Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Г. Мардоян, Рассеяние электронов на дионе, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 2, 246–256

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:25:19

© 2003 г.

Л. Г. Мардоян*

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ НА ДИОНЕ

Вычислены сферические и параболические волновые функции для системы заряд-дион в непрерывном спектре. Показано, что коэффициенты преобразования парабола-сфера и сфера-парабола пропорциональны обобщенной гипергеометрической функции ${}_3F_2(\dots|1)$. Решена квантово-механическая задача рассеяния заряженных частиц в поле диона.

Ключевые слова: система заряд-дион, базис, межбазисное разложение, амплитуда рассеяния, сечение рассеяния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что система заряд-дион обладает скрытой симметрией, и что группа скрытой симметрии для дискретного спектра $O(4)$, а для непрерывного спектра — $O(3, 1)$. Напомним, что дион — гипотетическая частица, введенная Швингером [2], которая является источником как электрического, так и магнитного поля. Задача системы заряд-дион в силу скрытой симметрии факторизуется не только в сферических, но и в параболических координатах.

В настоящей работе рассмотрена квантово-механическая задача рассеяния заряженных частиц в поле диона. Поводом к такому исследованию послужил сравнительно недавно установленный факт (названный дион-осцилляторной дуальностью), согласно которому 4-мерный изотропный осциллятор дуален системе заряд-дион [3]. Отображение $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ связывает квантово-полевую модель Φ^4 с квантово-механической задачей об эффекте Штарка. Тем самым устанавливается мост между квантово-полевыми и квантово-механическими методами. Однако свойство дион-осцилляторной дуальности присуще не только отображению $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, но и отображениям $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}^5$, причем в первых двух случаях на выходе возникают одномерный и двумерный анионы [4], а в третьем — неабелев монополю Янга [5]. Подобные объекты предсказываются современными схемами великого объединения [6].

Статья построена следующим образом. В разделах 2 и 3 получены волновые функции системы заряд-дион (для непрерывного спектра) в сферических и параболических координатах. В разделе 4 получено выражение для амплитуды рассеяния электронов

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия; Ереванский государственный университет, Ереван, Армения. E-mail: mardoyan@thsun1.jinr.ru, mardoyan@icas.yu.am

в поле диона, которое, в отличие от полученной в работе [1] соответствующей формулы, не зависит от азимутального угла φ . Далее вычислено значение сечения рассеяния, обобщающее формулу Резерфорда в случае рассеяния заряженных частиц в поле диона. В разделах 5 и 6 решена задача межбазисных разложений для системы заряд-дион в непрерывном спектре.

2. СФЕРИЧЕСКИЙ БАЗИС

Уравнение Шредингера системы заряд-дион имеет вид

$$\frac{1}{2\mu} \left(\hat{p}_i - \frac{e}{c} A_i^{(\pm)} \right)^2 \psi^{(\pm)} + \frac{\hbar^2 s^2}{2\mu r^2} \psi^{(\pm)} - \frac{e^2}{r} \psi^{(\pm)} = E \psi^{(\pm)}. \quad (1)$$

Векторные потенциалы

$$A_i^{(\pm)} = \frac{g}{r(r \mp z)} (\pm y, \mp x, 0) \quad (2)$$

соответствуют монополю Дирака [7] с магнитным зарядом $g = \hbar cs/e$ ($s = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots$) и осью сингулярности при $z > 0$ и $z < 0$, соответственно.

Легко заметить, что векторные потенциалы $A_i^{(+)}$ и $A_i^{(-)}$ связаны между собой калибровочным преобразованием

$$A_i^{(-)} = A_i^{(+)} + \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (3)$$

где $f = 2g \arctg(y/x)$, а напряженность магнитного поля, созданного дионом, равна

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(\pm)} = g \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Решение уравнения (1) для векторного потенциала $A_i^{(+)}$ в сферических координатах ищем в виде

$$\psi^{(+)}(r, \theta, \varphi) = R^{(+)}(r) Z^{(+)}(\theta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (4)$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Теперь, подставляя (4) в уравнение Шредингера (1), записанное в сферических координатах, приходим к следующей паре обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dZ^{(+)}}{d\theta} \right) - \left[\frac{m^2}{2(1 + \cos \theta)} + \frac{(m + 2s)^2}{2(1 - \cos \theta)} \right] Z^{(+)} + \ell(\ell + 1) Z^{(+)} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR^{(+)}}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} R^{(+)} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{r} \right) R^{(+)} = 0, \quad (6)$$

где $\ell(\ell + 1)$ – постоянная разделения, а ℓ – целое (при целых s) или полуцелое (при полуцелых s) неотрицательное число, принимающее значения

$$\ell = \frac{|m| + |m + 2s|}{2}, \frac{|m| + |m + 2s|}{2} + 1, \dots$$

Решение уравнения (5) есть полином Якоби [8]

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{\Gamma(n+a+1)}{n!\Gamma(a+1)} {}_2F_1\left(-n, n+a+b+1; a+1; \frac{1-x}{2}\right),$$

умноженный на фактор $(1 - \cos \theta)^{|m+2s|/2} (1 + \cos \theta)^{|m|/2}$. Нормируя функцию $Z_{\ell m s}^{(+)}(\theta)$ условием

$$\int_0^\pi Z_{\ell m s}^{(+)}(\theta) Z_{\ell' m s}^{(+)}(\theta) \sin \theta d\theta = \delta_{\ell \ell'}, \quad (7)$$

находим

$$Z_{\ell m s}^{(+)}(\theta) = N_{\ell m s} (1 - \cos \theta)^{|m+2s|/2} (1 + \cos \theta)^{|m|/2} P_{\ell-m_+}^{(|m+2s|, |m|)}(\cos \theta),$$

где

$$N_{\ell m s} = \left[\frac{(2\ell+1)(\ell-m_+)!(\ell+m_+)!}{2^{2m_++1}(\ell-m_-)!(\ell+m_-)!} \right]^{1/2}.$$

Здесь $m_\pm = (|m| \pm |m+2s|)/2$; $m_+ = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$; $m_- = 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots$

Радиальное уравнение (6) имеет решение

$$R_{k\ell}^{(+)}(r) = C_{k\ell} \frac{(2ikr)^\ell}{(2\ell+1)!} e^{-ikr} {}_1F_1\left(\frac{i}{ak} + \ell + 1; 2\ell + 2; 2ikr\right), \quad (8)$$

где ${}_1F_1(a; b; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция, $k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$, $a = \hbar^2/(\mu e^2)$ – боровский радиус. Далее, пользуясь представлением вырожденной гипергеометрической функции [9]

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} G(\alpha; \alpha-\gamma+1; -z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} G(\gamma-\alpha; 1-\alpha; z), \quad (9)$$

где

$$G(\alpha; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha\gamma}{1!z} + \frac{\alpha(\alpha+1)\gamma(\gamma+1)}{2!z^2} + \dots,$$

для радиальной волновой функции (8) получим выражение

$$R_{k\ell}^{(+)}(r) = C_{k\ell} \frac{e^{-\pi/(2ak)}}{kr} \times \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{-i[kr - \pi(\ell+1)/2 + \ln(2kr)/(ak)]}}{\Gamma(\ell+1 - i/(ak))} G\left(\ell+1 + \frac{i}{ak}; \frac{i}{ak} - 1; -2ikr\right) \right\}. \quad (10)$$

Если радиальную волновую функцию нормировать условием

$$\int_0^\infty r^2 R_{k'\ell}^{(+)}(r) R_{k\ell}^{(+)}(r) dr = 2\pi\delta(k-k'),$$

то постоянная нормировки $C_{k\ell}$ равна

$$C_{k\ell} = 2k e^{\pi/(2ak)} \left| \Gamma\left(\ell + 1 - \frac{i}{ak}\right) \right|.$$

Теперь в формуле (10), устремляя $r \rightarrow \infty$ и ограничиваясь первым членом разложения, для радиальной волновой функции $R_{k\ell}^{(+)}(r)$ получим следующий асимптотический вид:

$$R_{k\ell}^{(+)}(r) \approx \frac{2}{r} \sin\left(kr + \frac{1}{ak} \ln(2kr) - \frac{\pi\ell}{2} + \delta_\ell\right),$$

где

$$\delta_\ell = \arg \Gamma\left(\ell + 1 - \frac{i}{ak}\right).$$

3. ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ БАЗИС

В параболических координатах $\xi, \eta \in [0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, которые определяются формулами

$$x + iy = \sqrt{\xi\eta} e^{i\varphi}, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta),$$

дифференциальные элементы длины и объема и оператор Лапласа имеют вид

$$dl^2 = \frac{\xi + \eta}{4} \left(\frac{d\xi^2}{\xi} + \frac{d\eta^2}{\eta} \right) + \xi\eta d\varphi^2, \quad dV = \frac{1}{4}(\xi + \eta) d\xi d\eta d\varphi,$$

$$\Delta = \frac{4}{\xi + \eta} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\eta \frac{\partial}{\partial\eta} \right) \right] + \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

После подстановки

$$\psi^{(+)}(\xi, \eta, \varphi) = \Phi_1(\xi) \Phi_2(\eta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

переменные в уравнении (1) разделяются, и мы приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Phi_1}{d\xi} \right) + \left[\frac{k^2}{4} \xi - \frac{m^2}{4\xi} + \frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar} \beta + \frac{1}{2a} \right] \Phi_1 &= 0, \\ \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\Phi_2}{d\eta} \right) + \left[\frac{k^2}{4} \eta - \frac{(m+2s)^2}{4\eta} - \frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar} \beta + \frac{1}{2a} \right] \Phi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где β – постоянная разделения. Решения уравнений (11) ищем в виде

$$\Phi_1(x_1) = e^{-x_1/2} x_1^{|m|/2} f_1(x_1), \quad \Phi_2(x_2) = e^{-x_2/2} x_2^{|m+2s|/2} f_2(x_2),$$

где $x_1 = ik\xi$, $x_2 = ik\eta$, а $k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$. Тогда для функций f_1 и f_2 получим уравнения вырожденных гипергеометрических функций

$$\begin{aligned} x_1 \frac{d^2 f_1}{dx_1^2} + (|m| + 1 - x_1) \frac{df_1}{dx_1} - \left(\frac{|m| + 1}{2} + i \frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k} \beta + \frac{i}{2ak} \right) f_1 &= 0, \\ x_2 \frac{d^2 f_2}{dx_2^2} + (|m + 2s| + 1 - x_2) \frac{df_2}{dx_2} - \left(\frac{|m + 2s| + 1}{2} - i \frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k} \beta + \frac{i}{2ak} \right) f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Нормированный условием

$$\int \psi_{k\beta m s}^{(+)} \psi_{k'\beta' m' s}^{(+)*} dV = 2\pi\delta(k - k')\delta(\beta - \beta')\delta_{mm'} \quad (12)$$

параболический базис имеет вид

$$\psi_{k\beta m s}^{(+)}(\xi, \eta, \varphi) = C_{k\beta m}^{(s)} \Phi_{k\beta m}(\xi) \Phi_{k, -\beta, m+2s}(\eta) \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (13)$$

где

$$\Phi_{k\beta q}(x) = e^{-ikx/2} \frac{(ikx)^{|q|/2}}{|q|!} {}_1F_1\left(\frac{|q|+1}{2} + \frac{i}{2ak} + i\frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k}\beta; |q|+1; ikx\right), \quad (14)$$

а постоянная нормировки равна

$$C_{k\beta m}^{(s)} = \sqrt{\frac{k\sqrt{\mu}}{2\pi\hbar}} e^{\pi/(2ak)} \times \left| \Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} - \frac{i}{2ak} - i\frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k}\beta\right) \Gamma\left(\frac{|m+2s|+1}{2} - \frac{i}{2ak} + i\frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k}\beta\right) \right|. \quad (15)$$

Отметим, что при вычислении нормировочного множителя (15) мы использовали представление вырожденной гипергеометрической функции (9).

4. “ФОРМУЛА РЕЗЕРФОРДА”

Теперь рассмотрим рассеяние электрона на дионе. Поскольку система заряд-дион кулоновоподобная, то волновая функция не зависит от угла φ . Подставляя в уравнения (11) $m = 0$, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\Phi_1}{d\xi} \right) + \left[\frac{k^2}{4} \xi + \frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar} \beta + \frac{1}{2a} \right] \Phi_1 &= 0, \\ \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\Phi_2}{d\eta} \right) + \left[\frac{k^2}{4} \eta - \frac{s^2}{\eta} - \frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar} \beta + \frac{1}{2a} \right] \Phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Мы должны найти такие решения уравнений (16), чтобы решение уравнения Шредингера при отрицательных $z \in (-\infty, 0)$ и больших $r \rightarrow \infty$ имело вид плоской волны:

$$\psi^{(+)} \sim e^{ikz} = e^{ik(\xi-\eta)/2}.$$

Этому условию можно удовлетворить, если считать, что постоянная разделения

$$\beta = -i\frac{\hbar k}{\sqrt{\mu}} - \frac{\hbar}{a\sqrt{\mu}}.$$

Подставляя последнее соотношение в уравнения (16), находим решение уравнения Шредингера, которое описывает рассеяние электрона в поле диона:

$$\psi^{(+)} = C_k^{(s)} e^{ik(\xi-\eta)/2} (ik\eta)^{|s|} {}_1F_1\left(|s| + \frac{i}{ak}; 2|s| + 1; ik\eta\right), \quad (17)$$

где $C_k^{(s)}$ — постоянная нормировки. Для того чтобы выделить в функции (17) падающую и рассеянную волны, надо рассмотреть поведение этой функции на больших расстояниях от рассеивающего центра. Воспользовавшись первыми двумя членами представления (9) для вырожденной гипергеометрической функции, при больших η получим

$$\begin{aligned} {}_1F_1\left(|s| + \frac{i}{ak}; 2|s| + 1; ik\eta\right) &\approx e^{-\pi/(2ak)} \Gamma(2|s| + 1) (ik\eta)^{-|s|} \times \\ &\times \left[\frac{e^{i\pi|s|}}{\Gamma(|s| + 1 - i/(ak))} \left(1 + \frac{1 + a^2 k^2 s^2}{ia^2 k^3 \eta}\right) e^{-i \ln(k\eta)/(ak)} + \right. \\ &\left. + \frac{|s| + i/(ak)}{\Gamma(|s| + 1 + i/(ak))} \frac{e^{ik\eta}}{ik\eta} e^{i \ln(k\eta)/(ak)} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя теперь последнее соотношение в волновую функцию (17), выбирая постоянную нормировки $C_k^{(s)}$ в виде

$$C_k^{(s)} = e^{i\pi|s|} e^{\pi/(2ak)} \frac{\Gamma(|s| + 1 - i/(ak))}{\Gamma(2|s| + 1)},$$

чтобы падающая плоская волна имела единичную амплитуду, и переходя к сферическим координатам согласно формулам $r = (\xi + \eta)/2$, $\eta = r - z = r(1 - \cos \theta)$, получим

$$\begin{aligned} \psi^{(+)} &= \left[1 - \frac{i}{2a^2 k^3 r \sin^2(\theta/2)}\right] \exp\left[ikz - \frac{i}{ak} \ln\left(2kr \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)\right] + \\ &+ \frac{f(\theta)}{r} \exp\left[ikr + \frac{i}{ak} \ln(2kr)\right], \end{aligned}$$

где $f(\theta)$ — амплитуда рассеяния, равная

$$f(\theta) = -\frac{e^{-i\pi|s|}(1 - iak|s|)}{2ak^2 \sin^2(\theta/2)} \frac{\Gamma(|s| + 1 - i/(ak))}{\Gamma(|s| + 1 + i/(ak))} \exp\left(\frac{2i}{ak} \ln \sin \frac{\theta}{2}\right). \quad (18)$$

Таким образом, для сечения рассеяния $d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega$ ($d\Omega$ — элемент телесного угла) получим формулу

$$d\sigma = \frac{1 + a^2 k^2 s^2}{4a^2 k^4 \sin^4(\theta/2)} d\Omega,$$

которая, как легко заметить, при $s = 0$ переходит в известную формулу Резерфорда.

В случае векторного потенциала $A_i^{(-)}$ (2) решение уравнения Шредингера (1) для задачи рассеяния электрона на дионе, согласно калибровочному преобразованию (3), будет иметь вид

$$\psi^{(-)} = \psi^{(+)} e^{2is\varphi}.$$

Вернемся теперь к формуле (18). Полученная нами амплитуда рассеяния (18) отличается от амплитуды рассеяния, полученной в работе [1] для фазового множителя калибровочного преобразования $e^{2is\varphi}$.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО БАЗИСА ПО СФЕРИЧЕСКОМУ

Сферические (r, θ, φ) и параболические (ξ, η, φ) координаты связаны между собой следующим образом:

$$\xi = r(1 + \cos \theta), \quad \eta = r(1 - \cos \theta). \quad (19)$$

Искомое разложение при фиксированных значениях энергии имеет вид

$$\psi_{k\beta m s}^{(+)}(\xi, \eta, \varphi) = \sum_{\ell=m_+}^{\infty} W_{k\beta m s}^{\ell} \psi_{k\ell m s}^{(+)}(r, \theta, \varphi). \quad (20)$$

Умножим обе части разложения (20) на $Z_{\ell m s}^{(+)}(\theta) \sin \theta$, проинтегрируем по углу θ и используем условие ортонормировки (7). Далее, представим вырожденные гипергеометрические функции, входящие в параболический базис, в виде рядов

$${}_1F_1(a; c; z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s z^s}{s! (c)_s},$$

где $(a)_s = \Gamma(a+s)/\Gamma(a)$ – символ Похгаммера, и перейдем от параболических координат к сферическим согласно соотношению (19). Тогда вместо (20) будем иметь

$$\begin{aligned} W_{k\beta m s}^{\ell} F\left(\ell + 1 + \frac{i}{ak}; 2\ell + 2; 2ikr\right) &= \frac{(2\ell + 1)!}{2^{\ell} |m|! |m + 2s|!} \frac{C_{k\beta m}^{(s)}}{C_{k\ell}} \times \\ &\times \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(u)_p (v)_t}{p! t!} \frac{(ikr)^{p+t-\ell+m_+}}{(|m| + 1)_p (|m + 2s| + 1)_t} Q_{\ell m s}^{pt}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u &= \frac{|m| + 1}{2} + \frac{i}{2ak} + i \frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k} \beta, \quad v = \frac{|m + 2s| + 1}{2} + \frac{i}{2ak} - i \frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k} \beta, \\ Q_{\ell m s}^{pt} &= \int_0^{\pi} \sin \theta (1 + \cos \theta)^{|m|/2+p} (1 - \cos \theta)^{|m+2s|/2+t} Z_{\ell m s}^{(+)}(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Родрига для полинома Якоби [8]

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-a} (1+x)^{-b} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{a+n} (1+x)^{b+n}]$$

и последовательно интегрируя по частям, убеждаемся в том, что интеграл $Q_{\ell m s}^{pt}$ отличен от нуля только при условии $(p + t - \ell + m_+) \geq 0$, и поэтому все члены ряда содержат r в неотрицательной степени, так что в пределе $r \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned} W_{k\beta m s}^{\ell} &= \frac{(2\ell + 1)!}{2^{\ell} |m|! |m + 2s|!} \frac{C_{k\beta m}^{(s)}}{C_{k\ell}} \times \\ &\times \sum_{p=0}^{\ell-m_+} \frac{(u)_p (v)_{\ell-m_+-p}}{p! (\ell - m_+ - p)!} \frac{Q_{\ell m s}^{p, \ell-m_+-p}}{(|m| + 1)_p (|m + 2s| + 1)_{\ell-m_+-p}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Интеграл $Q_{\ell m s}^{pt}$ при $t = \ell - m_+ - p$ переходит в замкнутое выражение

$$Q_{\ell m s}^{p, \ell - m_+ - p} = 2^{\ell+1} \frac{(-1)^{\ell - m_+ - p}}{(2\ell + 1)!} \left[\frac{2\ell + 1}{2} (\ell - m_+)! (\ell + m_+)! (\ell - m_-)! (\ell + m_-)! \right]^{1/2}.$$

Подставляя последнее соотношение в формулу (21) и учитывая вспомогательные равенства

$$\begin{aligned} (v)_{\ell - m_+ - p} &= \frac{(-1)^p (v)_{\ell - m_+}}{(1 - \ell + m_+ - v)_p}, \quad (\ell - m_+ - p)! = \frac{(-1)^p (\ell - m_+)!}{(-\ell + m_+)_p}, \\ (|m + 2s| + 1)_{\ell - m_+ - p} &= \frac{(-1)^p (\ell - m_-)!}{|m + 2s|! (-\ell + m_-)_p}, \end{aligned}$$

для коэффициентов разложения $W_{k\beta m s}^\ell$ получим

$$\begin{aligned} W_{k\beta m s}^\ell &= (-1)^{\ell - m_+} \frac{C_{k\beta m}^{(s)}}{C_{k\ell}} \frac{2}{|m|!} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell + m_+)! (\ell + m_-)!}{(\ell - m_+)! (\ell - m_-)!}} (v)_{\ell - m_+} \times \\ &\times {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -\ell + m_+, -\ell + m_-, u \\ |m| + 1, 1 - \ell + m_+ - v \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь формулой [10]

$${}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} s, s', -N \\ t', 1 - N - t \end{matrix} \middle| 1 \right\} = \frac{(t + s)_N}{(t)_N} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} s, t' - s', -N \\ t', t + s \end{matrix} \middle| 1 \right\}, \quad (22)$$

последнее соотношение можно записать в виде

$$\begin{aligned} W_{k\beta m s}^\ell &= (-1)^{\ell - m_+} \frac{C_{k\beta m}^{(s)}}{C_{k\ell}} \frac{2}{|m|!} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2} \frac{(\ell + m_+)! (\ell + m_-)!}{(\ell - m_+)! (\ell - m_-)!}} \times \frac{\Gamma(\ell + 1 + i/(ak))}{\Gamma(m_+ + 1 + i/(ak))} \times \\ &\times {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -\ell + m_+, \ell + m_+ + 1, \frac{|m|+1}{2} + \frac{i}{2ak} + i\frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k} \beta \\ |m| + 1, m_+ + 1 + \frac{i}{ak} \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

До сих пор мы не пользовались явным видом нормировочных постоянных $C_{k\ell}$ и $C_{k\beta m}^{(s)}$. В этом смысле формула (23) справедлива при любом способе нормировки волновых функций. В принятой нами нормировке

$$\begin{aligned} W_{k\beta m s}^\ell &= (-1)^{\ell - m_+} \sqrt{\frac{\mu^{1/2}}{\pi \hbar k}} \frac{e^{-i\delta_\ell}}{|m|!} \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4} \frac{(\ell + m_+)! (\ell + m_-)!}{(\ell - m_+)! (\ell - m_-)!}} \times \\ &\times \left| \Gamma \left(\frac{|m| + 1}{2} - \frac{i}{2ak} - i\frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k} \beta \right) \Gamma \left(\frac{|m + 2s| + 1}{2} - \frac{i}{2ak} + i\frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k} \beta \right) \right| \times \\ &\times \left(\Gamma \left(m_+ + 1 + \frac{i}{ak} \right) \right)^{-1} \times \\ &\times {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -\ell + m_+, \ell + m_+ + 1, \frac{|m|+1}{2} + \frac{i}{2ak} + i\frac{\sqrt{\mu}}{2\hbar k} \beta \\ |m| + 1, m_+ + 1 + \frac{i}{ak} \end{matrix} \middle| 1 \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

где δ_ℓ — фаза рассеяния системы заряд-дион. Пользуясь формулой (22), можно убедиться, что коэффициенты разложения (24) вещественны.

6. ОБРАТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Параболическая постоянная β , вообще говоря, может принимать как действительные, так и комплексные значения (например, в задаче рассеяния заряженных частиц в поле диона). Поэтому заведомо неясно, по каким β следует интегрировать в обратном преобразовании.

Рассмотрим интеграл

$$Q_{\ell\ell'} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{k\beta m_s}^{\ell} W_{k\beta m_s}^{\ell'*} d\beta.$$

Подставим в него вместо $W_{k\beta m_s}^{\ell}$ выражение (24) и перейдем от обобщенной гипергеометрической функции ${}_3F_2$ к конечной сумме, через которую она выражается. Тогда, заменяя также β на $z = i\sqrt{\mu}\beta/(2\hbar k)$, получим

$$\begin{aligned} Q_{\ell\ell'} = & (-1)^{\ell+\ell'-2m_+} \left| \Gamma\left(\frac{|m|+|m+2s|}{2} + 1 + \frac{i}{ak}\right) \right|^{-2} \frac{e^{i(\delta_{\ell'}-\delta_{\ell})}}{(|m|!)^2} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \times \\ & \times \left[\frac{(\ell+m_+)!(\ell+m_-)!(\ell'+m_+)!(\ell'+m_-)!}{(\ell-m_+)!(\ell-m_-)!(\ell'-m_+)!(\ell'-m_-)!} \right]^{1/2} \times \\ & \times \sum_{p=0}^{\ell-m_+} \frac{(-\ell+m_+)_p (\ell+m_++1)_p}{p!(m_++1+i/(ak))_p} \sum_{t=0}^{\ell'-m_+} \frac{(-\ell'+m_+)_t (\ell'+m_++1)_t}{t!(m_++1-i/(ak))_t} B_{pt}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_{pt} = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} + p + \frac{i}{2ak} + z\right) \Gamma\left(\frac{|m|+1}{2} + t - \frac{i}{2ak} - z\right) \times \\ & \times \Gamma\left(\frac{|m+2s|+1}{2} - \frac{i}{2ak} + z\right) \Gamma\left(\frac{|m+2s|+1}{2} + \frac{i}{2ak} - z\right) dz. \end{aligned}$$

Согласно лемме Барнса [11]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s) ds = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},$$

если полюсы выражения $\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$ лежат справа от пути интегрирования, а полюсы выражения $\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)$ — слева, причем ни один из полюсов первой совокупности не совпадает ни с одним из полюсов второй совокупности. В нашем случае требования этой леммы соблюдаются, и поэтому

$$\begin{aligned} Q_{\ell\ell'} = & (-1)^{\ell+\ell'-2m_+} \frac{e^{i(\delta_{\ell'}-\delta_{\ell})} |m+2s|!}{|m|!(2m_++1)!} \sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)} \times \\ & \times \left[\frac{(\ell+m_+)!(\ell+m_-)!(\ell'+m_+)!(\ell'+m_-)!}{(\ell-m_+)!(\ell-m_-)!(\ell'-m_+)!(\ell'-m_-)!} \right]^{1/2} \times \\ & \times \sum_{p=0}^{\ell-m_+} \frac{(-\ell+m_+)_p (\ell+m_++1)_p}{p!(2m_++2)_p} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -\ell'+m_+, \ell'+m_++1, |m|+p+1 \\ |m|+1, 2m_++p+2 \end{matrix} \middle| 1 \right\}. \end{aligned}$$

Теперь, пользуясь теоремой Заальшютца [11]

$${}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} a, b, -n \\ c, 1 + a + b - c - n \end{matrix} \middle| 1 \right\} = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n}, \quad (25)$$

получим

$$Q_{\ell\ell'} = \frac{(-1)^{\ell-2\ell'+m_+}}{\Gamma(1-\ell'+m_+)} \left[\frac{(\ell+m_+)!(\ell+m_-)!(\ell'+m_+)!(\ell'-m_-)!}{(\ell-m_+)!(\ell-m_-)!(\ell'-m_+)!(\ell'+m_-)!} \right]^{1/2} \times \\ \times e^{i(\delta_{\ell'}-\delta_{\ell})} \frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{(\ell'+m_++1)!} {}_3F_2 \left\{ \begin{matrix} -\ell+m_+, \ell+m_++1, 1 \\ -\ell'+m_++1, \ell'+m_++2 \end{matrix} \middle| 1 \right\}.$$

Повторно применяя теорему Заальшютца (25), окончательно получим

$$Q_{\ell\ell'} = \frac{(-1)^{2(\ell-\ell')} e^{i(\delta_{\ell'}-\delta_{\ell})}}{\Gamma(\ell-\ell'+1)\Gamma(\ell'-\ell+1)} \frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{(\ell+\ell'+1)} \times \\ \times \left[\frac{(\ell+m_+)!(\ell+m_-)!(\ell'-m_+)!(\ell'-m_-)!}{(\ell-m_+)!(\ell-m_-)!(\ell'+m_+)!(\ell'+m_-)!} \right]^{1/2}.$$

Так как числа ℓ и ℓ' целые или полуцелые одновременно, то последнее выражение обращается в нуль при $\ell \neq \ell'$ за счет произведения гамма-функций от $(\ell-\ell'+1)$ и $(\ell'-\ell+1)$ и в единицу при $\ell = \ell'$, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_{k\beta m s}^{\ell} W_{k\beta m s}^{\ell'*} d\beta = \delta_{\ell\ell'}. \quad (26)$$

Тогда, учитывая (26), для обратного разложения получим

$$\psi_{k\ell m s}^{(+)}(r, \theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} W_{k\beta m s}^{\ell} \psi_{k\beta m s}^{(+)}(\xi, \eta, \varphi) d\beta,$$

где интегрирование ведется по вещественной оси.

Результаты, полученные в разделах 5 и 6, при $s = 0$ с точностью фазового множителя совпадают с формулами работы [12].

Благодарности. Автор благодарит А. Н. Сисакяна, В. М. Тер-Антоняна, Э. А. Айрына за полезные обсуждения и ANSEF (грант № PS124-01) за финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] *D. Zwanziger*. Phys. Rev. 1968. V. 176. P. 1480.
- [2] *J. Schwinger*. Science. 1969. V. 165. P. 757.
- [3] *A. Nersessian, V. Ter-Antonyan*. Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 2431; 1995. V. 10. P. 2633; *L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan*. Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 237.
- [4] *V. M. Ter-Antonyan*. Dyon-oscillator duality. quant-ph/0003106; *A. Nersessian, V. Ter-Antonyan, M. Tsulaia*. Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 19. P. 1605.
- [5] *Л. Г. Мардоян, А. Н. Сисакян, В. М. Тер-Антонян*. ЯФ. 1998. Т. 61. С. 1859.
- [6] *Т.-П. Ченг, Л.-Ф. Ли*. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. М.: Наука, 1987; *J. A. Harvey*. Magnetic monopoles, duality, and supersymmetry. hep-th/9603086.
- [7] *P. A. M. Dirac*. Proc. Roy. Soc. A. 1931. V. 133. P. 69.
- [8] *Г. Сеге*. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
- [9] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
- [10] *W. N. Beiley*. Generalized hypergeometric series. Cambridge Tracts. № 32. Cambridge, 1935.
- [11] *Г. Бейтман, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1965.
- [12] *Г. С. Погосян, В. М. Тер-Антонян*. Связь между сферическими и параболическими кулоновскими волновыми функциями в непрерывном спектре. Препринт Р2-80-318. Дубна: ОИЯИ, 1980.

Поступила в редакцию 16.IX.2002 г.,
после доработки 15.I.2003 г.