbb{M}$, т.е. $\omega^i(x): \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{O}(3)$. Введем обозначение

$$l_{(\pm)\alpha i}{}^j = (\partial_\alpha S_{(\pm)}^{-1} S_{(\pm)})_i{}^j. \quad (6)$$

С помощью прямых вычислений можно убедиться в справедливости следующей формулы:

$$\begin{aligned} l_{(\pm)\alpha i}{}^j = & \mp \frac{(\partial_\alpha \omega \varepsilon)_i{}^j}{\omega} \sin \omega - \frac{\partial_\alpha \omega (\omega \varepsilon)_i{}^j}{\omega} \left(1 \mp \frac{\sin \omega}{\omega} \right) \pm \\ & \pm \frac{\partial_\alpha \omega_i \omega^j - \omega_i \partial_\alpha \omega^j}{\omega^2} (\pm 1 - \cos \omega) \in \mathfrak{so}(3). \end{aligned} \quad (7)$$

Эта матрица антисимметрична по своим индексам и, значит, является элементом алгебры $\mathfrak{so}(3)$. Она представляет собой тривиальную $\mathbb{O}(3)$ -связность, для которой тензор кривизны тождественно равен нулю (чистая калибровка). В дальнейшем тривиальную $\mathbb{SO}(3)$ -связность будем обозначать $l_{\alpha i}{}^j = l_{(+)\alpha i}{}^j$.

Из приведенной параметризации группы вращений следует, что групповое многообразие компактно и ориентируемо. Как многообразие связная компонента единицы $\mathbb{SO}(3)$ диффеоморфна трехмерному проективному пространству $\mathbb{RP}^3$. Она не является односвязной: ее фундаментальной группой является $\mathbb{Z}_2$.

3. ЛАГРАНЖИАНЫ МОДЕЛИ СКИРМА

Рассмотрим n -мерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ с декартовыми координатами x^α , $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$. Пусть в каждой точке пространства Минковского задан элемент группы вращений $\omega^i(x)$. Для описания π -мезонов Скирм предложил следующее действие [1]:

$$S = \int dx L = \int dx \left(-\frac{\varrho}{4} \text{tr}(l_\alpha l^\alpha) - \frac{\kappa}{8} \text{tr}([l_\alpha, l_\beta][l^\alpha, l^\beta]) \right), \quad (8)$$

где ϱ и κ — константы связи, а квадратные скобки обозначают коммутатор матриц. Скирм рассматривал l_α как тривиальную $\text{SU}(2)$ -связность и параметризовал ее четырехмерным вектором в изотопическом пространстве, принимающим значения на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$, т.е. рассматривал действие (8) как $\text{SU}(2)$ -модель или, что эквивалентно, как $\mathbb{S}^3$ -модель. Мы будем рассматривать действие (8) как действие для $\mathbb{SO}(3)$ -модели, используя параметризацию группы вращений из предыдущего раздела. Сразу отметим, что эти модели неэквивалентны. Подстановка явного выражения для l_α через групповые параметры (7) приводит к следующему лагранжиану для трех независимых скалярных полей ω^i :

$$\begin{aligned} L = & \varrho \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \omega^2 + (1 - \cos \omega) \frac{(\partial_\alpha \omega \partial_\alpha \omega) - \partial_\alpha \omega^2}{\omega^2} \right) + \\ & + \kappa \left((1 - \cos \omega) \frac{(\partial_\alpha \omega \partial_\alpha \omega) \partial_\beta \omega^2 - (\partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega) \partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega}{\omega^2} + (1 - \cos \omega)^2 \times \right. \\ & \times \left. \frac{(\partial_\alpha \omega \partial_\alpha \omega)^2 - (\partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega)^2 - 2(\partial_\alpha \omega \partial_\alpha \omega) \partial_\beta \omega^2 + 2(\partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega) \partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega}{\omega^4} \right), \quad (9) \end{aligned}$$

где введено обозначение для скалярного произведения

$$(\partial_\alpha \omega \partial_\alpha \omega) = \partial_\alpha \omega^i \partial_\alpha \omega_i \neq \partial_\alpha \omega^2.$$

В этом выражении по повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование с метрикой Минковского $\eta_{\alpha\beta}$, и мы для простоты не делаем различия между нижними и верхними индексами. Три поля $\omega^i(x)$, от которых зависит лагранжиан, являются независимыми динамическими переменными, на которые не наложены никакие дополнительные условия, кроме отношения эквивалентности (3). Эти поля являются скалярами относительно преобразования координат в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ и компонентами вектора относительно глобальных вращений евклидова пространства-мишени $\mathbb{R}^3$. Можно проверить, что лагранжиан (9) инвариантен относительно группы Пуанкаре, действующей в пространстве Минковского, глобальных $\mathbb{O}(3)$ вращений, действующих в пространстве-мишени $\omega^i \in \mathbb{R}^3$, и локальных сдвигов (3). Последнее преобразование означает следующее. Длину вектора $\omega^i \in \mathbb{R}^3$ в каждой точке $x \in \mathbb{R}^{1,n-1}$ можно менять на постоянную величину, кратную 2π . В то же время это дискретное преобразование является локальным, поскольку направление вектора ω^i меняется от точки к

точке. В силу этой инвариантности мы будем считать, что вектор ω^i лежит внутри шара радиуса π с центром в начале координат пространства-мишени $\omega^i \in \mathbb{B}_\pi^3 \subset \mathbb{R}^3$.

Для исследования модели Скирма в виде (9) вместо компонент ω^i удобно рассматривать четыре новые переменные: длину вектора ω^i (угол поворота ω) и его направление (ось вращения k^i)

$$\omega = \sqrt{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2}, \quad k^i = \frac{\omega^i}{\omega}. \quad (10)$$

По определению вектор k^i имеет единичную длину: $(k, k) = k^i k_i = 1$. В терминах новых переменных лагранжиан (9) принимает вид

$$\begin{aligned} L = & \varrho \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha \omega^2 + (1 - \cos \omega) (\partial_\alpha k \partial_\alpha k) \right) + \\ & + \kappa \left((1 - \cos \omega) [(\partial_\alpha k \partial_\alpha k) \partial_\beta \omega^2 - (\partial_\alpha k \partial_\beta k) \partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega] + \right. \\ & \left. + (1 - \cos \omega)^2 [(\partial_\alpha k \partial_\alpha k)^2 - (\partial_\alpha k \partial_\beta k)^2] \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Напомним, что $(\partial_\alpha k \partial_\alpha k) = \partial_\alpha k^i \partial_\alpha k_i$. Преобразование (3) меняет только длину вектора:

$$\omega \rightarrow \omega + 2\pi, \quad k^i \rightarrow k^i. \quad (12)$$

Отсюда сразу следует инвариантность лагранжиана (11) относительно преобразований (12). Более того, инвариантным является каждое слагаемое само по себе.

4. СРАВНЕНИЕ С $\mathbb{SU}(2)$ -МОДЕЛЬЮ

Вид действия модели Скирма (8) для групповых параметров зависит только от алгебры, но не от группы, которая является пространством-мишенью. Чтобы продемонстрировать зависимость модели от группы, рассмотрим $\mathbb{SU}(2)$ -модель. Элемент алгебры $\mathfrak{su}(2)$ имеет вид

$$\omega^k \frac{i}{2} \sigma_{k \ A}^{\ B} \in \mathfrak{su}(2), \quad A, B = 1, 2,$$

где σ_k – матрицы Паули. Множитель $i/2$ выбран для того, чтобы коммутаторы векторов базиса имели одинаковый вид для алгебр $\mathfrak{su}(2)$ и $\mathfrak{so}(3)$. Соответствующий элемент группы $\mathbb{SU}(2)$ имеет вид

$$U_A^{\ B} = (e^{i\omega \sigma/2})_A^{\ B} = \delta_A^{\ B} \cos \frac{\omega}{2} + i \frac{\omega^k \sigma_{k \ A}^{\ B}}{\omega} \sin \frac{\omega}{2} \in \mathbb{SU}(2). \quad (13)$$

Из вида элемента группы следует равенство

$$U_A^{\ B} \left(\omega^i + 4\pi \frac{\omega^i}{\omega} \right) = U_A^{\ B} (\omega^i),$$

т.е. для группы $\mathbb{SU}(2)$ в пространстве параметров имеется отношение эквивалентности

$$\omega^i \approx \omega^i + 4\pi \frac{\omega^i}{\omega}. \quad (14)$$

По сравнению с отношением эквивалентности (3) для группы $\mathbb{SO}(3)$ сдвиг происходит на вектор вдвое большей длины. Тем самым групповое многообразие параметризуется внутренними точками шара $\mathbb{B}_{2\pi}^3$ радиуса 2π . При этом все точки граничной сферы необходимо отождествить. Это является вторым отношением эквивалентности в пространстве параметров:

$$\omega_1^i|_{\omega_1=2\pi} \approx \omega_2^i|_{\omega_2=2\pi}. \quad (15)$$

Дополнительное соотношение эквивалентности связано с отсутствием третьего слагаемого в (13) по сравнению с (2). В этом также есть отличие от группы вращений, для которой отождествляются только диаметрально противоположные точки граничной сферы, что входит в отношение эквивалентности (3). Можно показать, что в пространстве параметров для группы $\mathbb{SU}(2)$ других отношений эквивалентности, кроме (14) и (15), не существует.

Нетрудно проверить, что лагранжиан модели Скирма имеет один и тот же вид (11) для обеих групп $\mathbb{SU}(2)$ и $\mathbb{SO}(3)$. Разница сводится к отношениям эквивалентности (3) и (14) и отождествлению точек граничной сферы (15). В силу последнего обстоятельства возникает отличие в фундаментальных группах, что приводит к существованию топологически-нетривиальных одномерных решений в $\mathbb{SO}(3)$ -модели Скирма.

5. $\mathbb{S}^2$ -МОДЕЛЬ

В течение многих лет большое внимание привлекает $\mathbb{S}^2$ -модель. Поскольку $\mathbb{SO}(3)$ -модель Скирма и $\mathbb{S}^2$ -модель описываются трехмерными векторами в пространстве-мишени, и любой вектор заданной длины можно представить как результат действия матрицы вращений на фиксированный вектор той же длины, то возникает вопрос о связи этих моделей. Несмотря на то что модели неэквивалентны, между ними существует связь, которую мы рассмотрим в настоящем разделе.

Свяжем $\mathbb{SO}(3)$ -модель из раздела 3 с $\mathbb{S}^2$ -моделью. Пусть в каждой точке пространства Минковского $\mathbb{R}^{1,n-1}$ задан трехмерный единичный вектор $n^i(x)$, $(n, n) = 1$. Это значит, что пространством-мишенью является двумерная сфера $\mathbb{S}^2$. Декартовы координаты в пространстве-мишени будем обозначать заглавными буквами X, Y, Z . Рассмотрим лагранжиан, предложенный Фаддеевым для $\mathbb{S}^2$ -модели [6]:

$$\begin{aligned} L_F &= m^2(\partial_\alpha n \partial_\alpha n) + \frac{1}{e^2}(n^i \varepsilon_{ijk} \partial_\alpha n^j \partial_\beta n^k)^2 = \\ &= m^2(\partial_\alpha n \partial_\alpha n) + \frac{1}{e^2}[(\partial_\alpha n \partial_\alpha n)^2 - (\partial_\alpha n \partial_\beta n)^2]. \end{aligned} \quad (16)$$

Эта модель имеет нетривиальные топологические решения, связанные с третьей гомотопической группой $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ [7].

Произвольный единичный вектор $n \in \mathbb{S}^2$ можно параметризовать элементом группы трехмерных вращений

$$n^i = n_0^j S_j^i(\omega), \quad (17)$$

где n_0^i — произвольный фиксированный вектор единичной длины. Это соответствие не является взаимно однозначным, так как два заданных вектора n и n_0 определяют элемент группы вращений неоднозначно. Забегая вперед, скажем, что $\mathbb{SQ}(3)$ - и $\mathbb{S}^2$ -модели неэквивалентны. При параметризации (17) лагранжиан (16) примет вид

$$L_F = m^2 n_0^i n_0^j \partial_\alpha S_i^k \partial_\alpha S_{jk} + \\ + \frac{1}{e^2} n_0^i n_0^j n_0^k n_0^l (\partial_\alpha S_i^m \partial_\alpha S_{jm} \partial_\beta S_k^n \partial_\beta S_{ln} - \partial_\alpha S_i^m \partial_\beta S_{jm} \partial_\beta S_k^n \partial_\alpha S_{ln}).$$

Он зависит от трех скалярных полей $\omega^i(x)$, параметризующих группу вращений, и фиксированного вектора n_0 . Усредним действие по всем углам, определяющим вектор n_0 . С этой целью воспользуемся формулами усреднения, которые проверяются простыми вычислениями:

$$\langle n_0^i n_0^j \rangle = \frac{1}{4\pi} \int d\Theta d\Phi \sin \Theta n_0^i n_0^j = \frac{1}{3} \delta^{ij}, \\ \langle n_0^i n_0^j n_0^k n_0^l \rangle = \frac{1}{4\pi} \int d\Theta d\Phi \sin \Theta n_0^i n_0^j n_0^k n_0^l = \frac{1}{15} (\delta^{ij} \delta^{kl} + \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}),$$

где Θ, Φ — полярные углы в пространстве-мишени. После усреднения получим новый лагранжиан

$$\langle L_F \rangle = -\frac{m^2}{3} \text{tr}(l_\alpha l_\alpha) - \frac{1}{15e^2} \left[\frac{1}{2} \text{tr}([l_\alpha, l_\beta][l_\alpha, l_\beta]) - \text{tr}^2(l_\alpha l_\alpha) + \text{tr}^2(l_\alpha l_\beta) \right].$$

Он содержит два дополнительных члена помимо слагаемых модели Скирма (8).

Таким образом, усреднение $\mathbb{S}^2$ -модели по направлениям вектора n_0 приводит к $\mathbb{SQ}(3)$ -модели. Неэквивалентность моделей будет видна на примере статических решений, рассмотренных в следующих разделах.

6. СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ $\mathbb{S}^2$ -МОДЕЛИ

Единичный вектор n в сферической системе координат параметризуется двумя углами Θ и Φ :

$$n^1 = \sin \Theta \cos \Phi, \quad n^2 = \sin \Theta \sin \Phi, \quad n^3 = \cos \Theta, \quad (18)$$

которые описывают две независимые степени свободы. Для простоты мы будем исследовать статические решения в двумерной $\mathbb{S}^2$ -модели. В этом случае второе слагаемое в лагранжиане (16) не дает вклада в уравнения для статических решений. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только первого слагаемого.

В угловых координатах действие, соответствующее первому слагаемому в (16), принимает вид

$$S = m^2 \int dx (\partial_\alpha \Theta^2 + \sin^2 \Theta \partial_\alpha \Phi^2) \quad (19)$$

и приводит к уравнениям движения

$$\frac{1}{m^2} \frac{\delta S}{\delta \Theta} = -2\Box\Theta + 2\sin\Theta \cos\Theta \partial_\alpha \Phi^2 = 0, \quad (20)$$

$$\frac{1}{m^2} \frac{\delta S}{\delta \Phi} = -2\partial_\alpha (\partial_\alpha \Phi \sin^2 \Theta) = 0, \quad (21)$$

где $\Box = \partial_\alpha \partial_\alpha$ – оператор Д'Аламбера.

Рассмотрим двумерное пространство Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ с декартовыми координатами t, x и проанализируем статические решения. Для $\Theta = \Theta(x)$ и $\Phi = \Phi(x)$ уравнения движения (20), (21) принимают вид

$$\Theta'' - \sin\Theta \cos\Theta \Phi'^2 = 0, \quad (22)$$

$$(\Phi' \sin^2 \Theta)' = 0, \quad (23)$$

где штрих означает дифференцирование по x . Будем искать решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2(L)$ на конечном отрезке $x \in [0, L]$. Любое решение этой системы уравнений принадлежит одному из следующих четырех классов (постоянные интегрирования ниже обозначены через b, c, x_0 и Φ_0).

Вырожденные решения I.

$$\Theta = 0, \quad \Phi(x) \in C^2(L). \quad (24)$$

В этом случае вектор n направлен вдоль оси Z , и никакого вращения не происходит.

Вырожденные решения II.

$$\Theta = \frac{\pi}{2}, \quad \Phi = bx + x_0. \quad (25)$$

При этом вектор n по мере движения вдоль x равномерно вращается в плоскости X, Y .

Вырожденные решения III.

$$\Theta = bx + x_0, \quad \Phi = \Phi_0. \quad (26)$$

При этом вектор n по мере движения вдоль x равномерно вращается в плоскости $\Phi = \Phi_0$. Эти решения по сути дела совпадают с вырожденными решениями II. Чтобы показать это, воспользуемся свободой в выборе координат в пространстве-мишени и выберем новую ось Z' перпендикулярно плоскости $\Phi = \Phi_0$. Тогда в новой системе координат вырожденные решения III перейдут в вырожденные решения II.

Общее положение. В этом случае уравнение (23) имеет решение

$$\Phi' \sin^2 \Theta = c, \quad c \neq 0. \quad (27)$$

Тогда уравнение (22) принимает вид

$$\Theta'' = c^2 \frac{\cos \Theta}{\sin^3 \Theta}.$$

Оно легко интегрируется:

$$\cos \Theta = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} \sin[b(x + x_0)], \quad |b| > |c|. \quad (28)$$

После этого интегрируем уравнение (27):

$$\operatorname{tg}(\Phi + \Phi_0) = \frac{c}{b} \operatorname{tg}[b(x + x_0)]. \quad (29)$$

Таким образом, формулы (28), (29) дают статические решения общего положения. Постоянные интегрирования x_0 и Φ_0 соответствуют сдвигам координат, и для удобства их можно положить равными нулю. Постоянная b соответствует выбору масштаба координаты x . При фиксированной длине отрезка L его менять нельзя. Отметим, что вырожденные решения II получаются из решений общего положения в пределе $|b| = |c|$.

Можно проверить, что в случае общего положения вектор n по мере движения вдоль x равномерно вращается в плоскости, наклоненной к плоскости X, Y под углом $\arccos(c/b)$. Это значит, что по сути дела имеется только два существенно различных решения уравнений Эйлера–Лагранжа. Это, во-первых, вырожденные решения I, когда вектор n не меняется по мере движения вдоль x . Во-вторых, остальные решения описывают равномерное вращение вектора n в произвольной, но фиксированной плоскости. В этом случае ось вращения всегда перпендикулярна вектору n . Деление этих решений на вырожденные и решения общего положения связано с ориентацией системы координат относительно плоскости вращения. Отметим, что во всех случаях ориентация декартовых осей X, Y, Z в пространстве-мишени может быть произвольной по отношению к пространственной координате x .

Все найденные решения S^2 -модели гомотопны нулю, так как фундаментальная группа тривиальна: $\pi(S^2) = 0$. Это значит, что в S^2 -моделях одномерные топологически-нетривиальные решения отсутствуют.

Энергия двумерной S^2 -модели для статических решений равна

$$E = \int_0^L dx (\Theta'^2 + \sin^2 \Theta \Phi'^2).$$

Прямая подстановка решений в этот интеграл приводит к следующему значению:

$$E = \begin{cases} 0, & \text{вырожденные решения I,} \\ b^2 L, & \text{остальные решения.} \end{cases}$$

Тем самым энергия статических решений конечна при конечных L . При $bL = 2\pi m$, $m = 1, 2, \dots$, решения периодичны. В этом случае их можно рассматривать как заданные на окружности.

Проанализируем устойчивость полученных решений. Вторая вариация энергии имеет вид

$$\delta^2 E = \int_0^L dx (\delta\Theta'^2 + \cos(2\Theta)\Phi'^2\delta\Theta^2 + 2\sin(2\Theta)\Phi'\delta\Theta\delta\Phi' + \sin^2\Theta\delta\Phi'^2).$$

В этом выражении вариации $\delta\Theta$, $\delta\Theta'$, $\delta\Phi$ и $\delta\Phi'$ следует считать независимыми функциями. Простой анализ показывает, что вырожденные решения I дают абсолютный минимум энергии, а остальные решения соответствуют седловым точкам.

7. СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ $\mathbb{SO}(3)$ -МОДЕЛИ СКИРМА

Уравнения Эйлера–Лагранжа для $\mathbb{SO}(3)$ -модели Скирма (11) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta\omega} = & -\varrho\Box\omega + \varrho\sin\omega(\partial_\alpha k\partial_\alpha k) - 2\kappa(1 - \cos\omega) \times \\ & \times [(\partial_{\alpha\beta}^2 k\partial_\alpha k)\partial_\beta\omega + (\partial_\alpha k\partial_\alpha k)\Box\omega - (\partial_\alpha k\Box k)\partial_\alpha\omega - (\partial_\alpha k\partial_\beta k)\partial_\alpha\omega\partial_\beta\omega] - \\ & - \kappa\sin\omega [(\partial_\alpha k\partial_\alpha k)\partial_\beta\omega^2 - (\partial_\alpha k\partial_\beta k)\partial_\alpha\omega\partial_\beta\omega] + \\ & + 2\kappa(1 - \cos\omega)\sin\omega [(\partial_\alpha k\partial_\alpha k)^2 - (\partial_\alpha k\partial_\beta k)^2] = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta k_i} = & -2\varrho(1 - \cos\omega)[\Box k^i + (\partial_\alpha k\partial_\alpha k)k^i] - 2\varrho\sin\omega\partial_\alpha k^i\partial_\alpha\omega - \\ & - 2\kappa(1 - \cos\omega)[\Box k^i\partial_\alpha\omega^2 + \partial_\alpha k^i\partial_{\alpha\beta}^2\omega\partial_\beta\omega - \partial_{\alpha\beta}^2 k^i\partial_\alpha\omega\partial_\beta\omega - \partial_\alpha k^i\Box\omega\partial_\alpha\omega] - \\ & - 4\kappa(1 - \cos\omega)^2 \times \\ & \times [(\partial_\alpha k\partial_\alpha k)\Box k^i + (\partial_{\alpha\beta}^2 k\partial_\beta k)\partial_\alpha k^i - (\Box k\partial_\alpha k)\partial_\alpha k^i - (\partial_\alpha k\partial_\beta k)\partial_{\alpha\beta}^2 k^i] - \\ & - 8\kappa(1 - \cos\omega)\sin\omega [(\partial_\beta k\partial_\beta k)\partial_\alpha k^i - (\partial_\alpha k\partial_\beta k)\partial_\beta k^i]\partial_\alpha\omega - \\ & - 2\kappa(1 - \cos\omega)[(\partial_\alpha k\partial_\alpha k)\partial_\beta\omega^2 - (\partial_\alpha k\partial_\beta k)\partial_\alpha\omega\partial_\beta\omega]k^i - \\ & - 4\kappa(1 - \cos\omega)^2 [(\partial_\alpha k\partial_\alpha k)^2 - (\partial_\alpha k\partial_\beta k)^2]k^i = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

При варьировании действия по единичному вектору k_i мы воспользовались формулой, учитывающей связь $(k, k) = 1$:

$$\frac{\delta S}{\delta k_i} = \frac{\bar{\delta} S}{\bar{\delta} k_j}(\delta_j^i - k^i k_j),$$

где вариационная производная в правой части берется без учета связи.

Нетрудно убедиться, что для статических решений $\omega(x)$, $k^i(x)$ в двумерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,1}$ все слагаемые, зависящие от константы связи κ , сокращаются. Это значит, что для исследования одномерных статических решений в $\mathbb{SO}(3)$ -модели достаточно рассмотреть лагранжиан

$$L = \varrho \left[\frac{1}{2} \partial_\alpha \omega^2 + (1 - \cos\omega)(\partial_\alpha \theta^2 + \sin^2\theta \partial_\alpha \varphi^2) \right], \quad (32)$$

где использована сферическая система координат в пространстве-мишени:

$$k^1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad k^2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad k^3 = \cos \theta. \quad (33)$$

Чтобы отличить единичный вектор k от вектора n , рассмотренного в предыдущем разделе, мы используем строчные греческие буквы для обозначения угловых координат вектора k .

Уравнения движения в статическом случае принимают вид

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\delta S}{\delta \omega} = -\omega'' + \sin \omega (\theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2) = 0, \quad (34)$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\delta S}{\delta \theta} = -2((1 - \cos \omega) \theta')' + 2(1 - \cos \omega) \sin \theta \cos \theta \varphi'^2 = 0, \quad (35)$$

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\delta S}{\delta \varphi} = -2((1 - \cos \omega) \sin^2 \theta \varphi')' = 0. \quad (36)$$

Будем искать решение этой системы дифференциальных уравнений в классе функций $C^2(L)$. Любое решение системы уравнений (34)–(36) принадлежит одному из следующих пяти классов (константы интегрирования обозначены ниже через $a, b, c, x_0, \varphi_0, \theta_0$ и u_0).

Вырожденные решения I. В этом случае угол вращения является линейной функцией

$$\omega = bx + x_0,$$

а ось вращения остается неподвижной:

$$\theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \text{или} \quad \theta = 0, \quad \varphi(x) \in C^2(L).$$

Для этого решения вектор $n^i = n_0^j S_j^i(\omega)$ при движении вдоль x равномерно вращается вокруг вектора k , имеющего произвольное направление. В отличие от S^2 -модели, вектор n не обязательно перпендикулярен оси вращения.

Вырожденные решения I дают пример статических топологически-нетривиальных решений с топологическим зарядом 0 или 1. Если угол ω меняется в интервале, кратном 4π , то топологический заряд равен 0, так как соответствующий контур всегда может быть непрерывно деформирован в точку. На рисунке показана соответствующая непрерывная деформация замкнутого контура при $0 < \omega < 4\pi$ в точку. Деформация показана в плоскости, проходящей через вектор k , определяющий направление вращения. Пунктиром показано отождествление противоположных точек граничной окружности. Если же угол ω принимает значения в интервале, содержащем 2π нечетное число раз, то топологический заряд такого решения равен 1.

Вырожденные решения II.

$$\omega = 0, \quad \theta(x), \varphi(x) \in \mathcal{C}^2(L). \quad (37)$$

Для этой серии решений вращения не происходит, так как угол вращения равен нулю.

Вырожденные решения III.

$$\begin{aligned} \cos \frac{\omega}{2} &= \sqrt{1 - \frac{c^2}{4b^2}} \sin[b(x + x_0)], \quad 2|b| \geq |c| \neq 0, \\ \theta &= \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_0) &= \frac{c}{2b} \operatorname{tg}[b(x + x_0)]. \end{aligned}$$

Для этих решений полярный угол φ является монотонной функцией x , т.е. ось вращения k^i вращается в плоскости X, Y . При этом угол вращения меняется в конечном интервале

$$2 \arccos \sqrt{1 - \frac{c^2}{4b^2}} < \omega < 2\pi - 2 \arccos \sqrt{1 - \frac{c^2}{4b^2}}.$$

Нетрудно проверить, что эти решения гомотопны нулю.

Вырожденные решения IV.

$$\begin{aligned} \cos \frac{\omega}{2} &= \sqrt{1 - \frac{c^2}{4b^2}} \sin[b(x + x_0)], \quad 2|b| \geq |c| \neq 0, \\ \operatorname{tg}(\theta + \theta_0) &= \frac{c}{2b} \operatorname{tg}[b(x + x_0)], \\ \varphi &= \varphi_0. \end{aligned}$$

Эти решения по сути совпадают с вырожденными решениями III, только ось вращения вращается в плоскости $\varphi = \varphi_0$.

Общее положение. Для решения системы уравнений (34)–(36) в случае общего положения введем новую координату

$$u = \int^x \frac{dy}{1 - \cos \omega(y)}. \quad (38)$$

Поскольку $dx/du = 1 - \cos \omega \geq 0$, то координата u увеличивается с ростом x . Тогда уравнения для θ и φ (35), (36) в точности совпадут с уравнениями для Θ и Φ (22), (23), в которых дифференцирование по x нужно заменить дифференцированием по u . Поскольку эти уравнения были проанализированы в предыдущем разделе, то нам остается только решить уравнение (34). В случае общего положения оно принимает вид

$$\omega'' = c^2 \frac{\sin \omega}{(1 - \cos \omega)^2}, \quad c \neq 0. \quad (39)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\cos \frac{\omega}{2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{4b^2}} \sin[b(x + x_0)], \quad 2|b| \geq |c|. \quad (40)$$

После этого интеграл (38) легко берется:

$$\operatorname{tg}(cu) = \frac{c}{2b} \operatorname{tg}[b(x + x_0)], \quad (41)$$

где постоянная интегрирования не существенна. Решение уравнений (35), (36) имеет вид

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} \sin[c(u + u_0)], \quad |c| > |a| \neq 0, \\ \operatorname{tg}(\varphi + \varphi_0) &= \frac{a}{c} \operatorname{tg}[c(u + u_0)]. \end{aligned}$$

Простой геометрический анализ показывает, что решения общего положения по существу совпадают с вырожденными решениями III и IV, только ось вращения вращается в плоскости, наклоненной под углом $\arccos(a/c)$ к плоскости X, Y .

Для статических решений энергия двумерной $\mathbb{S}\mathbb{O}(3)$ -модели равна

$$E = \int_0^L dx \left(\frac{1}{2} \omega'^2 + (1 - \cos \omega)(\theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2) \right).$$

Прямая подстановка решений в этот интеграл приводит к следующим значениям:

$$E = \begin{cases} 0, & \text{вырожденные решения II,} \\ \frac{1}{2} b^2 L, & \text{вырожденные решения I,} \\ 2b^2 L, & \text{остальные решения.} \end{cases}$$

Энергия конечна при конечных L . Поскольку энергия положительно определена, то вырожденные решения II соответствуют абсолютному минимуму.

8. ПРОЕКТИВНЫЕ $\mathbb{RP}^d$ -МОДЕЛИ

Лагранжиан модели Скирма, записанный в виде (11), можно естественным образом обобщить на случай, когда пространством-мишенью является вещественное проективное пространство произвольной размерности $\mathbb{RP}^d$. Пусть k^i , $i = 1, \dots, d$, — произвольный единичный вектор ($k^2 = 1$) евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим изотопическое векторное $k^i(x)$ и скалярное $\omega(x)$ поля на произвольном пространстве Минковского $x \in \mathbb{R}^{1,n-1}$. Очевидно, что лагранжиан

$$\begin{aligned} L &= A \partial_\alpha \omega^2 + B (\partial_\alpha k \partial_\alpha k) + C (\partial_\alpha k \partial_\alpha k) \partial_\beta \omega^2 + D (\partial_\alpha k \partial_\beta k) \partial_\alpha \omega \partial_\beta \omega + \\ &+ E (\partial_\alpha k \partial_\alpha k)^2 + F (\partial_\alpha k \partial_\beta k)^2 + G (\partial_\alpha \omega^2)^2 + U, \end{aligned} \quad (42)$$

где $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$, $D(\omega)$, $E(\omega)$, $F(\omega)$, $G(\omega)$, $U(\omega)$ — произвольные периодические с периодом 2π функции от ω , инвариантен относительно преобразований (12). В этом лагранжиане так же, как и в модели Скирма, можно перейти к изотопическому векторному полю $\omega^i = \omega k^i$, все компоненты которого являются независимыми. В силу отношения эквивалентности (3) можно считать, что изотопическое векторное поле ω^i принимает значения внутри шара радиуса π , у которого отождествлены диаметрально противоположные точки граничной сферы. Это означает, что поля ω^i принимают значения в произвольном проективном пространстве $\mathbb{RP}^d$.

Это наиболее общий инвариантный лагранжиан, зависящий только от первых производных полей в степени не выше четвертой. Он инвариантен относительно группы Пуанкаре $\mathbb{O}(1, n-1)$, действующей в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1, n-1}$, группы вращений $\mathbb{O}(d)$, действующей в пространстве-мишени $\mathbb{R}^d$, и сдвигов (12). Группу вращений $\mathbb{O}(d)$ можно расширить до группы $\mathbb{O}(d+1)$ (максимальной группы симметрии проективного пространства $\mathbb{RP}^d$), однако дополнительные преобразования будут действовать на поля ω^i нелинейно.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя явную параметризацию группы $\mathbb{SO}(3)$ элементами ее алгебры, мы рассмотрели модель Скирма как $\mathbb{SO}(3)$ -модель, пространством-мишенью которой является само групповое многообразие. Поскольку фундаментальная группа группы вращений нетривиальна, $\pi(\mathbb{SO}(3)) = \mathbb{Z}_2$, то модель допускает существование одномерных топологически-нетривиальных решений. Соответствующие статические решения в двумерной модели Скирма найдены и проанализированы (вырожденные решения I из раздела 7).

Вид действия для $\mathbb{SU}(2)$ - и $\mathbb{SO}(3)$ -моделей Скирма один и тот же, поскольку совпадают их алгебры Ли. Отличие сводится к отношениям эквивалентности в пространстве параметров. Поэтому при построении моделей математической физики помимо действия необходимо также указывать, какое многообразие является пространством-мишенью. И это важно, так как возникают различные топологически-нетривиальные решения уравнений Эйлера–Лагранжа. Например, при рассмотрении спиноров на трехмерном римановом многообразии в ковариантную производную входит $\mathbb{SO}(3)$ -связность, несмотря на то что спиноры преобразуются по представлению унитарной группы $\mathbb{SU}(2)$. Это связано с тем, что в пространстве, касательном к риманову многообразию, на ортогональный репер действует группа $\mathbb{SO}(3)$, а не $\mathbb{SU}(2)$.

Поскольку группа $\mathbb{SO}(3)$ как многообразие диффеоморфна трехмерному действительному проективному пространству $\mathbb{RP}^3$, то $\mathbb{SO}(3)$ -модель допускает естественное обобщение на проективные пространства произвольной размерности $\mathbb{RP}^d$. Это позволило определить новый класс проективных моделей, зависящий от восьми произвольных периодических функций одного аргумента. Поскольку $\pi(\mathbb{RP}^d) = \mathbb{Z}_2$ при $d \geq 2$, то во всех этих моделях возможно существование одномерных топологически-нетривиальных решений.

$\mathbb{SO}(3)$ -модель может иметь применение в геометрической теории дефектов [8]. Для описания статического распределения дислокаций и дисклинаций в упругой среде ис-

пользуется геометрия Римана–Картана. Соответствующее действие инвариантно относительно общих преобразований координат и локальных $\mathbb{SO}(3)$ -вращений. Недавно уравнения теории упругости было предложено использовать для фиксирования системы координат [9]. Это позволило включить классическую теорию упругости в геометрический подход как предельный случай отсутствия дефектов. Поскольку $\mathbb{SO}(3)$ -модель, рассмотренная в настоящей статье, неинвариантна относительно локальных $\mathbb{SO}(3)$ -вращений, то ее можно использовать для фиксирования этой инвариантности. В этом случае при отсутствии дисклинаций геометрическая теория дефектов будет приводить к $\mathbb{SO}(3)$ -модели. Например, лоренцева калибровка для $\mathbb{SO}(3)$ -связности приведет к уравнениям главного кирального поля для группы $\mathbb{SO}(3)$ в отсутствие дисклинаций. Таким образом, геометрическая теория дефектов при отсутствии дислокаций и дисклинаций сведется к уравнениям теории упругости для вектора смещений и к уравнениям главного кирального поля для спиновой структуры.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность И. В. Воловичу, Р. Дандолову, Е. А. Иванову и А. И. Пашневу за обсуждение статьи и полезные замечания. Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 96-15-96131 и 02-01-01084. Гостеприимство Института Эрвина Шредингера (Вена) принимается с большой благодарностью.

Список литературы

- [1] *T. H. R. Skyrme*. Proc. Roy. Soc. London. A. 1961. V. 260. P. 127–138.
- [2] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский*. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980; *Р. Раджараман*. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985; *Л. А. Тхтладжян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986; *W. J. Zakrzewski*. Low Dimensional Sigma Models. Bristol–Philadelphia: Adam Hilger, 1989; *Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк*. Многомерные солитоны. М.: Изд-во РУДН, 2001.
- [3] *А. А. Белагин, А. М. Поляков*. Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22. № 10. С. 503–506.
- [4] *Дж. Эллиот, П. Добер*. Симметрия в физике. Т. II. М.: Мир, 1983.
- [5] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко*. Современная геометрия. Методы и приложения. Изд. 4. М.: Наука, 1998.
- [6] *Л. Д. Фаддеев*. В поисках многомерных солитонов. В сб.: Нелокальные, нелинейные и ненормируемые теории поля. Дубна: ОИЯИ, 1976. С. 207–223.
- [7] *L. Faddeev, A. J. Niemi*. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 1624–1627; *Nature*. 1997. V. 387. P. 58–66; *R. A. Battye, P. Sutcliffe*. Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 4798–4801; *Proc. Roy. Soc. London. A*. 1999. V. 455. P. 4305–4331; *J. Hietarinta, P. Salo*. Phys. Lett. B. 1999. V. 451. P. 60–67.
- [8] *M. O. Katanaev, I. V. Volovich*. Ann. Phys. 1992. V. 216. P. 1–28; 1999. V. 271. P. 203–232.
- [9] *М. О. Катанаев*. ТМФ. 2003. Т. 135. № 2. С. 338–352.

Поступила в редакцию 17.XII.2002 г.,
после доработки 14.IV.2003 г.