Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Шабат, Универсальные модели солитонных иерархий, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 2, 197–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf225>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:15:56

© 2003 г.

А. Б. Шабат*

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СОЛИТОННЫХ ИЕРАРХИЙ

Рассматриваются уравнения коммутативности и связанная с ними новая модель, аналогичная уравнению Кадомцева–Петвиашвили в теории Сато. Интегрирование этого модельного уравнения с тремя независимыми переменными основано на обобщении уравнений Дубровина и развитой недавно новой теории преобразований спектральных задач. Приведены примеры уравнений с корневым законом дисперсии, линейных в рамках этой теории.

Ключевые слова: уравнения коммутативности, уравнения Дубровина, классические иерархии.

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении солитонных иерархий бывает полезно начинать с моделей, описывающих абстрактные абелевы иерархии дифференцирований

$$D_0 = D_{x_0}, \quad D_1 = D_{x_1}, \quad D_2 = D_{x_2}, \quad \dots$$

по независимым переменным $x_0, x_1, x_2, \dots$. К числу таких моделей относятся следующие уравнения коммутативности:

$$[D_m - G_m(\lambda, \mathbf{x})D_0, D_n - G_n(\lambda, \mathbf{x})D_0] = 0, \quad (1)$$

$$[D_m - F_m(\mathbf{x}, D_0), D_n - F_n(\mathbf{x}, D_0)] = 0. \quad (2)$$

Здесь в первом случае $G_k(\lambda, \mathbf{x})$ — полином степени k по дополнительному параметру λ с коэффициентами, зависящими от $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots)$, а во втором случае $F_k(\mathbf{x}, D_0)$ является дифференциальным оператором порядка k , т.е. полиномом от D_0 . В обоих случаях постулируется, что $\text{Ker } D_0$ исчерпывается постоянными, и вводятся дополнительные условия нормировки, гарантирующие корректность определений (1), (2) дифференцирований $D_1, \dots, D_n, \dots$ в терминах базового дифференцирования D_0 . В случае более простой G -модели (1), которой посвящена данная работа, условия, обеспечивающие

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: shabat@itp.ac.ru

корректность определения D_n , сводятся к приравниванию единице старших коэффициентов полиномов G_n . Как мы увидим в дальнейшем, сравнение коэффициентов с одинаковыми степенями λ в эквивалентных (1) уравнениях

$$D_n(G_m) - D_m(G_n) = \langle G_n, G_m \rangle, \quad \langle u, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} uD_0(v) - vD_0(u), \quad (3)$$

однозначно определяет действие D_n на G_k в терминах дифференцирования D_0 .

Теория G -модели имеет много точек соприкосновения с более изученной теорией F -модели (2). Мы напомним в данном разделе некоторые известные факты этой теории, популярной в 80-е годы (см., например, [1]). Уравнения (2) являются условиями совместности системы уравнений

$$D_n(A) = [F_n, A], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

для коэффициентов псевдодифференциального оператора

$$A = \sum_{k < +\infty} a_{-k} D_0^k = a_{-n} D_0^n + \dots + a_0 + a_1 D_0^{-1} + \dots$$

Условия коммутации задаются при этом следующими формулами с биномиальными коэффициентами:

$$D^{-k}a \stackrel{\text{def}}{=} aD^{-k} + a_x \binom{-k}{1} D^{-k-1} + a_{xx} \binom{-k}{2} D^{-k-2} + \dots, \quad D_0 = D = D_x.$$

Характерным свойством уравнений Лакса (4) является то, что наряду с A формальный ряд A^m по степеням D^{-k} также является решением (4) при $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Полагая

$$A = D + D^{-1}a_1 + D^{-2}a_2 + D^{-3}a_3 + \dots, \quad (5)$$

мы находим

$$\begin{aligned} A^n &= F_n + A_n, \quad A_n = D^{-1}a_{n1} + D^{-2}a_{n2} + D^{-3}a_{n3} + \dots, \quad n = 2, 3, \dots, \\ F_1 &= D = D_0, \quad F_2 = D^2 + 2a_1, \quad F_3 = D^3 + 3a_1D + 3a_2. \end{aligned}$$

Так в рамках F -модели возникает уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$u_{tx} = (u_{xxx} + 4uu_x)_x + u_{yy}, \quad u = a_1, \quad D_1 = D_x, \quad D_2 \stackrel{\text{def}}{=} D_y, \quad D_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{4}D_t. \quad (6)$$

Другими словами, иерархия КП соответствует нормализации

$$F_n = f_{0n}D^n + f_{1n}D^{n-1} + \dots + f_{nn}, \quad f_{0n} = 1, \quad f_{1n} = 0, \quad (7)$$

в уравнениях F -модели (2). Другая нормализация $f_{0n} = 1$, $f_{nn} = 0$ приводит, как можно проверить, к модифицированному уравнению КП (мКП) и иерархии мКП.

Наиболее естественно уравнения F -модели возникают в симметричном подходе, так как условия совместности

$$u_t = F(u, u_x, \dots), \quad u_\tau = \widehat{F}(u, u_x, \dots), \quad u \equiv u + \varepsilon \phi, \quad (8)$$

приводят к совместности линеаризованных уравнений

$$\phi_t = F_* \phi, \quad \phi_\tau = \widehat{F}_* \phi,$$

где F_* , $\widehat{F}_*$ – линейные дифференциальные операторы, порядки которых определяются порядками рассматриваемых нелинейных уравнений (8). Равенство смешанных производных $\phi_{t\tau} = \phi_{\tau t}$ для линеаризованных уравнений дает, очевидно, уравнения вида (2):

$$[D_t - F_*, D_\tau - \widehat{F}_*] = 0 \Leftrightarrow D_t(\widehat{F}_*) = [F_*, \widehat{F}_*] + D_\tau(F_*).$$

Более того, как было доказано в работе [2], для скалярного уравнения $u_t = F$ из существования симметрий сколь угодно высокого порядка следует разрешимость операторного уравнения (4) для псевдодифференциального оператора A :

$$F_n = F_* = F_u + F_{u_x} D + F_{u_{xx}} D^2 + \dots$$

Здесь, правда, порядок n фиксирован и совпадает с порядком рассматриваемого уравнения $u_t = F$. Однако в случае (5), как, например, для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ):

$$u_t = u_{xxx} + uu_x, \quad F_3 = F_* = D^3 + uD + u_x,$$

можно доопределить F_m при $m \neq n$, положив $F_m = (A^m)_+$, и вложить тем самым иерархию КдФ в иерархию КП.

2. G-МОДЕЛЬ

Всюду в дальнейшем уравнения Лакса (4) заменяются уравнениями

$$D_n(B) = \langle G_n, B \rangle \stackrel{\text{def}}{=} G_n D_0(B) - B D_0(G_n). \quad (9)$$

Уравнения (3) теперь играют роль условий совместности для этой системы уравнений. Предположим, что функция $B = B(\lambda, \mathbf{x})$ “регулярна” в точках $\lambda = \infty, 0$ и допускает асимптотические разложения

$$B = \begin{cases} 1 + \frac{g_1}{\lambda} + \frac{g_2}{\lambda^2} + \dots, & \lambda \simeq \infty, \\ b + \lambda b_1 + \dots, & \lambda \simeq 0. \end{cases} \quad (10)$$

В результате подстановки в (9) первого из этих разложений и приравнивания коэффициентов при степенях λ получаем, что старшие коэффициенты полиномов G_n должны быть постоянными и что без ограничения общности можно положить

$$G_n = \lambda^n + g_1 \lambda^{n-1} + \dots + g_{n-1} \lambda + g_n. \quad (11)$$

Уравнения (9) задают динамику не только базовых динамических переменных $g_1, g_2, g_3, \dots$, т.е. коэффициентов полиномов G_n , но и дополнительного набора переменных $b, b_1, b_2, \dots$. В частности, мы получаем

$$D_n(b_1) = D_{n-1}(b) + \langle g_n, b_1 \rangle, \quad D_n(b) = \langle g_n, b \rangle, \quad D_n(g_1) = D_0(g_n). \quad (12)$$

Нашей ближайшей целью является вывод в рамках G -модели уравнения, аналогичного (6). Полезно заметить прежде, что

$$BH = 1 \Rightarrow D_n(H) = D_0(G_n H)$$

и что в силу (10)

$$H = \begin{cases} 1 + \frac{h_1}{\lambda} + \frac{h_2}{\lambda^2} + \dots, & \lambda \simeq \infty, \quad h_1 = -g_1, \quad h_2 = g_1^2 - g_2, \quad \dots, \\ a + \lambda a_1 + \dots, & \lambda \simeq 0, \quad ab = 1, \quad ab_1 + ba_1 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Ясно, что уравнения (9), переписанные в терминах коэффициентов разложения $H = B^{-1}$, эквивалентны G -модели и определяют ее законы сохранения. Мы находим, в частности,

$$D_1(a) = D_0(ag_1), \quad D_2(a) = D_0(ag_2), \quad D_1(g_1) = D_0(g_2).$$

Отсюда, вводя потенциал q , мы получаем следующий аналог уравнения КП:

$$D_0\left(\frac{q_2}{q_0}\right) = D_1\left(\frac{q_1}{q_0}\right), \quad dq = a(dx_0 + g_1 dx_1 + g_2 dx_2). \quad (14)$$

В разделе 4 мы обсудим соответствующую технику “конечнозонного” интегрирования этого уравнения. Будет показано также, что уравнение (14) можно привести к виду

$$u_{tt} = u_t u_{xy} - u_y u_{tx}. \quad (15)$$

В заключение этого раздела мы приведем полезную лемму технического характера. Для произвольного дифференцирования D мы будем обозначать

$$\{D, A\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3}{4} \left(\frac{D(A)}{A} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{D^2(A)}{A} \Rightarrow \{D, A\} = \frac{D^2(B)}{B} \quad \text{при } A = B^{-2}. \quad (16)$$

Нетрудно проверить следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $b = B|_{\lambda=0}$, $ab = 1$ и $\widehat{D} = D_1 - g_1 D_0$. Тогда из (9), (11) следует, что

$$\begin{aligned} \widehat{D} \ln B &= \lambda D_0 \ln B + \widehat{D} \ln b, \\ \{\widehat{D}, H\} &= \lambda^2 \{D_0, H\} + \frac{1}{2} \lambda D_0^2(h_1) + \{\widehat{D}, a\}. \end{aligned}$$

Дифференциальные формы. Уравнения (1) сохраняют свою форму при замене D_0 на $D_{11} \stackrel{\text{def}}{=} D_1 - g_1 D_0$. А именно, из (3), (11), как легко проверить, следует (см. [3]), что

$$\begin{aligned} [D_{m1} - G_{m-1} D_{11}, D_{n1} - G_{n-1} D_{11}] &= 0, & D_{n1} &\stackrel{\text{def}}{=} D_n - g_n D_0, & n, m \geq 1, \\ [D_{m2} - G_{m-2} D_{22}, D_{n2} - G_{n-2} D_{22}] &= 0, & D_{n2} &\stackrel{\text{def}}{=} D_{n1} - g_{n-1} D_{11}, & n, m \geq 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как эти уравнения совпадают по форме с (1), то наряду с набором $D_1, \dots, D_n, \dots$ возникает новый набор коммутирующих дифференцирований $D_{11}, \dots, D_{n1}, \dots$, и мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$D_{01} = b D_0, \quad D_{11} = D_1 - g_1 D_0, \quad D_{n1} = D_n - g_n D_0, \quad n \geq 1, \quad (18)$$

$$D_{02} = D_{01} + b_1 D_{11}, \quad D_{12} = b D_{11}, \quad D_{n2} = D_{n1} - g_{n-1} D_{11}, \quad n \geq 2, \quad (19)$$

и выполнены уравнения (9), (10), (12). Тогда $[D_{j1}, D_{k1}] = 0$, $[D_{j2}, D_{k2}] = 0$ при всех j, k и следующие дифференциальные формы являются замкнутыми:

$$\omega_0 = g_1 dx_0 + g_2 dx_1 + g_3 dx_2 + \dots, \quad D_{x_j} \stackrel{\text{def}}{=} D_j, \quad (20)$$

$$\omega_1 = b dy_0 - g_1 dy_1 - g_2 dy_2 - g_3 dy_3 - \dots, \quad D_{y_j} \stackrel{\text{def}}{=} D_{j1}, \quad (21)$$

$$\omega_2 = b_1 dz_0 + b dz_1 - g_1 dz_2 - g_2 dz_3 - \dots, \quad D_{z_j} \stackrel{\text{def}}{=} D_{j2}. \quad (22)$$

Замкнутые дифференциальные формы (20)–(22) позволяют построить преобразования координат

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots) \mapsto \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots) \mapsto \mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots), \quad (23)$$

связывающие соответствующие наборы коммутирующих дифференцирований

$$(D_0, \dots, D_n, \dots) \mapsto (D_{01}, \dots, D_{n1}, \dots) \mapsto (D_{02}, \dots, D_{n2}, \dots).$$

Эти преобразования задаются формулами

$$\begin{aligned} dx_0 &= \omega_1, & dy_0 &= \hat{\omega}_1, & x_j &= y_j, & j \neq 0, \\ dy_1 &= \omega_2, & dz_1 &= \hat{\omega}_2, & y_j &= z_j, & j \neq 1, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\hat{\omega}_1 = a(dx_0 + g_1 dx_1 + g_2 dx_2 + g_3 dx_3 + \dots), \quad (25)$$

$$\hat{\omega}_2 = a(-b_1 dy_0 + dy_1 + g_1 dy_2 + g_2 dy_3 + \dots). \quad (26)$$

Действительно, обозначив $\omega_2 = dq$, мы находим, что в силу соотношений

$$D_{11} = a D_{12}, \quad D_{01} = D_{02} - a b_1 D_{21}, \quad D_{21} = D_{22} + a g_1 D_{12}, \quad \dots$$

$D_{11}(q) = 1$, $D_{j1}(q) = 0$, $j > 1$. Аналогично доказывается, что $\omega_1 = dx_0$. Другими словами, коэффициенты B (10) разложения Тейлора в точке $\lambda = 0$ позволяют обратить формулы (18), (19) и определить соответствующие преобразования (23) типа годографа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Грубо говоря, преобразования (24) сводятся к замене независимых переменных зависимыми и наоборот. При такой замене

$$w(x_0, x_1, \dots) = y_0, \quad \widehat{w}(y_0, y_1, \dots) = x_0 \Leftrightarrow \widehat{w}[w(x_0, y_1, \dots), y_1, \dots] = x_0, \quad (27)$$

где $y_j = x_j$, $j \geq 1$, мы имеем

$$\widehat{D}_0 = \frac{1}{w_1} D_0, \quad \widehat{D}_j = D_j - \frac{w_t}{w_1} D_0, \quad w_1 \widehat{w}_1 = 1, \quad w_1 \widehat{w}_t + w_t = 0,$$

где обозначено для краткости $t = x_j = y_j$.

Изложенная теория преобразований позволяет пополнить набор полиномов (11) G -модели. Положив

$$G_{-2} = \frac{b}{\lambda^2} + \frac{b_1}{\lambda}, \quad G_{-1} = \frac{b}{\lambda}, \quad G_0 = 1, \quad G_1 = \lambda + g_1, \quad \dots, \quad (28)$$

мы находим с использованием теоремы, что для всех $n = 0, 1, 2, \dots$

$$D_n(H) = D_0(G_n H), \quad D_{n1}(bH) = \lambda D_{01}(G_{n-1} H), \quad D_{n1}(H) = D_{11}(G_{n-1} H), \quad (29)$$

$$D_{n2}[(b + b_1 \lambda) H] = \lambda^2 D_{02}(G_{n-2} H), \quad D_{n2}(bH) = \lambda D_{12}(G_{n-2} H) \quad (30)$$

и что при $j = 1, 2$

$$D_{nj}(H) = D_{jj}(G_{n-j} H) \Leftrightarrow D_{nj}(B) = \langle G_{n-j}, B \rangle_j, \quad \langle u, v \rangle_j \stackrel{\text{def}}{=} u D_{jj}(v) - v D_{jj}(u).$$

Последние уравнения совпадают по форме с уравнениями G -модели, если в (3) заменить базовое дифференцирование D_0 на D_{jj} , $j = 1, 2$, и ввести отрицательные времена в соответствии с (28). Таким образом, включение в набор динамических переменных коэффициентов обоих разложений (10) существенно расширяет возможности теории.

В рамках этой расширенной теории уравнения (14) и (15) становятся эквивалентными по модулю преобразований (24). Действительно, уравнение (15), переписанное в новых обозначениях, принимает вид

$$D_{11}(q_1) = q_1 D_{01}(q_2) - q_2 D_{01}(q_1), \quad dq = \widehat{\omega}_2.$$

По модулю преобразований (24) оно эквивалентно уравнению $D_{12}(q_1) = \langle q_1, q_0 \rangle_2$, $dq = \omega_2$. Последнее является следствием (30), так как

$$D_{12}(b_1) = D_{02}(b), \quad D_{12}(b) = \langle b, b_1 \rangle_2.$$

3. РАСШИРЕНИЕ КЛАССИЧЕСКИХ ИЕРАРХИЙ

В работах [3], [4] было показано, что спектральным задачам

$$D_0^2(\psi) = U(\mathbf{x}, \lambda)\psi$$

с полиномиальным по λ потенциалом $U(\mathbf{x}, \lambda)$ в рамках G -модели отвечают дифференциальные связи

$$\{D_0, H\} + \alpha(\lambda)H^2 = U(\mathbf{x}, \lambda) \quad (31)$$

и что по модулю преобразований типа (24) эти связи сводятся (ср. с леммой 1) к двум хорошо известным случаям

$$\alpha(\lambda) = \lambda \Leftrightarrow U = \lambda + 2h_1, \quad \alpha(\lambda) = \lambda^2 \Leftrightarrow U = \lambda^2 + 2\lambda h_1 + 2h_2 + h_1^2.$$

Грубо говоря, уравнения (31) мало отличаются (см. (16)) от соответствующих спектральным задачам уравнений Риккати. Отметим, что при фиксированном полиноме $\alpha(\lambda)$ с постоянными коэффициентами уравнения (31) задают параметризацию потенциалов в рамках G -модели в терминах коэффициентов разложения (13) и накладывают на последние определенные дифференциальные связи (см. ниже).

Кроме связей второго порядка (31) G -модель допускает более жесткие дифференциальные связи первого порядка

$$D_0 \ln B + \beta(\lambda)H = V(\mathbf{x}, \lambda), \quad BH = 1. \quad (32)$$

Легко проверить дифференцированием, что при этом выполняется уравнение (31) с

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{4}\beta(\lambda), \quad U = \frac{1}{2}D_0(V) + \frac{1}{4}V^2.$$

Как и в случае (31), по модулю преобразований типа (24) связи первого порядка сводятся (см. лемму 1 и работу [4]) к простейшему случаю с $\beta(\lambda) = \lambda$.

3.1. Уравнения, сводимые к линейным. В случае $\beta(\lambda) = \lambda$ дифференциальная связь первого порядка (32) дает

$$D_0 \ln H + \lambda + h_1 = \lambda H \Rightarrow g_1 = D_0 \ln a, \quad h_2 = D_0(h_1), \dots, \quad (33)$$

так как при этом $V = \lambda + h_1$. В стандартном наборе динамических переменных G -модели уравнения $D_1(g_1) = D_0(g_2)$, $g_1 + h_1 = g_2 + g_1 h_1 + h_2 = 0$ приводят нас к уравнению Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x, \quad u = g_1, \quad D_t = D_1, \quad D_x = D_0.$$

С другой стороны, первое из уравнений (29) с учетом $a = H|_{\lambda=0}$ дает

$$D_1(a) = D_0(g_1 a) \Leftrightarrow a_t = a_{xx}, \quad g_1 = (\ln a)_x. \quad (34)$$

Таким образом, хорошо известная замена, линеаризующая иерархию Бюргерса, отвечает переходу от g_1 к первой нелокальной динамической переменной a . Возвращаясь к уравнению (14), мы находим при $a = D_0(q) = q_0$

$$D_1(q) = D_0^2(q), \quad D_2(q) = D_0^3(q) \Rightarrow D_0\left(\frac{q_2}{q_0}\right) = D_1\left(\frac{q_1}{q_0}\right), \quad dq = \widehat{\omega}_1.$$

Указанная редукция общего уравнения (14) порождена, очевидно, дифференциальной связью (33).

Интересным представителем иерархии, порожденной дифференциальной связью (32) с $\beta(\lambda) = \lambda^2$, является уравнение

$$(q_\tau q_z)_\tau = \left(\frac{q_{zz}}{q_z^2}\right)_z \quad (35)$$

с необычным законом дисперсии. Заметим сначала, что в силу леммы 1

$$D_0(B) = (\lambda + h_1)B - \lambda \Rightarrow D_{11}(B) = (\lambda^2 + h_1\lambda + h_2)B - \lambda^2.$$

Последнее уравнение задает, очевидно, требуемую дифференциальную связь (32) с $\beta(\lambda) = \lambda^2$ при базовом дифференцировании D_{11} вместо D_0 . Эта дифференциальная связь (ср. (33)) дает

$$h_2 = D_{11}(\ln b), \quad g_3 = D_{11}(g_1) + 2g_1g_2 - g_1^3, \quad \dots \quad (36)$$

Используя уравнения (29), мы находим для пары динамических переменных a, g_1

$$\begin{aligned} D_{21}(a) &= D_{11}(g_1 a), & D_{21}(g_1) &= D_{11}(g_1^2) + D_{11}^2(\ln a), \\ D_{21}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) &= D_{11}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 + D_{11}^2(\ln q_1), & dq &= \widehat{\omega}_2. \end{aligned} \quad (37)$$

Преобразование (24) приводит последнее уравнение к виду

$$D_{22}(q_1 q_2) + D_{12}^2\left(\frac{1}{q_1}\right) = 0, \quad dq = \omega_2,$$

которое совпадает с приведенным выше уравнением (35) с точностью до обозначений.

В недавней работе [5] в рамках симметричного подхода была решена задача о классификации уравнений типа (37) с законом дисперсии $\omega^2(k) = k^3$

$$u_{tt} = u_{xxx} + \widetilde{F}(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tx}), \quad (38)$$

обладающих высшими симметриями. Сопоставление полученного списка с аналогичным списком уравнений

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}), \quad (39)$$

полученным Свинолуповым [6], и соответствующая этим спискам теория преобразований показывают, что вопрос об интегрировании уравнений (38) является существенно более сложным по сравнению с (39) и не исчерпывается преобразованиями типа (24).

3.2. Иерархия КдФ. В случае $\alpha(\lambda) = \lambda^{(1)}$ дифференциальная связь второго порядка (31) дает

$$\{D_0, H\} + \lambda H^2 = \lambda + 2h_1 \Rightarrow 2h_1 = \{D_0, a\}, \quad 4h_2 = D_0^2(h_1) - 2h_1^2, \quad \dots \quad (40)$$

Второе из этих соотношений вместе с уравнением $D_1(g_1) = D_0(g_2)$ рассматриваемой G -модели приводит к уравнению КдФ для $u = g_1 = -h_1$

$$u_t = u_{xxx} + 12uu_x, \quad u = g_1, \quad D_t = 4D_1, \quad D_x = D_0. \quad (41)$$

Первое из соотношений (40) определяет преобразование типа Миуры в другую известную форму этого уравнения (ср. (34)):

$$D_1(a) = D_0(g_1 a) \Leftrightarrow a_t = D_x \left(a_{xx} - \frac{3}{2} \frac{a_x^2}{a} \right), \quad g_1 = -\frac{1}{2} \{D_x, a\}. \quad (42)$$

Как и в случае уравнения Бюргерса, дифференциальные связи (40) вместе с уравнением $D_2(a) = D_0(ag_2)$ позволяют строить решения уравнения (14) по решениям уравнения (42):

$$q_0 = a, \quad q_1 = ag_1, \quad q_2 = ag_2 \Rightarrow D_0 \left(\frac{q_2}{q_0} \right) = D_1 \left(\frac{q_1}{q_0} \right).$$

Обращаясь далее к приведенной в разделе 2 теореме и уравнениям (29), мы находим

$$D_{11}(b) = D_{01}(h_1) \Leftrightarrow a_t = a^3 a_{yy}, \quad D_t \stackrel{\text{def}}{=} 4D_{11}, \quad D_y \stackrel{\text{def}}{=} D_{01} = bD_0. \quad (43)$$

Таким образом, уравнение (42) в результате замены (24) переходит в уравнение Гарри Дима. С другой стороны, в силу леммы 1

$$\begin{aligned} \{D_0, H\} + \lambda H^2 = U_0 &\Rightarrow \{D_{11}, H\} + \lambda^3 H^2 = U_1, \\ U_0 = \lambda + 2h_1, \quad U_1 = \lambda^3 + 2\lambda^2 h_1 + \lambda(2h_2 + h_1^2) + 2h_3 + 2h_1 h_2 + h_2^2. \end{aligned}$$

Можно проверить теперь, что уравнение Гарри Дима задает *нелокальную* параметризацию потенциала $U_1(\lambda, t) = \lambda^3 + u_1(t)\lambda^2 + u_2(t)\lambda + u_3(t)$:

$$u_3 = \{D_t, a\}, \quad u_2 = -a(\ln a)_{ty}, \quad u_1 = \frac{1}{4}a_y^2 - \frac{1}{2}aa_{yy}. \quad (44)$$

Полученные формулы имеют интересные приложения [7] в краевой задаче для уравнения (41) на полуоси $x \geq 0$ с краевыми условиями при $x = 0$.

Как уже упоминалось в начале раздела, теория преобразований G -модели позволяет установить связь спектральной задачи

$$\psi_{tt} = U_1(\lambda, t)\psi$$

¹⁾Случай $\alpha(\lambda) = \lambda^2$ соответствует иерархии нелинейного уравнения Шредингера [3], [4].

со спектральной задачей Шредингера. Опираясь на теорему Коши–Ковалевской об однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения Гарри Дима с начальными данными при $y = 0$

$$a_t = a^3 a_{yyy}, \quad a|_{y=0} = a_0(t), \quad a_y|_{y=0} = a_1(t), \quad a_{yy}|_{y=0} = a_2(t),$$

можно выразить U_1 через эти начальные данные посредством формул (44). Остается заменить здесь уравнение Гарри Дима соответствующей парой Лакса и проверить, что

$$a^2 \hat{\psi}_{yy} = \lambda \hat{\psi}, \quad D_t \hat{\psi} = \lambda \left(a D_y - \frac{1}{2} a_y \right) \hat{\psi} \Rightarrow \psi_{tt} = U_1 \psi, \quad \psi = \sqrt{a} \hat{\psi}.$$

4. УРАВНЕНИЯ ДУБРОВИНА

Подстановка в (9) функции

$$B(\lambda) = \lambda^n + g_1 \lambda^{n-1} + \dots + g_n = (\lambda + \gamma_1) \dots (\lambda + \gamma_N) \quad (45)$$

приводит к замкнутой системе уравнений для g_k , $k = 1, 2, \dots, N$, так как мы полагаем в (11) $g_k = 0$, $k > N$. В частности, дифференцирование D_1 дает

$$D_1(g_j) = D_0(g_{j+1}) + \langle g_1, g_j \rangle, \quad j < N, \quad D_1(g_N) = \langle g_1, g_N \rangle, \quad (46)$$

и, выразив $g_1, \dots, g_N$ через $\gamma_1, \dots, \gamma_N$, находим, что

$$D_1(\gamma_j) = \left(\sum_{k \neq j} \gamma_k \right) D_0(\gamma_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (47)$$

Именно в таком виде возникла впервые G -модель в обзоре [8]. Можно проверить, что переход от переменных $g_1, \dots, g_N$ к $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ диагонализует и другие уравнения G -модели, соответствующие $D_2, D_3, \dots, D_{N-1}$. Дифференцирования с высшими номерами в силу условия $g_k = 0$, $k > N$, не дают ничего нового. Другими словами, переменные $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ являются инвариантами Римана G -модели в случае (45). Например, при $N = 3$ в дополнение к (47) мы имеем

$$\begin{aligned} D_2(\gamma_1) &= \gamma_2 \gamma_3 D_0(\gamma_1), & D_2(\gamma_2) &= \gamma_3 \gamma_1 D_0(\gamma_2), & D_2(\gamma_3) &= \gamma_1 \gamma_2 D_0(\gamma_3), \\ g_1 &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, & g_2 &= \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_3, & g_3 &= \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \end{aligned}$$

Система уравнений (47) является слабонелинейной гиперболической системой [9], [10] и интегрируется в квадратурах при помощи следующей леммы.

ЛЕММА 2. Пусть

$$D_0(\gamma_j) = \left(w_j(\gamma_j) \prod_{k \neq j} \gamma_{jk} \right)^{-1}, \quad \gamma_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_j - \gamma_k, \quad (48)$$

где $w_j(\gamma_j)$ — N произвольных функций от одной переменной. Тогда $[D_m, D_n] = 0$, $m, n = 0, \dots, N-1$, для уравнений G -модели в случае (45).

Подстановка (48) в (47) и остальные уравнения, соответствующие $D_2, \dots, D_{N-1}$, приводит нас к N динамическим системам для $\vec{\gamma}$, отвечающим независимым переменным $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$. Надлежащая запись этой системы N^2 уравнений

$$d\vec{\gamma} = d\vec{x} A(\vec{\gamma}) \Leftrightarrow d\vec{x} = d\vec{\gamma} A^{-1}(\vec{\gamma})$$

приводит (ср. [10]) к N дифференциальным формам

$$d\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} (dx_0, dx_1, \dots, dx_{N-1}), \quad (49)$$

замкнутость которых эквивалентна коммутационным соотношениям $[D_m, D_n] = 0$ (см. лемму 2). Эта нехитрая процедура, обобщающая интегрирование дифференциального уравнения первого порядка $d\gamma/dx = f(\gamma)$ с разделяющимися переменными, сводит интегрирование уравнений редуцированной G -модели (47) к квадратурам. В частности,

$$\begin{aligned} N=2 &\Rightarrow dx_0 = \gamma_1 d\hat{\gamma}_1 + \gamma_2 d\hat{\gamma}_2, \quad dx_1 = -d\hat{\gamma}_1 - d\hat{\gamma}_2, \quad d\hat{\gamma}_j \stackrel{\text{def}}{=} w(\gamma_j) d\gamma_j, \\ N=3 &\Rightarrow dx_0 = \sum \gamma_k^2 d\hat{\gamma}_k, \quad -dx_1 = \sum \gamma_k d\hat{\gamma}_k, \\ &dx_2 = \sum d\hat{\gamma}_k, \quad d\hat{\gamma}_k \stackrel{\text{def}}{=} w(\gamma_k) d\gamma_k. \end{aligned} \quad (50)$$

Аналогичные формулы, содержащие N произвольных функций от одной переменной, справедливы и при $N > 3$.

Можно также проверить, что для дифференциальных форм (20), (25), на которых основана теория преобразований G -модели, в случае (45) справедливы формулы

$$\omega_0 = \sum \gamma_k^N d\hat{\gamma}_k, \quad \hat{\omega}_1 = \sum \gamma_k^{-1} d\hat{\gamma}_k. \quad (51)$$

Заметим еще, что в случае (45) коэффициенты разложений (10) в окрестности точек $\lambda = \infty, 0$ отличаются лишь нумерацией, так как решение (45) уравнений (9) можно умножить на λ^{-N} .

Приведенные выше формулы решают в определенном смысле проблему интегрирования нашего основного уравнения (14). В частности, при $N = 3$ находим

$$q_0 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \quad q_1 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3, \quad q_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad dq = \hat{\omega}_1,$$

где $\alpha_k = \gamma_k^{-1}$. Однако при любом выборе функций $w_k(\gamma_k)$ формулы (50) определяют решение (14) в неявном виде. Они становятся более явными в случае симметричности:

$$w_1(\gamma) = w_2(\gamma) = w_3(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} w(\gamma),$$

и, например, при $w(\gamma) = 1$, пользуясь (51), мы находим

$$e^q = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = \frac{1}{6} (x_2^3 + 6x_0 + 6x_1 x_2).$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория абелевых иерархий дифференцирований заслуживает, по-видимому, дальнейшего развития. Полезным здесь является сопоставление F - и G -моделей уравнений коммутативности, обсуждаемых во введении. Одной из задач является перенесение результатов, полученных в одной из моделей, на другую. К числу этих результатов можно отнести развитую в рамках G -модели теорию преобразований, основанную на специальных замкнутых дифференциальных формах, определяющих новые независимые переменные.

Обе модели включают в себя классические солитонные иерархии и отличаются, грубо говоря, подходом к оператору рекурсии. В F -модели эту роль выполняет формальная симметрия (см. введение), а в G -модели постулируется универсальная форма оператора рекурсии $L = D_0^{-1}D_1 - q' + 2D_0^{-1}q''$, $dq = \omega_0$.

Благодарности. Работа поддержана грантами РФФИ № 01-01-00874-а, 00-15-96007-а.

Список литературы

- [1] *E. Date, M. Jimbo, M. Kajiwara, T. Miva.* J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3806–3812.
- [2] *Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат.* Функци. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 4. С. 79–80.
- [3] *L. Martínez Alonso, A. B. Shabat.* Phys. Lett. A. 2002. V. 229. P. 359–365; nlin. SI/0202008.
- [4] *L. Martínez Alonso, A. B. Shabat.* J. Nonlinear Math. Phys. 2003. V. 10(2). P. 229–242.
- [5] *R. Heredero, A. B. Shabat, V. V. Sokolov.* A new class of linearizable equations. Submitted in J. Nonlin. Math. Phys. 2003.
- [6] *С. И. Свинолунов.* УМН. 1985. Т. 40. № 5. С. 263–264.
- [7] *В. Э. Адлер, И. Т. Хабибуллин, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1997. Т. 110. № 1. С. 98–113.
- [8] *Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков.* УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 55–136.
- [9] *B. L. Rozdestvenskii, A. D. Sidorenko.* Comput. Math. Math. Phys. 1967. V. 7. P. 1176.
- [10] *E. Ferapontov.* Phys. Lett. A. 1991. V. 158. P. 112–118.

Поступила в редакцию 16.XII.2002 г.