Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Л. Малышев, Функциональное интегрирование с “автоморфным” граничным условием и корреляторы третьих компонент спинов в XX -модели Гейзенберга, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 2, 285–298

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf221>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 14:29:53

© 2003 г.

К. Л. Малышев*

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ С “АВТОМОРФНЫМ” ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ И КОРРЕЛЯТОРЫ ТРЕТЬИХ КОМПОНЕНТ СПИНОВ В XX -МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Для производящей функции статических корреляторов третьих компонент спинов в XX -модели Гейзенберга получено новое представление в виде комбинации гауссовых функциональных интегралов по антикоммутирующим переменным. Специфика возникающих функциональных интегралов состоит в том, что часть переменных интегрирования зависит от мнимого времени “автоморфным” образом, т.е. умножается на определенное комплексное число при сдвиге мнимого времени на период. Остальные переменные подчиняются при этом обычным граничным условиям фермионного/бозонного типа. Результаты функционального интегрирования представлены в виде определителей матричных операторов. Окончательно производящая функция корреляторов и статистическая сумма модели вычисляются в подходе дзета-регуляризации. Корректность предложенного функционального определения подтверждается вычислением некоторых корреляционных функций третьих компонент спинов при ненулевой температуре.

Ключевые слова: функциональное интегрирование, XX -модель Гейзенберга, корреляторы, обобщенная дзета-функция.

Посвящается памяти А. Г. Изергина

1. ВВЕДЕНИЕ

Корреляционные функции квантовых моделей, решаемых с помощью анзаца Бете [1], связаны с определителями Фредгольма некоторых линейных интегральных операторов. Например, одно из таких *детерминантных* представлений было получено в работах [2] для простейшего двухточечного одновременного коррелятора в одномерной модели “непроницаемых” бозонов, описываемых квантовым нелинейным уравнением Шредингера с бесконечным взаимодействием. Этот результат был обобщен на случай корреляторов

Результаты статьи были представлены на III Международном семинаре ПОМИ–Флоренция по квантовым группам и интегрируемым системам (Санкт-Петербург, 2–6 июля 2001 г.).

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: malyshev@pdmi.ras.ru

с несовпадающими временными аргументами [3], а также для XX -модели Гейзенберга [4]. Детерминантные представления корреляционных функций позволяют получить классические нелинейные интегрируемые уравнения в частных производных, описывающие эти корреляторы [1], [5].

В свою очередь, имеется возможность вычислять средние квантовых операторов, пользуясь подходом функционального (континуального) интегрирования [6], [7]. В работах [8]–[10] подходы континуального, а также конечнократного интегрирования по антикоммутирующим переменным (по грассмановой алгебре [11]) используются при вычислении одновременных и разновременных температурных корреляторов различных компонент локальных спинов в XX - и XY -моделях Гейзенберга на периодической цепочке длины M .

Функциональные интегралы, полученные в работе [8] для производящей функции корреляторов третьих компонент спинов в XX -модели, приводят к выражениям [12] в виде определителей конечномерных матриц размера $M \times M$. В работе [8] переменные интегрирования подчиняются граничным условиям по мнимому времени фермионного/бозонного типа. Уместно отметить, что XX -модель продолжает привлекать внимание [13]–[15] и детерминантные представления для корреляционных функций также активно изучаются [16].

В настоящей работе для XX -модели сформулирована другая версия представления производящей функции корреляторов третьих компонент спинов в виде комбинации функциональных интегралов. Развиваемый подход использует технический прием, который используется в работе [17], затрагивающей связь теорем об индексе с суперсимметричной квантовой механикой. А именно, для вычисления следов некоторых экспоненциальных операторов в [17] определяется функциональный интеграл по траекториям, преобразующимся “автоморфно” при сдвиге мнимого времени на период. Функциональные интегралы в данной работе также определены на множестве переменных, часть из которых зависит от мнимого времени “автоморфным” образом, т.е. умножается на определенное комплексное число при сдвиге мнимого времени на период, в то время как другая часть подчиняется стандартному условию фермионного/бозонного типа. При этом, в отличие от [17], возникает дополнительная необходимость восстановления инвариантности лагранжиана при сдвиге мнимого времени на период. Для регуляризации возникающих определителей используется метод обобщенной дзета-функции. При этом оказывается, что и в подходе функционального интеграла можно достичь существенного упрощения и определенной наглядности. Некоторые подробности опущены, они могут быть найдены в работах [18].

В физическом контексте основные идеи дзета-регуляризации были сформулированы, например, в работах [19], [20]. Использование дзета-регуляризации для определения регуляризованных определителей операторов (ограниченных на ортогональное дополнение к своему ядру) в математической литературе связывается с работой [21]. Для физики дзета-регуляризация оказалась весьма полезным средством при вычислении, например, инстантонных детерминантов [22], [23], энергии Казимира на многообразиях [24], а также для вычисления аксиальной и конформной аномалий [25]. Для физических

приложений дзета-регуляризация описана в работах [20], [26].

Работа организована следующим образом. Раздел 2 содержит основные обозначения и вводные замечания, касающиеся рассматриваемой XX -модели и производящей функции корреляторов третьих компонент спинов. Вывод представлений для элементов производящей функции в виде гауссовых функциональных интегралов обсуждается в разделе 3. В разделе 4 введена обобщенная дзета-функция в виде интеграла Меллина, и с ее помощью вычислены регуляризованные определители соответствующих матричных операторов. В разделе 5 рассмотрено дифференцирование полученных представлений по параметру и вычислены некоторые конкретные корреляторы. Обсуждение в разделе 6 завершает работу.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Итак, рассмотрим, следуя [1], [4], [5], XX -модель Гейзенберга на периодической цепочке длины M (M четно), взятую в представлении свободных фермионов [27]. Пусть $Q(m)$ есть оператор числа квазичастиц на первых m узлах решетки ($m \leq M$). Будем вычислять среднее оператора $e^{\alpha Q(m)}$ по основному состоянию модели (используемые обозначения стандартны, см. [4], [12])

$$G(\alpha, m) \equiv \langle \Phi_0 | e^{\alpha Q(m)} | \Phi_0 \rangle = \frac{\text{Tr}(e^{\alpha Q(m)} e^{-\beta H_{XX}})}{\text{Tr}(e^{-\beta H_{XX}})}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

где H_{XX} – гамильтониан XX -модели, β – обратная температура и Tr означает след оператора. Используемый в предлагаемой работе гамильтониан H_{XX} возникает в результате преобразования Йордана–Вигнера [27] от исходных матричных спиновых переменных на решетке к каноническим фермионным переменным с антикоммутиационными соотношениями

$$\{c_k, c_n\} = \{c_k^\dagger, c_n^\dagger\} = 0, \quad \{c_k, c_n^\dagger\} = \delta_{kn}.$$

В этих обозначениях $Q(m) \equiv \sum_{k=1}^m c_k^\dagger c_k$.

Можно проверить, что H_{XX} перестановочен с оператором полного числа квазичастиц $\mathcal{N} \equiv Q(M)$, а оператор четности $(-1)^\mathcal{N}$ антикоммутирует с каноническими переменными и перестановочен с H_{XX} как с оператором, билинейным по $c_n, c_n^\dagger$. Поэтому можно ввести два проектора $P^\pm = (1 \pm (-1)^\mathcal{N})/2$ такие, что с их помощью H_{XX} записывается в виде

$$H_{XX} = H^+ P^+ + H^- P^-, \quad H^\pm = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^M (c_n^\dagger c_{n+1} + c_{n+1}^\dagger c_n) + h\mathcal{N} - \frac{hM}{2}, \quad (2)$$

где $h > 0$ – внешнее магнитное поле. Индекс $\pm$ в (2) соответствует выбору граничных условий на цепочке в следующем виде:

$$c_{M+1} = \mp c_1, \quad c_{M+1}^\dagger = \mp c_1^\dagger \quad (\text{для } H^\pm). \quad (3)$$

Учитывая соотношения (2), (3), искомое среднее будем вычислять по формуле [8]–[10]:

$$G(\alpha, m) = \frac{1}{2Z} (G_F^+ Z_F^+ + G_F^- Z_F^- + G_B^+ Z_B^+ - G_B^- Z_B^-), \quad (4a)$$

где

$$\begin{aligned} G_F^\pm Z_F^\pm &\equiv \text{Tr}(e^{\alpha Q(m)} e^{-\beta H^\pm}), \\ G_B^\pm Z_B^\pm &\equiv \text{Tr}(e^{\alpha Q(m)} (-1)^{\mathcal{N}} e^{-\beta H^\pm}) \end{aligned} \quad (4b)$$

(индекс XX опускаем). По аналогии с формулами (4a), (4b) статистическая сумма $Z = \text{Tr}(e^{-\beta H})$ записывается в виде

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} (Z_F^+ + Z_F^- + Z_B^+ - Z_B^-), \\ Z_F^\pm &= \text{Tr}(e^{-\beta H^\pm}), \quad Z_B^\pm = \text{Tr}((-1)^{\mathcal{N}} e^{-\beta H^\pm}). \end{aligned} \quad (5)$$

В работе [17], затрагивающей связь теорем об индексе с суперсимметричной квантовой механикой, содержится следующее наблюдение. Пусть $a, a^\dagger$ – фермиевские канонические операторы. Рассмотрим $\mathcal{U}(1)$ -оператор $Q_\vartheta \equiv e^{i\vartheta a^\dagger a}$, действующий на $a, a^\dagger$ следующим образом:

$$Q_\vartheta a Q_\vartheta^\dagger = e^{-i\vartheta} a, \quad Q_\vartheta a^\dagger Q_\vartheta^\dagger = e^{i\vartheta} a^\dagger.$$

Оказывается, что при вычислении $\text{Tr}(Q_\vartheta e^{-\beta H})$ (H – соответствующий гамильтониан) можно естественно прийти к функциональному интегралу по переменной, подчиненной условию $\xi(\tau) = -e^{i\vartheta} \xi(\tau + \beta)$, означающему, что при сдвиге τ на период β переменная функционального интегрирования преобразуется по представлению $\mathcal{U}(1)$, т.е. “автоморфно” [28]. Заметим, что “автоморфная” зависимость от τ возникла также в работе [29] при исследовании некоторых квантово-статистических спиновых моделей в подходе функционального интегрирования.

Нетрудно заметить, что оператор $e^{\alpha Q(m)}$ обладает аналогичным свойством:

$$e^{\alpha Q(m)} c_n e^{-\alpha Q(m)} = \begin{cases} e^{-\alpha} c_n, & 1 \leq n \leq m, \\ c_n & m < n \leq M, \end{cases} \quad (6)$$

и при вычислении (1) можно использовать идею [17]. “Автоморфное” условие возникает в работах [17] и [29] на всех узлах рассматриваемых там моделей. Можно догадаться, что специфика при вычислении (1) окажется связанной с условием $m \leq M$.

В заключение раздела введем необходимые нам когерентные состояния, отвечающие фермионным операторам $c_n, c_n^\dagger$, для которых имеется фоковский вакуум $|0\rangle$:

$$c_n |0\rangle = \langle 0 | c_n^\dagger = 0 \quad \forall n, \quad \langle 0 | 0 \rangle = 1.$$

А именно, определим состояния

$$\begin{aligned} |x(a)\rangle &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^M c_k^\dagger x_k(a) \right\} |0\rangle \equiv e^{c^\dagger x(a)} |0\rangle, \\ \langle x^*(a)| &= \langle 0 | \exp \left\{ \sum_{k=1}^M x_k^*(a) c_k \right\} \equiv \langle 0 | e^{x^*(a)c}, \end{aligned} \quad (7)$$

где a — дискретный индекс, принимающий значения от 1 до N , и использованы сокращенные обозначения $\sum_{k=1}^M c_k^\dagger x_k \equiv c^\dagger x$, $\prod_{k=1}^M dx_k \equiv dx$ и т.д. Фактически определены N независимых когерентных состояний, зависящих от комплекснозначных грассмановых параметров $x_k^*(a)$, $x_k(a)$. Векторы (7) оказываются собственными для операторов $c_k, c_k^\dagger$:

$$c_k |x(a)\rangle = x_k(a) |x(a)\rangle, \quad \langle x^*(a) | c_k^\dagger = \langle x^*(a) | x_k^*(a), \\ \langle x^*(a) | x(a)\rangle = e^{x^*(a)x(a)}.$$

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Перейдем к выводу представлений для (4б), (5) в виде функциональных интегралов. Рассмотрим для определенности

$$G_F^\pm Z_F^\pm = \int dz dz^* e^{z^* z} \langle z^* | e^{\alpha Q(m)} e^{-\beta H^\pm} | z \rangle, \quad (8)$$

где след оператора записан как интеграл по антикоммутирующим переменным [11] и векторы $\langle z^* |$, $|z\rangle$ определены аналогично (7). Для перехода к функциональному интегралу разделим отрезок $[0, \beta]$ на N частей длины β/N и представим $e^{-\beta H^\pm}$ в виде произведения N одинаковых сомножителей. Вставляя между этими сомножителями N разложений единицы, преобразуем (8) к виду

$$G_F^\pm Z_F^\pm = \int dz dz^* \prod_{a=1}^N dx^*(a) dx(a) \exp \left(z^* z - \sum_{a=1}^N x^*(a) x(a) \right) \times \\ \times \langle z^* | e^{\alpha Q(m)} | x(1) \rangle \langle x^*(1) | e^{-\frac{\beta}{N} H^\pm} | x(2) \rangle \dots \langle x^*(N) | e^{-\frac{\beta}{N} H^\pm} | z \rangle, \quad (9)$$

где $|x(a)\rangle$ и $\langle x^*(a)|$ определены в (7).

Используя свойства когерентных состояний, находим матричные элементы

$$\langle z^* | e^{\alpha Q(m)} | x(1) \rangle = \exp \left(e^\alpha \sum_{k=1}^m z_k^* x_k(1) + \sum_{k=m+1}^M z_k^* x_k(1) \right), \\ \langle x^*(a) | e^{-\frac{\beta}{N} H^\pm} | x(a+1) \rangle \simeq \exp \left(x^*(a) x(a+1) - \frac{\beta}{N} H^\pm(x^*(a), x(a+1)) \right), \quad N \gg 1, \\ H^\pm(x^*(a), x(a+1)) \equiv -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M (x_k^*(a) x_{k+1}(a+1) + x_{k+1}^*(a) x_k(a+1)) + \\ + h \sum_{k=1}^M x_k^*(a) x_k(a+1) - \frac{hM}{2}$$

и, подставляя их в (9), получаем

$$G_F^\pm Z_F^\pm = \int dz dz^* \prod_{a=1}^N dx^*(a) dx(a) \exp \left\{ \sum_{k=1}^m z_k^*(z_k + e^\alpha x_k(1)) + \sum_{k=m+1}^M z_k^*(z_k + x_k(1)) + x^*(1)(x(2) - x(1)) + \dots + x^*(N)(z - x(N)) - \frac{\beta}{N} (H^\pm(x^*(1), x(2)) + \dots + H^\pm(x^*(N), z)) \right\}. \quad (10)$$

Введем обозначения $x_k(N+1) \equiv z_k$ ($\forall k$), $x_k^*(0) \equiv e^\alpha z_k^*$ (для $1 \leq k \leq m$) и $x_k^*(0) \equiv z_k^*$ (для $m < k \leq M$). Далее, наложим условия

$$x_k(0) = \begin{cases} -e^{-\alpha} x_k(N+1), & 1 \leq k \leq m, \\ -x_k(N+1), & m < k \leq M, \end{cases}$$

и сделаем переход $N \rightarrow \infty$. В результате дискретный индекс a , меняющийся от 1 до N , превратится в непрерывный аргумент $\tau \in [0, \beta]$ (“мнимое” время [7], [11]). При этом правая часть (10) превращается в интеграл

$$\int \prod_{\tau \in [0, \beta]} dx^*(\tau) dx(\tau) \exp \left(\int_0^\beta \mathcal{L}(\tau) d\tau \right), \quad (11a)$$

где лагранжиан $\mathcal{L}(\tau)$ имеет вид

$$\mathcal{L}(\tau) = x^*(\tau) \frac{dx}{d\tau} - H^\pm(x^*(\tau), x(\tau)) \quad (11b)$$

и функциональные переменные $x(\tau)$ подчинены “автоморфному” граничному условию

$$x_k(\tau) = \begin{cases} -e^{-\alpha} x_k(\tau + \beta), & 1 \leq k \leq m, \\ -x_k(\tau + \beta), & m < k \leq M. \end{cases} \quad (11в)$$

Поля $x_k^*(\tau)$ – независимые переменные интегрирования. Оказывается удобным подчинить $x_k^*(\tau)$ требованию, аналогичному (11в), но с фактором e^α вместо $e^{-\alpha}$.

Проделанный вывод представления (11a)–(11в) наивно следует [17] и не учитывает специфику квадратичных гамильтонианов $H^\pm$ (2). Можно считать, что как традиционные условия (анти)периодичности $x_k(\tau) = \pm x_k(\tau + \beta)$, $k \in \{1, \dots, M\}$, так и условия (11в) задают некоторое представление относительно сдвигов τ на период β . Действие $\int_0^\beta \mathcal{L}(\tau) d\tau$, стоящее в показателе экспоненты интеграла (11a), является корректным объектом при условии инвариантности $\mathcal{L}(\tau)$ относительно сдвига τ . В случае стандартных условий по τ такая инвариантность имеет место, если $\mathcal{L}(\tau)$ содержит только четные степени полей.

Используем (11в) для вычисления приращения $\delta\mathcal{L}(\tau)$:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}(\tau) &= \mathcal{L}(\tau + \beta) - \mathcal{L}(\tau) = \\ &= \frac{1}{2}[(e^\alpha - 1)(x_{m+1}^*(\tau)x_m(\tau) + x_M^*(\tau)x_{M+1}(\tau)) + \\ &\quad + (e^{-\alpha} - 1)(x_m^*(\tau)x_{m+1}(\tau) + x_{M+1}^*(\tau)x_M(\tau))].\end{aligned}$$

Причина возникновения приращения $\delta\mathcal{L}(\tau)$ проста: циклические квадратичные формы $H^\pm$ инвариантны при замене

$$x_k \rightarrow \pm e^\alpha x_k, \quad x_k^* \rightarrow \pm e^{-\alpha} x_k^*, \quad (12)$$

если $k \in \{1, \dots, M\}$ (однородное “калибровочное” преобразование), и неинвариантны, если замена (12) затрагивает только часть узлов (неоднородное преобразование). Условие (11в) задает на переменных интегрирования неоднородное представление группы сдвигов $\tau \rightarrow \tau + \beta$, и для $\mathcal{L}(\tau)$ (11б) инвариантность оказывается нарушенной. Эту симметрию легко восстановить в предельной формуле (11а), заменив $H^\pm(x^*(\tau), x(\tau))$ на форму следующего вида:

$$\begin{aligned}\tilde{H}^\pm(\tau) &= -\frac{1}{2} \sum'_{k=1}^M (x_{k+1}^*(\tau)x_k(\tau) + x_k^*(\tau)x_{k+1}(\tau)) + \\ &\quad + h \sum_{k=1}^M x_k^*(\tau)x_k(\tau) - \frac{1}{2} [x_{m+1}^*(\tau)x_m(\tau)e^{-\frac{\alpha}{\beta}\tau} + x_m^*(\tau)x_{m+1}(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau} + \\ &\quad + x_{M+1}^*(\tau)x_M(\tau)e^{\frac{\alpha}{\beta}\tau} + x_M^*(\tau)x_{M+1}(\tau)e^{-\frac{\alpha}{\beta}\tau}] - \frac{hM}{2},\end{aligned}$$

где символ $\sum'$ означает, что при суммировании пропущены индексы $k = m, M$. Лагранжиан

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tau) = x^*(\tau) \frac{dx}{d\tau} - \tilde{H}^\pm(\tau)$$

инвариантен относительно сдвига $\tau \rightarrow \tau + \beta$, мера в интеграле (11а) также инвариантна, и окончательно получаем

$$G_F^\pm Z_F^\pm = \int \prod_{\tau \in [0, \beta]} dx^*(\tau) dx(\tau) \exp\left(\int_0^\beta \tilde{\mathcal{L}}(\tau) d\tau\right). \quad (13)$$

Утверждение данной работы состоит в том, что представление (13), дополненное условием (11в), является корректным соотношением, альтернативным представлению, полученному в работе [8]. Последующие вычисления демонстрируют это.

Перейдем в (13) к импульсному представлению:

$$x_k(\tau) = \begin{cases} (\beta M)^{-1/2} \sum_p e^{i(\omega\tau - i\frac{\alpha}{\beta}\tau + qk)} x_p, & 1 \leq k \leq m, \\ (\beta M)^{-1/2} \sum_p e^{i(\omega\tau + qk)} x_p, & m < k \leq M, \end{cases} \quad (14a)$$

где индекс суммирования $p \equiv (\omega, q)$ – формальный 2-импульс: суммирование идет по $\omega = \pi T(2n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, и по квазиимпульсам $q \in X^\pm$. Условие (11в) приводит к тому, что в фурье-разложениях на первых m узлах фермиевские частоты оказываются сдвинутыми на чисто мнимое число. Однако индексом суммирования в (14а) можно, конечно, считать ω . Два множества $X^\pm$,

$$\begin{aligned} X^+ &= \left\{ q = -\pi + \frac{\pi(2l-1)}{M} \mid l = 1, \dots, M \right\}, \\ X^- &= \left\{ q = -\pi + \frac{2\pi l}{M} \mid l = 1, \dots, M \right\}, \end{aligned} \quad (14б)$$

возникают благодаря двум граничным условиям (3).

Подставим разложения (14а) в (13), перенормируем $x_p e^{i(m+1)q/2} \rightarrow x_p$ и получим

$$\begin{aligned} G_F^\pm Z_F^\pm &= \int \prod_p dx_p^* dx_p e^{S^\pm(\alpha)}, \\ S^\pm(\alpha) &= \sum_p (i\omega - \varepsilon_q) x_p^* x_p + \frac{\alpha}{\beta} \sum_{\omega, q, q'} Q_{qq'} x_{\omega q}^* x_{\omega q'} + \frac{Mh\beta}{2}, \end{aligned} \quad (15а)$$

где $\varepsilon_q = h - \cos q$ – зонная энергия квазичастиц, p пробегает все допустимые значения,

$$Q_{qq'} = \frac{1}{M} \frac{\sin(m(q - q')/2)}{\sin((q - q')/2)} \quad (15б)$$

и $q, q' \in X^+$ либо X^- . Таким образом, “автоморфное” условие (11в) на первых m узлах ответственно за возникновение недиагонального члена в $S^\pm(\alpha)$. При $m = M$ величина $Q_{qq'}$ становится символом Кронекера и $S^\pm(\alpha)$ превращается в свободное фермионное действие со сдвинутым химическим потенциалом [29].

Воспользуемся известным результатом для конечнократных интегралов [7], [11] и получим следующие формальные выражения:

$$G_F^\pm Z_F^\pm = e^{Mh\beta/2} \text{Det} \left[(-i\omega_F + \varepsilon_q) \delta_{pp'} - \frac{\alpha}{\beta} \delta_{\omega\omega'} Q_{qq'} \right], \quad (16а)$$

$$G_B^\pm Z_B^\pm = e^{Mh\beta/2} \text{Det} \left[(-i\omega_B + \varepsilon_q) \delta_{pp'} - \frac{\alpha}{\beta} \delta_{\omega\omega'} Q_{qq'} \right] \quad (16б)$$

и

$$Z_F^\pm = e^{Mh\beta/2} \text{Det} [(i\omega_F - \varepsilon_q) \delta_{pp'}], \quad (17а)$$

$$Z_B^\pm = e^{Mh\beta/2} \text{Det} [(i\omega_B - \varepsilon_q) \delta_{pp'}], \quad (17б)$$

где ω_F и ω_B – фермиевские и бозевские частоты. Модификация вычислений для $G_B^\pm Z_B^\pm$ (4б) проводится совершенно аналогично, но присутствие $(-1)^{\mathcal{N}}$ под знаком следа приводит к замене двух знаков минус (после равенства) в условии (11в) на знаки плюс. В

результате параметром суммирования оказывается не фермиевская частота ω_F , а бозевская частота ω_B (т.е. $\omega = 2\pi Tn$, $n \in \mathbb{Z}$) и ответы для $G_B^\pm Z_B^\pm$ и $Z_B^\pm$ принимают вид (16б) и (17б), соответственно. Здесь и ниже символ Det используется для обозначения определителя бесконечномерных матриц, $\det$ – для конечномерных. Подстановка (16а), (16б) в (4а) приводит к ответу для $G(\alpha, m)$, а статсумма Z вычисляется с помощью (5) и (17а), (17б). Матричные операторы, возникающие в (16а), (16б) и (17а), (17б), удобно обозначать соответственно $A(\alpha) \equiv A_\alpha$ и A .

4. ДЗЕТА-РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Для придания смысла определителям (16), (17) в данной работе предлагается использовать дзета-регуляризацию [20], [21], [26]. Обычно обобщенная дзета-функция связана с некоторым эллиптическим оператором. А именно, пусть $\mathcal{A}$ – неотрицательный эллиптический оператор порядка $p > 0$ на компактном d -мерном гладком многообразии. Пусть его собственные значения λ_n нумеруются мультииндексом n . Обобщенной дзета-функцией оператора $\mathcal{A}$ назовем ряд

$$\zeta(s|\mathcal{A}) = \sum_{\lambda_n \neq 0} (\lambda_n)^{-s}, \quad (18)$$

сходящийся при $\text{Re } s > d/p$. Этот ряд определяет $\zeta(s|\mathcal{A})$ как мероморфную функцию переменной $s \in \mathbb{C}$, обладающую аналитическим продолжением в точку $s = 0$. Соотношение (18) позволяет записать регуляризованный определитель $\mathcal{A}$ в виде

$$\ln \text{Det } \mathcal{A} = -\zeta'(0|\mathcal{A}). \quad (19)$$

Отправляясь от (18), можно получить представление $\zeta(s|\mathcal{A})$ в виде интеграла Меллина:

$$\zeta(s|\mathcal{A}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} [\text{Tr}(e^{-\mathcal{A}t}) - \dim(\ker \mathcal{A})] dt. \quad (20)$$

Интеграл (20) определен при $\text{Re } s > d/p$, при остальных значениях $\text{Re } s$ требуется его аналитическое продолжение. Формулу (20) можно связать [26] с определением $\text{Det } \mathcal{A}$ с помощью регуляризации по собственному времени [30]. Используем (20) для придания смысла определителям (16), (17).

Рассмотрим, например, (16а) и вычислим $G_F^\pm$. Запишем формальный интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \text{Tr}[e^{(i\omega_F - \varepsilon + \frac{\alpha}{\beta} \hat{Q})t}] dt, \quad (21)$$

где ε и $\hat{Q}$ означают матрицы в импульсном пространстве соответственно $\text{diag}\{\varepsilon_q\}$ и Q_{pq} (15б), а индексы p, q независимо пробегают множества X^+ или X^- . Сходимость интеграла (21) на верхнем пределе обеспечена при $\varepsilon_q > 0$ (т.е. при $h > h_c = 1$, h_c – критическое магнитное поле [4]); на нижнем пределе требуется регуляризация.

Воспользуемся асимптотическим соотношением

$$\text{Tr}[e^{(i\omega_F - \varepsilon + \frac{\alpha}{\beta} \hat{Q})t}] \longrightarrow \phi_0, \quad t \rightarrow 0,$$

где $\phi_0 \equiv \phi_0(A_\alpha)$ – бесконечная постоянная, равная $\text{Tr}(\delta_{pp'}) \equiv \sum_{\omega_F} \text{tr}(\hat{\delta})$ ($\hat{\delta}$ – единичная матрица размера $M \times M$), и определим функцию $\rho(t)$:

$$\rho(t) \equiv \text{Tr}[e^{(i\omega_F - \varepsilon + \frac{\alpha}{\beta}\hat{Q})t}] - \phi_0, \quad 0 \leq t < 1. \quad (22)$$

Разобьем интеграл (21) на две части и запишем его с помощью (22) следующим образом:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty t^{s-1} \text{Tr}[e^{(i\omega_F - \varepsilon + \frac{\alpha}{\beta}\hat{Q})t}] dt + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \rho(t) dt + \frac{\phi_0}{s\Gamma(s)}. \quad (23)$$

Функция $\rho(t)$ есть формальный ряд по степеням t^n , $n \geq 1$. Кроме того,

$$\frac{1}{s\Gamma(s)} \simeq 1 + \gamma s + o(s), \quad \gamma = -\psi(1), \quad (24)$$

где $\psi(z) = (d/dz) \ln \Gamma(z)$. Следовательно, выражение (23), аналитичное при $s \rightarrow 0$, определяет аналитическое продолжение (21) при всех $\text{Re } s \geq 0$, и именно его можно считать определением соответствующей обобщенной дзета-функции матричного оператора A_α (16а) в правой полуплоскости $\mathbb{C} \ni s$.

Рассмотрим теперь вопрос о постоянной ϕ_0 и о коэффициентах, характеризующих $\rho(t)$. В случае дифференциальных операторов на многообразиях эти числа (коэффициенты Сили) оказываются ненулевыми [25], [26]. В нашем случае эти коэффициенты бесконечны, однако им могут быть приписаны [18] конечные (фактически нулевые) значения, если использовать известные аналитические продолжения [31] для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и обобщенной дзета-функции $\zeta(s, \alpha)$.

Воспользуемся формулой (24) и перейдем от (23) к соотношению

$$-\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \zeta_F^\pm(s|A_\alpha) = -\int_1^\infty \text{tr}[e^{(-\varepsilon + \frac{\alpha}{\beta}\hat{Q})t}] \left(\sum_{\omega_F} e^{i\omega_F t} \right) \frac{dt}{t} - \int_0^1 \rho(t) \frac{dt}{t} - \gamma \phi_0, \quad (25)$$

где можно использовать формулу Пуассона для суммирования по ω_F . Тогда правая часть (25) принимает вид

$$-\text{tr} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k} (e^{-\beta\varepsilon + \alpha\hat{Q}})^k - \int_0^1 \rho(t) \frac{dt}{t} - \gamma \phi_0 = \ln \det(1 + e^{-\beta\varepsilon + \alpha\hat{Q}}) - \int_0^1 \rho(t) \frac{dt}{t} - \gamma \phi_0. \quad (26)$$

Учтем также, что $\hat{Q}^2 = \hat{Q}$, и поэтому $e^{\alpha\hat{Q}} - 1 = (e^\alpha - 1)\hat{Q}$. Следовательно,

$$G_F^\pm = \frac{\text{Det}[(i\omega_F - \varepsilon_q)\delta_{pp'} + \frac{\alpha}{\beta}\delta_{\omega\omega'}Q_{qq'}]}{\text{Det}[(i\omega_F - \varepsilon_q)\delta_{pp'}]} = \det[1 + (e^\alpha - 1)\hat{Q}(1 + e^{\beta\varepsilon})^{-1}]. \quad (27)$$

Действуя аналогично, для $G_B^\pm$ (16б) получаем

$$G_B^\pm = \det[1 + (e^\alpha - 1)\hat{Q}(1 - e^{\beta\varepsilon})^{-1}]. \quad (28)$$

Уже представление (23) (с учетом замечания о конечности $\rho(t)$ и ϕ_0) позволяет обсуждать регуляризованный $\text{Det } A_\alpha$. Однако для $G_F^\pm, G_B^\pm$, т.е. для интересующих нас отношений определителей, дополнительная ренормировка $\rho(t)$ и ϕ_0 не имеет значения. Выполнение в (26) (без двух последних слагаемых) предела $\alpha \rightarrow 0$ приводит к правильному ответу [9], [12] для $Z_F^\pm, Z_B^\pm$:

$$\begin{aligned} Z_F^\pm &= e^{Mh\beta/2} \prod_{q \in X^\pm} (1 + e^{-\beta\varepsilon_q}) = \prod_{q \in X^\pm} 2 \operatorname{ch} \frac{\beta\varepsilon_q}{2}, \\ Z_B^\pm &= e^{Mh\beta/2} \prod_{q \in X^\pm} (1 - e^{-\beta\varepsilon_q}) = \prod_{q \in X^\pm} 2 \operatorname{sh} \frac{\beta\varepsilon_q}{2}, \end{aligned}$$

что подтверждает корректность соотношений (23), (25), (26).

Мы ограничились случаем $h > 1$ при выводе (27), (28). В случае $0 < h < 1$ величина ε_q не является строго положительной, и может возникнуть вопрос о сходимости интеграла (21) на верхнем пределе. Можно показать, что в этом случае надо вычислять регуляризованное значение $\text{Det}^{1/2}(A_\alpha A_\alpha^*)$, где A_α^* – комплексно-сопряженный оператор, и окончательный результат совпадет с (27), (28). Случай $0 < h < 1$ может быть опущен для краткости при обсуждении возможности возникновения “автоморфных” граничных условий (11в) при вычислении (1).

5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

При вычислении корреляторов третьих компонент спинов (оператор третьей компоненты спина на узле $\sigma_z^{(m)}$), как и другие локальные спиновые операторы, определен, например, в [4]) приходится дифференцировать (1) по α в точке $\alpha = 0$, т.е. вычислять средние вида

$$\langle Q^n(m) \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d^n}{d\alpha^n} G(\alpha, m) \quad (29)$$

(см. [1], [4]). Фактически, имея в виду предложенное представление (23), достаточно научиться вычислять только первую производную. Остальные дифференцирования будут проходить как обычные дифференцирования конечномерных матриц.

Рассматриваемые операторы $A(\alpha)$ линейны по α : $A(\alpha) \equiv A_1 + \alpha A_2$. Вычислим в качестве примера первую производную по α от определителя $\text{Det } A(\alpha)$ (16а), используя формальный интеграл (21):

$$\frac{(d/d\alpha) \text{Det } A(\alpha)}{\text{Det } A(\alpha)} = -\frac{d}{d\alpha} \left(\int_0^\infty \text{Tr}(e^{A(\alpha)t}) \frac{dt}{t} \right) \quad (30)$$

(для дифференцирования по параметру регуляризация при $t \rightarrow +0$ несущественна). В духе леммы Рэя–Зингера–Шварца [26], [32] используем в (30) следующее равенство:

$$\frac{d}{d\alpha} (\text{Tr}(e^{A(\alpha)t})) = t \frac{d}{dt} \text{Tr}(B(\alpha)e^{A(\alpha)t}), \quad B(\alpha) \equiv A_2 A^{-1}(\alpha).$$

Тогда интеграл по t можно вычислить, получаем

$$\frac{(d/d\alpha) \text{Det } A_\alpha}{\text{Det } A_\alpha} = \text{Tr} \left(\frac{\hat{Q}}{\beta} \left(i\omega_F - \hat{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\beta} \hat{Q} \right)^{-1} \right) = \text{tr} (\hat{Q} (1 + e^{\beta\hat{\varepsilon} - \alpha\hat{Q}})^{-1}), \quad (31)$$

где при суммировании по частотам ω_F использована формула Коши для матриц [33]. С учетом (31) можно вычислить все нужные производные:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(d/d\alpha) \text{Det } A_\alpha}{\text{Det } A_\alpha} &= \text{tr} (\hat{Q} (1 + e^{\beta\hat{\varepsilon}})^{-1}), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(d^2/d\alpha^2) \text{Det } A_\alpha}{\text{Det } A_\alpha} &= \text{tr} (\hat{Q} (1 + e^{\beta\hat{\varepsilon}})^{-1}) + \text{tr}^2 (\hat{Q} (1 + e^{\beta\hat{\varepsilon}})^{-1}) - \\ &\quad - \text{tr} (\hat{Q} (1 + e^{\beta\hat{\varepsilon}})^{-1} \hat{Q} (1 + e^{\beta\hat{\varepsilon}})^{-1}) \end{aligned} \quad (32)$$

и т. д.

В завершение раздела используем полученные формулы для вычисления корреляторов $\langle \sigma_z^{(m)} \rangle$ и $\langle \sigma_z^{(m+1)} \sigma_z^{(1)} \rangle$ в термодинамическом пределе. В этом случае бозонные вклады $G_B^+ Z_B^+$ и $G_B^- Z_B^-$ в (4а) сокращаются и при вычислении (29) используются только соотношения (32), отвечающие производным $G_F^\pm$. Итак, с учетом (32) получаем

$$\langle Q(m) \rangle = \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{\beta\varepsilon_q})^{-1} dq, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \langle Q^2(m) \rangle &= \frac{m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{\beta\varepsilon_q})^{-1} dq + \frac{m^2}{(2\pi)^2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{\beta\varepsilon_q})^{-1} dq \right]^2 - \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (Q_{pq})^2 (1 + e^{\beta\varepsilon_p})^{-1} (1 + e^{\beta\varepsilon_q})^{-1} dp dq. \end{aligned} \quad (34)$$

Из (33) получаем в термодинамическом пределе

$$\sigma_z \equiv \langle \sigma_z^{(m)} \rangle = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{1 + e^{\beta\varepsilon_q}}, \quad (35)$$

где используются определения $\langle \sigma_z^{(m)} \rangle = 1 - 2\mathcal{D}_1 \langle Q(m) \rangle$ и $\mathcal{D}_1 f(m) = f(m) - f(m-1)$. Результат (35) согласуется с намагниченностью $\mathcal{M}_z = -\partial F / \partial h$, вычисленной в [4]. Из (34) получаем

$$\langle \sigma_z^{(m+1)} \sigma_z^{(1)} \rangle = \sigma_z^2 - \frac{1}{\pi^2} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imq}}{1 + e^{\beta\varepsilon_q}} dq \right|^2,$$

где используются определения

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^{(m+1)} \sigma_z^{(1)} \rangle &= 2\mathcal{D}_2 \langle Q^2(m) \rangle + 2\sigma_z - 1, \\ D_2 f(m) &= f(m+1) - 2f(m) + f(m-1). \end{aligned}$$

Полученные ответы правильно воспроизводят результат [4]. Это свидетельствует в пользу корректности возникающего при вычислении $G(\alpha, m)$ по формулам (4) представления в виде функционального интеграла (13), которое сопровождается граничным условием (11в) для $G_F^\pm Z_F^\pm$ или аналогичным условием с заменой двух знаков минус на знаки плюс для $G_B^\pm Z_B^\pm$.

6. ОБСУЖДЕНИЕ

В работе получено представление для производящей функции статических корреляторов третьих компонент спинов в XX -модели Гейзенберга в терминах функциональных интегралов по переменным, подчиняющимся “автоморфному” граничному условию по мнимому времени. Представленная работа примыкает к работе [17], в которой функциональное интегрирование с “автоморфным” граничным условием используется для вычисления индексов некоторых дифференциальных операторов, а также к работе [29], где получены статистические суммы некоторых спиновых моделей на решетке в виде функциональных интегралов по грассмановым полям, преобразующимся “автоморфно” при сдвиге мнимого времени на период. Отличие данной работы от [17], [29] состоит в том, что “автоморфное” граничное условие по мнимому времени возникает только для части узлов (нескольких первых) M -узельной модели.

Регуляризация гауссовых функциональных интегралов выполнена с использованием обобщенных дзета-функций соответствующих матричных операторов. При этом удается достичь определенного технического упрощения по сравнению с работой [8], в которой регуляризуемые интегралы домножаются и делятся на вспомогательные конечнократные грассмановы интегралы и дважды сдвигаются переменные интегрирования. Кроме того, показано, что с практической точки зрения (т.е. если требуются только производные по параметру) можно обойти ответ в виде определителя конечномерной матрицы и сразу получить формулу для первой производной производящей функции. Предложенное функциональное представление также делает более прозрачной связь вычисляемых объектов с конечнократным грассмановым интегрированием [9], [10]. В данной работе предложено обобщение технических приемов [17], [29], которое может оказаться полезным в других моделях, где также приходится вычислять вакуумные средние экспонент квадратичных операторов типа $e^{\alpha Q(m)}$.

Благодарности. Автору приятно поблагодарить Н. М. Боголюбова, Ф. Коломо, В. С. Капитонова, В. Е. Корепина, П. П. Кулиша, Ж. М. Майе, Х. Ю. Микеску, А. Г. Пронько, Н. А. Славнов и П. Г. Зографа за интересные обсуждения. Работа частично поддержана грантом РФФИ № 01-01-01045.

Список литературы

- [1] Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин. Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М.: Наука, 1992.
- [2] A. Lenard. J. Math. Phys. 1964. V. 5. № 7. P. 930–943; 1966. V. 7. № 7. P. 1268–1272.
- [3] V. E. Korepin, N. A. Slavnov. Commun. Math. Phys. 1990. V. 129. № 1. P. 103–113.
- [4] F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, V. Tognetti. Phys. Lett. A. 1992. V. 169. № 4. P. 243–247; ТМФ. 1993. Т. 94. № 1. С. 19–51.
- [5] А. Г. Изергин, А. Р. Итс, В. Е. Корепин, Н. А. Славнов. Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 2. С. 138–151.
- [6] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
- [7] В. Н. Попов. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976.

- [8] *В. С. Капитонов, К. Н. Ильинский.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 1995. Т. 224. С. 192–207.
- [9] *А. Г. Изергин, В. С. Капитонов, Н. А. Китанин.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 245. С. 173–206.
- [10] *В. С. Капитонов, А. Г. Пронько.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 269. С. 216–261.
- [11] *Ф. А. Березин.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1986.
- [12] *А. Г. Изергин, Н. А. Китанин, Н. А. Славнов.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 1995. Т. 224. С. 178–191.
- [13] *U. Bilstein, B. Wehefritz.* J. Phys. A. 1999. V. 32. № 2. P. 191–233; *U. Bilstein, V. Rittenberg.* J. Phys. A. 2000. V. 33. № 42. P. L381–L385.
- [14] *V. Korepin, J. Terilla.* Quantum Information Processing. 2002. V. 1. P. 225–242; quant-ph/0202054.
- [15] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 642. P. 433–455; hep-th/0203169.
- [16] *T. Kojima, V. Korepin, N. Slavnov.* Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. № 3. P. 657–689; V. 189. № 3. P. 709–728; *V. E. Korepin, N. A. Slavnov.* J. Phys. A. 1998. V. 31. № 46. P. 9283–9295.
- [17] *L. Alvarez-Gaumé.* Supersymmetry and index theory. In: Supersymmetry. NATO ASI Ser. V. 125. Eds. K. Dietz et. al. New York: Plenum, 1985. P. 1–44.
- [18] *К. Малышев.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 269. С. 269–291; *C. Malyshev.* XX Heisenberg spin chain and an example of path integral with “automorphic” boundary conditions. hep-th/0204007.
- [19] *S. W. Hawking.* Commun. Math. Phys. 1977. V. 55. № 2. P. 133–148; *J. S. Dowker, R. Critchley.* Phys. Rev. D. 1976. V. 13. № 12. P. 3224–3232.
- [20] *С. Хокинг.* Интегралы по траекториям в приложении к квантовой гравитации. В сб.: Общая теория относительности. Ред. С. Хокинг, В. Израэль. М.: Мир, 1983. С. 363–406; *Б. С. Де Витт.* Квантовая гравитация: новый синтез. В сб.: Общая теория относительности. Ред. С. Хокинг, В. Израэль. М.: Мир, 1983. С. 296–362.
- [21] *D. B. Ray, I. M. Singer.* Adv. Math. 1971. V. 7. № 2. P. 145–210.
- [22] *E. Corrigan, P. Goddard, H. Osborn, S. Templeton.* Nucl. Phys. B. 1979. V. 159. № 3. P. 469–496; *H. Osborn.* Nucl. Phys. B. 1979. V. 159. № 3. P. 497–511.
- [23] *A. S. Schwarz.* Commun. Math. Phys. 1979. V. 64. № 3. P. 233–268.
- [24] *B. P. Dolan, Ch. Nash.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 148. № 1. P. 139–153; *R. Kantowski, K. A. Milton.* Phys. Rev. D. 1987. V. 36. № 12. P. 3712–3721.
- [25] *В. Н. Романов, А. С. Шварц.* ТМФ. 1979. Т. 41. № 2. С. 190–204.
- [26] *А. С. Шварц.* Квантовая теория поля и топология. М.: Наука, 1989.
- [27] *E. Lieb, T. Schultz, D. Mattis.* Ann. Phys. 1961. V. 16. № 3. P. 407–466; *Th. Niemeijer.* Physica. 1967. V. 36. № 3. P. 377–419; 1968. V. 39. № 3. P. 313–326.
- [28] *W. L. Baily, Jr.* Introductory Lectures on Automorphic Forms. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1973; *И. Р. Шафаревич.* Основания алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988.
- [29] *В. Н. Попов, С. А. Федотов.* ЖЭТФ. 1988. Т. 94. № 3. С. 183–194.
- [30] *В. А. Фок.* Изв. АН СССР. Сер. физ. 1937. № 4–5. С. 551–568; *J. Schwinger.* Phys. Rev. 1951. V. 82. № 5. P. 664–679.
- [31] *W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni.* Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Berlin: Springer, 1966.
- [32] *A. S. Schwarz.* Lett. Math. Phys. 1978. V. 2. № 3. P. 247–252.
- [33] *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 23.VIII.2002 г.