Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Х. Шерматов, О точечном взаимодействии двух фермионов и одной частицы иной природы, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 2, 257–270

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 08:59:11

© 2003 г.

М. Х. Шерматов*

О ТОЧЕЧНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ФЕРМИОНОВ И ОДНОЙ ЧАСТИЦЫ ИНОЙ ПРИРОДЫ

Рассматривается модель точечного взаимодействия двух фермионов и одной частицы иной природы, аналогичная модели Скорнякова–Тер-Мартиросяна и трактуемая с помощью теории самосопряженных расширений симметрических операторов. Показано, что если масса третьей частицы достаточно мала по сравнению с массой фермионов, то соответствующий оператор энергии имеет бесконечный набор связанных состояний со значениями энергии, уходящими на $-\infty$.

Ключевые слова: гамильтониан, точечное взаимодействие, симметрический оператор, расширение Скорнякова–Тер-Мартиросяна, самосопряженное расширение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах Минлоса и Фаддеева [1], [2] впервые было предложено строгое математическое описание точечного взаимодействия трех одинаковых квантовых частиц (бозонов). Гамильтониан этой системы трактовался с помощью теории самосопряженных расширений симметрических операторов (см. [3]) и вводился как некоторое самосопряженное расширение симметрического оператора кинетической энергии трех частиц

$$H_0 = -\Delta_{x_1} - \Delta_{x_2} - \Delta_{x_3},$$

определенного на области $D(H_0) \subset L_2^s((\mathbb{R}^3)^3)$ функций трех переменных $x_j \in \mathbb{R}^3$, $j = 1, 2, 3$, обращающихся в нуль при совпадении любых двух аргументов $x_j = x_k$, $j \neq k$, $j, k = 1, 2, 3$. Предложенное в работе [1] расширение оператора H_0 (обозначаемое через H_ε , $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$, и называемое расширением Скорнякова–Тер-Мартиросяна) является лишь симметрическим, но не самосопряженным. В работе [2] показано, что оператор H_ε имеет индексы дефекта $(1, 1)$, и построены все самосопряженные расширения $H_{\varepsilon, \beta}$ оператора H_ε . При этом оказалось, что эти расширения имеют не ограниченный снизу дискретный спектр. В работе [4] с использованием результатов работ [1], [2] изучался гамильтониан системы трех частиц (двух фермионов и одной частицы иной природы) с одинаковыми массами, взаимодействующих точечным образом. Этот гамильтониан вводился как расширение Скорнякова–Тер-Мартиросяна оператора H_0 в пространстве

*Самаркандское отделение АН Республики Узбекистан, Самарканд, Узбекистан. E-mail: mamarajab.2002@rambler.ru

$L_2^{a(1,2)}((\mathbb{R}^3)^3)$ функций, антисимметричных относительно переменных x_1 и x_2 , и было показано, что эти расширения являются самосопряженными, полуограниченными и не имеют отрицательных собственных значений. В работе [5] обобщены результаты работ [1], [2], [4] на случай трех различных частиц (обладающих даже различными массами).

В настоящей статье, следуя в основном схеме, использованной в работах [4], [5], мы рассмотрим систему трех частиц, состоящую из двух фермионов и одной частицы иной природы, взаимодействующих точечным образом. В отличие от работы [4] будем предполагать, что масса третьей частицы отличается от массы фермионов. Докажем, что если масса третьей частицы m_3 достаточно мала по сравнению с массой фермионов m , то расширение Скорнякова–Тер-Мартиросьяна (обозначаемое через H_ε , $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$) оператора (2.1) в пространстве $L_2^{a(1,2)}((\mathbb{R}^3)^3)$ не является самосопряженным и имеет ненулевые, равные и конечные индексы дефекта. В отличие от работ [1], [2], [5] в данной работе часть оператора H_ε в подпространстве сферически-симметричных функций является самосопряженной, а его часть в подпространстве функций с угловым моментом $l = 1$ симметрична и имеет индексы дефекта $(1, 1)$. При этом все самосопряженные расширения оператора H_ε имеют бесконечный набор собственных значений, уходящих на $-\infty$, и соответствующие собственные функции не являются сферически-симметричными.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ВЫБОР РАСШИРЕНИЯ

Гамильтониан системы двух фермионов и одной частицы иной природы, взаимодействующих точечным образом, задается как некоторое самосопряженное расширение симметрического оператора

$$H = -\frac{1}{2m}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m}\Delta_{x_2} - \frac{1}{2m_3}\Delta_{x_3}, \quad (2.1)$$

действующего в пространстве $L_2^{a(1,2)} = \{\psi \in L_2((\mathbb{R}^3)^3) : \psi(x_1, x_2, x_3) = -\psi(x_2, x_1, x_3)\}$ волновых функций и определенного на области

$$D(H) = \{\psi \in L_2^{a(1,2)} : \Delta_{x_i}\psi \in L_2^{a(1,2)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \psi|_{\Gamma_{j3}} = 0, \quad j = 1, 2\}, \quad (2.2)$$

где $\Gamma_{j3} \subset (\mathbb{R}^3)^3$ — гиперплоскость $\Gamma_{j3} = \{(x_1, x_2, x_3) \in (\mathbb{R}^3)^3 : x_j = x_3\}$.

Далее удобно перейти к импульсному представлению. После такого перехода, отделения полного импульса $P = p_1 + p_2 + p_3$ и замены переменных $k_j = (m/M)P - p_j$, $j = 1, 2$, $k_3 = (m_3/M)P - p_3$ оператор H принимает вид

$$H = \frac{1}{2M}P^2 + \eta^{-1}h, \quad M = 2m + m_3, \quad \eta = \frac{2mm_3}{m + m_3}, \quad (2.3)$$

и действует в тензорном произведении пространств $L_2(\mathbb{R}^3) \otimes L_2^a((\mathbb{R}^3)^2)$, где $L_2^a((\mathbb{R}^3)^2) = \{f \in L_2((\mathbb{R}^3)^2) : f(k_1, k_2) = -f(k_2, k_1)\}$. В (2.3) самосопряженный оператор $(1/2M)P^2$ действует в $L_2(\mathbb{R}^3)$, а симметрический оператор h действует в $L_2^a((\mathbb{R}^3)^2)$ по формуле

$$(hf)(k_1, k_2) = (k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2)f(k_1, k_2),$$

где $\mu = 2m/(m + m_3)$, $0 < \mu < 2$. Область определения $D(h)$ оператора h состоит из функций $f(k_1, k_2)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{\mathbb{R}^3} |k_1^2 + k_2^2|^2 |f(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2 < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^3} f(k_1, k_2) dk_j = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.4)$$

Поскольку оператор h неотрицателен, естественно воспользоваться теорией расширений полуограниченных операторов (см. [6]). С помощью условия (2.4) нетрудно убедиться, что дефектное подпространство $\mathfrak{R}_{-1}(h)$ оператора $h + I$ состоит из элементов вида

$$\Phi_u(k_1, k_2) = \frac{u(k_1) - u(k_2)}{k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2 + 1}, \quad (2.5)$$

где $u(k)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(k)|^2 (k^2 + 1)^{-1/2} dk < \infty. \quad (2.6)$$

Отсюда видно, что подпространство $\mathfrak{R}_{-1}(h)$ изоморфно гильбертову пространству Ω функций $u(k)$, $k \in \mathbb{R}^3$, получающемуся пополнением $L_2(\mathbb{R}^3)$ по скалярному произведению $[u, v] = (Ku, v)$, где $(\cdot, \cdot)$ – обычное скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^3)$ и K – положительный оператор в $L_2(\mathbb{R}^3)$, действующий по формуле

$$(Ku)(k) = \frac{2\pi^2 u(k)}{\sqrt{(4 - \mu^2)k^2/4 + 1}} - 2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(k') dk'}{k^2 + \mu k k' + (k')^2 + 1}. \quad (2.7)$$

ЛЕММА 1. Область определения $D(h^*)$ сопряженного оператора h^* состоит из функций вида

$$g(k_1, k_2) = f(k_1, k_2) + \frac{u(k_1) - u(k_2)}{k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2 + 1} + \frac{v(k_1) - v(k_2)}{(k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2 + 1)^2}, \quad (2.8)$$

где $f \in D(h)$, $u, v \in \Omega$. Оператор h^* действует на функцию вида (2.8) по формуле

$$(h^*g)(k_1, k_2) = (k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2)g(k_1, k_2) - u(k_1) + u(k_2). \quad (2.9)$$

Лемма доказывается так же, как и аналогичная лемма 1 из работы [7].

Пусть A – произвольный линейный оператор с плотной в Ω областью определения $D(A)$ и h_A – сужение оператора h^* на область

$$D(h_A) = \{g \in D(h^*): g = f + \Phi_u + S_1^{-1}\Phi_{Au}, \quad f \in D(h), \quad u \in D(A)\},$$

где S_1 – жесткое самосопряженное расширение оператора $h + I$. Для функций $g(k_1, k_2)$ из $D(h_A)$ в разложении (2.8) выполняется соотношение вида

$$v = Au, \quad u \in D(A). \quad (2.10)$$

Возьмем два произвольных элемента $g = f + \Phi_u + S_1^{-1}\Phi_{Au}$ и $g' = f' + \Phi_{u'} + S_1^{-1}\Phi_{Au'}$ из $D(h_A)$. Для них справедливо следующее соотношение:

$$(h_A g, g') = (g, h_A g') + (\Phi_{Au}, \Phi_{u'}) - (\Phi_u, \Phi_{Au'}). \quad (2.11)$$

Так как пространства $\mathfrak{R}_{-1}(h)$ и Ω изоморфны и выполняются равенства $(\Phi_{Au}, \Phi_{u'}) = [Au, u']$ и $(\Phi_u, \Phi_{Au'}) = [u, Au']$, где $[\cdot, \cdot]$ – скалярное произведение в Ω , то соотношение (2.11) можно переписать в виде

$$(h_A g, g') = (g, h_A g') + [Au, u'] - [u, Au']. \quad (2.12)$$

Воспользовавшись равенством (2.12), из последних рассуждений можно получить, что справедлива

ЛЕММА 2. *Расширение h_A оператора h , задаваемое с помощью условия (2.10), является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда A – самосопряженный оператор в Ω .*

Для тех элементов $g \in D(h^*)$, которым соответствуют достаточно быстро убывающие функции u в разложении (2.8), определены асимптотики

$$\int_{|k_j + \mu k_i/2| < N} g(k_1, k_2) dk_j = (-1)^j [4\pi u(k_i)N + G(k_i) + o(1)]$$

при $N \rightarrow \infty$, где функция $G(k_i)$ имеет вид

$$\begin{aligned} G(k_i) = & -2\pi^2 \sqrt{\frac{1}{4}(4 - \mu^2)k_i^2 + 1} u(k_i) - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(k_j) dk_j}{k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2 + 1} + \\ & + \frac{\pi^2 v(k_i)}{\sqrt{(4 - \mu^2)k_i^2/4 + 1}} - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{v(k_j) dk_j}{(k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2 + 1)^2}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (2.13)$$

и удовлетворяет условию (2.6). Обозначим через h_ε^* сужение оператора h^* на область $D(h_\varepsilon^*)$, состоящую из функций $g(k_1, k_2) \in D(h^*)$, которые удовлетворяют условию

$$G(k) = -2\pi^2 \varepsilon u(k), \quad (2.14)$$

где ε – произвольная вещественная константа. Оператор h_ε^* является сопряженным к некоторому симметрическому расширению h_ε оператора h .

Рассмотрим семейство операторов $\{T(z), z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)\}$ в $L_2(\mathbb{R}^3)$, действующих по формуле

$$(T(z)u)(k_1) = 2\pi^2 \sqrt{\frac{1}{4}(4 - \mu^2)k_1^2 - z} u(k) + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(k_2)}{k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2 - z} dk_2$$

на множестве D функций $u \in L_2(\mathbb{R}^3)$ таких, что

$$|u(k)| \leq \frac{\text{const}}{1 + |k|^3}. \quad (2.15)$$

Далее введем в рассмотрение семейство операторов в Ω

$$A_\varepsilon = K^{-1}[\overline{T}(-1) - 2\pi^2 \varepsilon I], \quad (2.16)$$

где $\overline{T}(-1)$ – замыкание оператора $T(-1)$. Для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$ сопряженный оператор A_ε^* определяется как

$$A_\varepsilon^* = K^{-1}[T^*(-1) - 2\pi^2 \varepsilon I], \quad D(A_\varepsilon^*) = D(T^*(-1)), \quad (2.17)$$

где $T^*(-1)$ – оператор, сопряженный к $T(-1)$.

Из формул (2.13) и условия (2.14) видно, что если в формуле (2.10) оператор A заменить на A_ε^* , то полученное сужение $h_{A_\varepsilon^*}$ оператора h^* совпадает с оператором h_ε^* , т.е.

$h_\varepsilon^* = h_{A_\varepsilon^*}$. Поскольку $h_\varepsilon^* = h_{A_\varepsilon^*} = (h_{A_\varepsilon})^*$, то оператор h_ε совпадает с оператором h_{A_ε} . Таким образом, симметрическое расширение h_ε оператора h получается сужением оператора h^* на область $D(h_{A_\varepsilon}) = D(h_\varepsilon)$ с помощью условия $v = A_\varepsilon u$.

Применим выписанные соотношения для построения резольвенты оператора h_ε . Полагая $g = (h_\varepsilon - zI)^{-1}\psi$, из уравнения

$$(h_\varepsilon - zE)g = \psi$$

и формулы (2.9) находим, что для любого $\psi \in L_2^a((\mathbb{R}^3)^2)$ функция g имеет вид

$$g(k_1, k_2) = \frac{\psi(k_1, k_2) + u(k_1) - u(k_2)}{k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2 - z}. \quad (2.18)$$

Сравнивая (2.18) с (2.8) и используя условия $v = A_\varepsilon u$ и (2.4), мы приходим к уравнению для определения $u(k)$ через $\psi(k_1, k_2)$:

$$2\pi^2 \left(\sqrt{\frac{1}{4}(4 - \mu^2)k^2 - z - \varepsilon} \right) u(k) - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(k')}{k^2 + \mu k k' + k'^2 - z} dk' = \chi(k; z), \quad (2.19)$$

где

$$\chi(k; z) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi(k, k')}{k^2 + \mu k k' + k'^2 - z} dk'.$$

Заметим, что из леммы 2 и соотношений (2.8), (2.10), (2.16) и (2.17) следует, что самосопряженность оператора h_ε равносильна существенной самосопряженности оператора $T(-1)$, причем индексы дефекта оператора $T(-1)$ совпадают с индексами дефекта оператора h_ε .

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через μ_0 решение уравнения

$$\pi^2 \sqrt{4 - \mu^2} + \frac{8\pi}{\mu^2} \sqrt{4 - \mu^2} \left(\arcsin \frac{\mu}{2} \right) - \frac{8\pi}{\mu} = 0, \quad \sqrt{3.47} < \mu_0 < \sqrt{3.48}. \quad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 1. Если $\mu \in (\mu_0, 2)$, то оператор $\overline{T}(-1)$ имеет ненулевые, равные и конечные индексы дефекта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T — симметрический оператор, определенный на области D (см. (2.15)) и действующий по формуле

$$(Tu)(p) = \pi^2 \sqrt{4 - \mu^2} |p| u(p) - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(q)}{p^2 + \mu p q + q^2} dq. \quad (3.2)$$

Так как прибавление ограниченного самосопряженного оператора не изменяет индексы дефекта и $T(-1) - T$ является ограниченным самосопряженным оператором, то вместо $T(-1)$ достаточно рассмотреть оператор T .

Заметим, что оператор T коммутирует с операторами представления группы вращений O_3 в $L_2(\mathbb{R}^3)$:

$$(V_g u)(p) = u(g^{-1}p), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^3), \quad g \in O_3,$$

и приводится каждым подпространством L_l функций вида

$$u_l(p) = \sum_{m=-l}^l u_{m,l}(|p|) Y_m^l(\theta, \varphi), \quad (3.3)$$

где $|p| = r$, θ, φ — сферические координаты вектора p , $Y_m^l(\theta, \varphi)$ — сферические функции веса l (см. [8]), $u_{m,l}$ — функции, зависящие от $|p|$. Часть оператора T , действующую в L_l , обозначим через T_l . Рассмотрим сначала оператор T_0 , определенный в подпространстве L_0 сферически-симметричных функций. Выполняя в формуле (3.2) для сферически-симметричных функций интегрирование по углам, убедимся в том, что оператор T_0 унитарно-эквивалентен оператору S_0 , действующему в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+, r^2 dr)$ по формуле

$$(S_0 u)(r) = \pi^2 \sqrt{4 - \mu^2} r u(r) + \frac{2\pi}{\mu} \int_0^\infty \frac{t}{r} \ln \left(\frac{r^2 + \mu r t + t^2}{r^2 - \mu r t + t^2} \right) u(t) dt. \quad (3.4)$$

Область определения $D(S_0)$ оператора S_0 состоит из функций $u(r) \in L_2(\mathbb{R}_+, r^2 dr)$, удовлетворяющих условию (2.15).

После унитарного в $L_2(\mathbb{R}_+, r^2 dr)$ преобразования Меллина

$$v(s) = \int_0^{+\infty} r^{-is+1/2} u(r) dr, \quad (3.5)$$

где $u(r) \in D(S_0)$, оператор S_0 переходит в оператор

$$(\hat{S}_0 v)(s) = \Psi_0 \left(s + \frac{i}{2} \right) v(s + i),$$

действующий на области $D(\hat{S}_0)$ функций $v(s)$ таких, что $v(s)$ аналитичны в полосе $0 \leq \operatorname{Im} s \leq 1$ и $v(x + i\alpha) \in L_2(\mathbb{R}^1)$ для любого $\alpha \in [0, 1]$. Здесь

$$\Psi_0(s) = \pi^2 \sqrt{4 - \mu^2} + \frac{4\pi^2}{\mu} \frac{\operatorname{sh}(\arcsin(\mu/2))s}{s \operatorname{ch}(\pi s/2)}. \quad (3.6)$$

Повторяя рассуждения, приведенные в работе [5], получим, что область определения $D(\hat{S}_0^*)$ сопряженного оператора $\hat{S}_0^*$ будет состоять из функций вида

$$w(s) = \left[\Psi_0 \left(s - \frac{i}{2} \right) \right]^{-1} v(s), \quad (3.7)$$

где $v(s) \in D(\hat{S}_0)$ (это легко выводится из теоремы братьев Рисс о мерах на окружностях, ортогональных степеням (см. [9])). Из (3.6) видно, что функция $\Psi_0(s)$ аналитична и

не имеет нулей в полосе $-1 \leq \operatorname{Im} s \leq 1$. Следовательно, функция $[\Psi_0(s - i/2)]^{-1}$ аналитична и ограничена в полосе $0 \leq \operatorname{Im} s \leq 1$. Тогда из (3.7) видно, что все функции $w(s)$ из $D(\hat{S}_0^*)$ аналитичны в полосе $0 \leq \operatorname{Im} s \leq 1$ и $|w(x + i\alpha)| \in L_2(\mathbb{R}^1)$ для любого $\alpha \in [0, 1]$. Отсюда следует, что $D(\hat{S}_0) = D(\hat{S}_0^*)$, следовательно, $\hat{T}_0$ – самосопряженный оператор. Таким образом, при всех значениях параметра μ оператор $\overline{T}_0$ является самосопряженным.

Рассмотрим теперь случай $l \geq 1$. Поскольку оператор с ядром $(p^2 + \mu pq + q^2)^{-1}$ приводится каждым подпространством L_l , то имеет место разложение

$$\frac{1}{p^2 + \mu pq + q^2} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l(r, t) \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta', \varphi'), \quad (3.8)$$

где

$$p = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \quad q = (t \sin \theta' \cos \varphi', t \sin \theta' \sin \varphi', t \cos \theta'),$$

$$a_l(r, t) = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{P_l(x)}{r^2 + \mu x r t + t^2} dx, \quad P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2 - 1)^l}{dx^l}.$$

Из (3.2), (3.3) и (3.8) следует, что оператор T_l действует в L_l следующим образом:

$$(T_l u_l)(p) = \sum_{m=-l}^l (S_l u_l, m)(|p|) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3.9)$$

где S_l – оператор в $L_2(\mathbb{R}_+, r^2 dr)$, действующий на $D(S_l) = D(S_0)$ по формуле

$$(S_l u)(r) = \pi^2 \sqrt{4 - \mu^2} r u(r) + \int_0^{\infty} t^2 a_l(r, t) u(t) dt. \quad (3.10)$$

После преобразования (3.5) замыкание оператора S_l перейдет в оператор

$$(\hat{S}_l w)(s) = \Psi_l \left(s + \frac{i}{2} \right) w(s + i),$$

действующий на области $D(\hat{S}_l) = D(\hat{S}_0)$, где

$$\Psi_l(s) = \pi^2 \sqrt{4 - \mu^2} + 2\pi^2 \int_{-1}^1 P_l(x) \frac{\operatorname{sh}(\arccos(\mu x/2))s}{\sqrt{1 - \mu^2 x^2/4} \operatorname{sh}(\pi s/2)} dx. \quad (3.11)$$

Рассуждая так же, как и в случае $l = 0$, получим, что область определения $D(\hat{S}_l^*)$ сопряженного оператора $\hat{S}_l^*$ будет состоять из функций вида

$$w(s) = \left[\Psi_l \left(s - \frac{i}{2} \right) \right]^{-1} v(s), \quad (3.12)$$

где $v(s) \in D(\hat{S}_0)$.

С помощью несложных вычислений получим, что

$$\Psi_l(s) = \pi^2 \sqrt{4 - \mu^2} - 2\pi^2 \int_0^1 P_l(x) \frac{\text{sh}(\arcsin(\mu x/2))s}{\sqrt{1 - \mu^2 x^2/4} \text{sh}(\pi s/2)} dx \quad (3.13)$$

при $l = 2n - 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\Psi_l(s) = \pi^2 \sqrt{4 - \mu^2} + 2\pi^2 \int_0^1 P_l(x) \frac{\text{ch}(\arcsin(\mu x/2))s}{\sqrt{1 - \mu^2 x^2/4} \text{ch}(\pi s/2)} dx \quad (3.14)$$

при $l = 2n$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Пусть $l = 1$. Тогда

$$\Psi_1(s) = \pi^2 \sqrt{4 - \mu^2} - 2\pi^2 \int_0^1 x \frac{\text{sh}(\arcsin(\mu x/2))s}{\sqrt{1 - \mu^2 x^2/4} \text{sh}(\pi s/2)} dx.$$

Очевидно, что для любого $\mu \in (0, 2)$ $\Psi_1(s)$ является четной и возрастающей по $|s|$ функцией, при этом

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} \Psi_1(s) &= \pi^2 \sqrt{4 - \mu^2}, \\ F_1(\mu) = \min \Psi_1(s) &= \pi^2 \sqrt{4 - \mu^2} + \frac{8\pi}{\mu^2} \sqrt{4 - \mu^2} \left(\arcsin \frac{\mu}{2} \right) - \frac{8\pi}{\mu}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Функция $F_1(\mu)$, определенная в интервале $(0, 2)$ формулой (3.15), непрерывна, убывает, и ее значения заполняют интервал $(-4\pi, 2\pi^2)$. Тогда уравнение $F_1(\mu) = 0$ (или (3.1)) имеет единственное решение, которое мы обозначим через μ_0 .

Теперь перейдем к непосредственному доказательству утверждения теоремы 1. Пусть $\mu \in (\mu_0, 2)$. Поскольку функция $F_1(\mu)$ непрерывна, убывает и $F_1(\mu_0) = 0$, то при $\mu > \mu_0$ $F_1(\mu) = \min \Psi_l(s) = \Psi_1(0) < 0$. Отсюда в силу четности и монотонности по $|s|$ функции $\Psi_1(s)$ получим, что $\Psi_1(s)$ обращается в нуль только в двух точках $s = \pm s_0$, где $s_0 > 0$ — простой корень уравнения $\Psi_1(s) = 0$.

Из $\Psi_1(\pm s_0) = 0$ следует, что $D(\widehat{S}_1^*)$ кроме элементов $D(\widehat{S}_1)$ включает в себя и функции

$$\frac{1}{s - s_0 - i/2}, \quad \frac{1}{s + s_0 - i/2}. \quad (3.16)$$

Это означает, что $D(\widehat{S}_1^*)$ состоит из элементов вида

$$w(s) = \frac{c_1}{s - s_0 - i/2} + \frac{c_2}{s + s_0 - i/2} + v(s), \quad (3.17)$$

где $v \in D(\widehat{S}_1)$. Таким образом, $D(\widehat{S}_1)$ в $D(\widehat{S}_1^*)$ имеет коразмерность 2. Отсюда следует, что индексы дефекта оператора $\widehat{S}_1$ (и оператора S_1) равны либо $(2, 0)$, либо $(0, 2)$, либо $(1, 1)$. Однако в силу вещественности оператора S_1 (см. (3.12)) его индексы дефекта одинаковы и равны $(1, 1)$. Из (3.3) и (3.9) следует, что оператор T_1 также имеет индексы дефекта $(1, 1)$.

Процедура, аналогичная рассмотренной для случая $l = 1$, покажет, что при $l \geq 2$ индексы дефекта оператора T_l равны и не превышают $(1, 1)$. Кроме того, для любого $\mu > \mu_0$ найдется натуральное число l_μ такое, что при $l \geq l_\mu$ индексы дефекта оператора T_l равны $(0, 0)$. Отсюда следует, что для любого $\mu \geq \mu_0$ оператор $T(-1)$ имеет равные и конечные индексы дефекта. Теорема 1 доказана.

Так как оператор $T_1(-1)$ получается из оператора T_1 прибавлением ограниченного самосопряженного оператора, то $T_1(-1)$ – симметрический оператор с индексами дефекта $(1, 1)$. В доказательстве теоремы 1 фактически были описаны дефектные векторы операторов T_1 и $T_1(-1)$. Применяя общую теорию Неймана самосопряженных расширений симметрических операторов (см. [3]), придем к семейству $\{T_{1\beta}(-1)\}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$, самосопряженных расширений оператора $T_1(-1)$. Описанию области определения оператора $T_{1\beta}(-1)$ посвящается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Область определения оператора $T_{1\beta}(-1)$ состоит из элементов вида*

$$v(k) = c \frac{r^{is_0} + \beta r^{-is_0}}{r^2 + 1} + u(k), \quad (3.18)$$

где $u \in D(\overline{T}_1(-1))$, $r = |k| \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{C}^1$, $|\beta| = 1$, – параметр самосопряженного расширения $T_{1\beta}(-1)$ оператора $T_1(-1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 следует, что дефектное пространство $\mathfrak{R}_z = (\text{Ran}(T_1(-1) - zI))^\perp$ оператора $T_1(-1)$ одномерно, а из (3.15) видно, что дефектный вектор $\theta_z(r) \in \mathfrak{R}_z$ оператора $T_1(-1)$ имеет вид

$$\theta_z(k) = \frac{r^{is_0} + \zeta r^{-is_0}}{r^2 + 1} + w(k),$$

где ζ – некоторое комплексное число, а $w \in D(\overline{T}_1(-1))$. Следовательно,

$$\theta_{\bar{z}}(k) = \overline{\theta_z(k)} = \frac{\bar{\zeta} r^{is_0} + r^{-is_0}}{r^2 + 1} + \overline{w(k)}$$

с точностью до умножения на константу.

Рассмотрим произвольное самосопряженное расширение $\hat{T}_1(-1)$ оператора $T_1(-1)$. Поскольку $\|\theta_z\| = \|\theta_{\bar{z}}\|$, из формул Неймана следует, что область определения $D(\hat{T}_1(-1))$ оператора $\hat{T}_1(-1)$ состоит из элементов вида

$$v(k) = \theta_z(k) + \hat{\beta} \theta_{\bar{z}}(k) + u_1(k),$$

где $u_1 \in D(\overline{T}_1(-1))$, $\theta_z \in \mathfrak{R}_z$, для некоторой константы $\hat{\beta} \in \mathbb{C}^1$, $|\hat{\beta}| = 1$, характеризующей расширение $\hat{T}_1(-1)$. Таким образом, с точностью до умножения на константу элемент из $D(\hat{T}_1(-1))$ будет иметь вид

$$v(k) = \left(r^{is_0} + \frac{\zeta + \hat{\beta}}{1 + \bar{\zeta} \hat{\beta}} r^{-is_0} \right) (r^2 + 1)^{-1} + u(k),$$

где $u \in D(\overline{T}_1(-1))$. Легко заметить, что если обозначить $\beta = (\zeta + \hat{\beta})/(1 + \overline{\zeta}\hat{\beta})$, то $|\beta| = 1$ для $\zeta \in \mathbb{C}^1$, $\hat{\beta} \in \mathbb{C}^1$, $|\hat{\beta}| = 1$. Но отсюда следует утверждение теоремы (если принять обозначение $\widehat{T}_1(-1) = T_{1\beta}(-1)$).

Пусть $\mu_0 < \mu < 2$. В этом случае исследуем оператор h_ε .

Легко видеть, что оператор h_ε коммутирует с операторами группы вращений O_3 в $L_2^a((\mathbb{R}^3)^2)$:

$$(U_g \psi)(k_1, k_2) = \psi(g^{-1}k_1, g^{-1}k_2), \quad \psi \in L_2^a((\mathbb{R}^3)^2), \quad g \in O_3, \quad (3.19)$$

и, следовательно, он приводится каждым подпространством $\aleph_l$, $l = 0, 1, 2, \dots$, функций вида

$$\psi_l(k_1, k_2) = \sum_{k, m=-l}^l \psi_l^{k, m}(|k_1|, |k_2|) Y_k^l(\theta_1, \varphi_1) Y_m^l(\theta_2, \varphi_2), \quad (3.20)$$

где $\psi_l^{k, m}$ — функция из $L_2((\mathbb{R}_+)^2, r^2 t^2 dr dt) \equiv L_2(\mathbb{R}_+, r^2 dr) \otimes L_2(\mathbb{R}_+, t^2 dt)$, Y_k^l и Y_m^l — сферические функции с угловым моментом l , $|k_j|$, θ_j , φ_j — сферические координаты вектора p_j , $j = 1, 2$.

Часть оператора h_ε , действующую в $\aleph_l$, обозначим через $h_\varepsilon(l)$. Подпространство $\aleph_0$ состоит из функций $\psi(k_1, k_2)$, не меняющихся при вращениях (3.19). В силу теоремы 1 оператор $h_\varepsilon(0)$ является самосопряженным. Далее часть оператора h^* , действующую в $\aleph_l$, обозначим через h_l^* .

Пусть Ω_l , $l = 0, 1, 2, \dots$, — подпространство функций $u \in \Omega$, получающееся пополнением подпространства L_l по скалярному произведению $[u, v] = (Ku, v)$. Часть оператора A_ε , действующую в Ω_l , обозначим через $A_\varepsilon(l)$, а часть оператора K , действующую в L_l , через K_l . Тогда оператор $A_\varepsilon(l)$ можно определить следующим образом:

$$A_\varepsilon(l) = K_l^{-1}[\overline{T}_l(-1) - 2\pi^2 I], \quad D(A_\varepsilon(l)) = D(\overline{T}_l(-1)) \subset \Omega_l.$$

Нетрудно убедиться в том, что область определения $D(h_l^*)$ оператора h_l^* состоит из таких функций $g(k_1, k_2)$ вида (2.8), для которых $f \in D(h) \cap \aleph_l$, $u, v \in \Omega_l$. Аналогично область определения $D(h_\varepsilon(l))$ оператора $H_\varepsilon(l)$ состоит из таких функций $g(k_1, k_2)$ вида (2.8), для которых $f \in D(h) \cap \aleph_l$, $u, v \in \Omega_l$ и $v = A_\varepsilon(l)u$.

ЛЕММА 3. Оператор A_ε является симметрическим, его индексы дефекта равны и совпадают с индексами дефекта оператора $T(-1)$. В частности, $A_\varepsilon(0)$ — самосопряженный оператор, а $A_\varepsilon(1)$ — симметрический оператор с индексами дефекта $(1, 1)$.

Доказательство леммы следует из того факта, что квадратичная форма оператора A_ε в Ω совпадает с квадратичной формой оператора $\overline{T}(-1) - 2\pi^2 I$ в $L_2(\mathbb{R}^3)$. Действительно,

$$[A_\varepsilon u, v] = (KK^{-1}[\overline{T}(-1) - 2\pi^2 I]u, v) = ([\overline{T}(-1) - 2\pi^2 I]u, v),$$

где $u, v \in D(\overline{T}(-1))$.

Рассмотрим семейство $\{A_{\varepsilon\beta}(1)\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$, $\beta \in \mathbb{C}^1$, $|\beta| = 1$, операторов

$$A_{\varepsilon\beta}(1) = K_1^{-1}[T_{1\beta}(-1) - 2\pi^2 I], \quad D(A_{\varepsilon\beta}(1)) = D(T_{1\beta}(-1)),$$

действующих в подпространстве Ω_1 . Поскольку квадратичная форма $[A_{\varepsilon\beta}(1)u, v]$ в Ω_1 совпадает с квадратичной формой $([T_{1\beta}(-1) - 2\pi^2 I]u, v)$ в $L_1 \subset L_2(\mathbb{R}^3)$, то из самосопряженности оператора $T_{1\beta}(-1)$ вытекает самосопряженность оператора $A_{\varepsilon\beta}(1)$. Обозначим через $h_{\varepsilon\beta}(1)$ сужение оператора h_1^* на область $D(h_{\varepsilon\beta}(1))$, состоящую из таких функций $g(k_1, k_2)$ вида (2.8), для которых $f \in D(h) \cap \mathfrak{N}_1$, $u, v \in \Omega_1$ и $v = A_{\varepsilon\beta}(1)u$. С помощью формулы (2.17) можно установить, что для любых $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$ и $\beta \in \mathbb{C}^1$, $|\beta| = 1$, оператор $h_{\varepsilon\beta}(1)$ является самосопряженным.

ЛЕММА 4. *Для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$ симметрический оператор h_ε имеет ненулевые, равные и конечные индексы дефекта. В частности, оператор $h_\varepsilon(1)$ имеет индексы дефекта $(1, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из общей теории самосопряженных расширений симметрических операторов легко следует (см. [3]) следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Коразмерность области определения $D(A)$ симметрического оператора A с конечными и равными индексами дефекта (n, n) в области $D(\hat{A})$ любого его самосопряженного расширения равна n . Если индексы дефекта оператора A бесконечны и у него существуют самосопряженные расширения, то найдется такое самосопряженное расширение $\hat{A}$, что $D(A)$ имеет в $D(\hat{A})$ бесконечную коразмерность.*

Вернемся к схеме расширения операторов h_ε и $h_\varepsilon(1)$. Все самосопряженные расширения оператора $h_\varepsilon(1)$ являются самосопряженными расширениями оператора $A_\varepsilon(1)$, поэтому они описываются введенным выше классом операторов $h_{\varepsilon\beta}(1)$. В силу предложения коразмерность $D(A_\varepsilon(1))$ в $D(A_{\varepsilon\beta}(1))$ ($D(T_1(-1))$ в $D(T_{1\beta}(-1))$) равна единице. Отсюда и из схем расширения оператора $h_\varepsilon(1)$ следует, что коразмерность области определения $D(h_\varepsilon(1))$ оператора $h_\varepsilon(1)$ в области определения $D(h_{\varepsilon\beta}(1))$ оператора $h_{\varepsilon\beta}(1)$ равна единице. Теперь утверждение леммы следует из предложения.

Как и в случае $l = 1$, можно показать, что индексы дефекта операторов $h_\varepsilon(l)$, $l \geq 1$, равны и не превышают $(1, 1)$. Для любого $\mu > \mu_0$ найдется натуральное число l_μ такое, что при $l > l_\mu$ все операторы $h_\varepsilon(l)$ являются самосопряженными. Таким образом, для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^1$ оператор h_ε является симметрическим оператором с ненулевыми, равными и конечными индексами дефекта. Лемма доказана.

Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА 3. *Любое самосопряженное расширение $\hat{h}_\varepsilon$ оператора h_ε имеет бесконечный набор отрицательных собственных значений, уходящих на $-\infty$.*

Нижеследующие леммы представляют собой этапы доказательства этой теоремы.

Заметим, что если $\hat{h}_\varepsilon$ — некоторое самосопряженное расширение оператора h_ε , то существенный спектр оператора $\hat{h}_\varepsilon$ заполняет отрезок $[0, +\infty)$ при $\varepsilon < 0$ и отрезок $[-\varepsilon^2, +\infty)$ при $\varepsilon > 0$.

Из леммы 4 следует, что для любого $z \in \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$ существует единственное с точностью до умножения на константу решение уравнения

$$(h_\varepsilon^*(1))g = zg. \quad (3.21)$$

Из (2.8) с дополнительными условиями $f \in D(h) \cap \mathfrak{N}_1$, $u, v \in \Omega_1$, $v = A_\varepsilon^*(1)u$, учитывая определение $A_\varepsilon(1)$, получим, что решение уравнения (3.21) имеет вид

$$g(k_1, k_2) = f(k_1, k_2) + \frac{\sum_{m=-1}^1 [u_m(r_1)Y_1^m(\theta_1, \varphi_1) - u_m(r_2)Y_1^m(\theta_2, \varphi_2)]}{k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2 + 1} + \\ + \frac{\sum_{m=-1}^1 [(A_\varepsilon^*(1)u_m)(r_1)Y_1^m(\theta_1, \varphi_1) - (A_\varepsilon^*(1)u_m)(r_2)Y_1^m(\theta_2, \varphi_2)]}{(k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2 + 1)^2}, \quad (3.22)$$

где $A_\varepsilon^*(1)$ — оператор, сопряженный к оператору $A_\varepsilon(1)$. Но из (2.9) и (3.21) следует, что решение уравнения (3.21) имеет вид

$$g(k_1, k_2) = \frac{\sum_{m=-1}^1 [u_m(r_1)Y_1^m(\theta_1, \varphi_1) - u_m(r_2)Y_1^m(\theta_2, \varphi_2)]}{k_1^2 + \mu k_1 k_2 + k_2^2 - z}. \quad (3.23)$$

Сравнивая (3.22) с (3.23) и пользуясь определением оператора $A_\varepsilon^*(1)$, получим, что функции $u_m(r)$ являются решениями уравнения

$$\left(\sqrt{\frac{1}{4}(4 - \mu^2)r^2 - z - \varepsilon} \right) u(r) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty t^2 \left(\int_{-1}^1 \frac{x dx}{r^2 + \mu x r t + t^2 - z} \right) u(t) dt = 0. \quad (3.24)$$

Далее, вычислив интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{r^2 + \mu x r t + t^2 - z} u(t) dt,$$

приходим к уравнению

$$2\pi^2 \left(\sqrt{\frac{1}{4}(4 - \mu^2)r^2 - z - \varepsilon} \right) u(r) + \\ + 2\pi \int_0^\infty \frac{t}{\mu r} \left[2 - \frac{r^2 + t^2 - z}{\mu r t} \ln \left(\frac{r^2 + t^2 - z + \mu r t}{r^2 + t^2 - z - \mu r t} \right) \right] u(t) dt = 0. \quad (3.25)$$

ЛЕММА 5. Если $\lambda_0 > 2\varepsilon$, то при $z = -\lambda_0^2$ уравнение (3.24) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $z = -\lambda_0^2 + i\delta$, где $\delta > 0$ и малое. При таких z решение системы (3.25) существует, и из представления

$$u(r) = \frac{1}{\pi\mu} \left(\sqrt{\frac{1}{4}(4 - \mu^2)r^2 + \lambda_0^2 - i\delta - \varepsilon} \right)^{-1} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{t}{r} \left[-2 + \frac{r^2 + t^2 + \lambda_0^2 - i\delta}{\mu r t} \ln \left(\frac{r^2 + \mu r t + t^2 + \lambda_0^2 - i\delta}{r^2 - \mu r t + t^2 + \lambda_0^2 - i\delta} \right) \right] u(t) dt \quad (3.26)$$

следует, что $u(r)$ аналитична в максимальной угловой окрестности положительной вещественной полуоси, ограниченной лучами, проходящими через начало координат и точки z_0 и $\overline{z_0}$, где $z_0^2 = 4(\varepsilon - \lambda_0^2 + i\delta)/(4 - \mu^2)$ (это область, в которой разность, стоящая в знаменателе в правой части (3.26), не обращается в нуль).

Сделаем в (3.26) замену $r = \sqrt{-z}\zeta$, $t = \sqrt{-z}\xi$, получим уравнение

$$u(\sqrt{-z}\zeta) = \frac{1}{\pi\mu} \left(\sqrt{\frac{1}{4}(4-\mu^2)r^2 + 1} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{-z}} \right)^{-1} \times \\ \times \int_{\gamma_\xi} \frac{\xi}{\zeta} \left[-2 + \frac{\zeta^2 + \xi^2 + 1}{\mu\zeta\xi} \ln \left(\frac{\zeta^2 + \mu\zeta\xi + \xi^2 + 1}{\zeta^2 - \mu\zeta\xi + \xi^2 + 1} \right) \right] u(\sqrt{-z}\xi) d\xi \quad (3.27)$$

(здесь выбрана ветвь $\operatorname{Im} \sqrt{-z} > 0$). Заметим, что согласно выбору z контур γ_ξ есть луч, лежащий в области аналитичности функции $u(\xi)$. Ввиду того, что интеграл в правой части (3.27) по дуге окружности, соединяющей контур γ_ξ и вещественную положительную полуось, стремится к нулю с ростом радиуса, интегрирование можно проводить по вещественной полуоси. Кроме того, из представления (3.27) следует существование предела $u(\sqrt{-z}\zeta)$ при выходе ζ на вещественную ось. Переходя теперь к случаю $\delta = 0$ (что возможно в силу аналитичности правой части (3.27) по z), получим существование решений уравнения

$$u(\lambda_0\zeta) = \frac{1}{\pi\mu} \left(\sqrt{\frac{1}{4}(4-\mu^2)r^2 + 1} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{-z}} \right)^{-1} \times \\ \times \int_{\gamma_\xi} \frac{\xi}{\zeta} \left[-2 + \frac{\zeta^2 + \xi^2 + 1}{\mu\zeta\xi} \ln \left(\frac{\zeta^2 + \mu\zeta\xi + \xi^2 + 1}{\zeta^2 - \mu\zeta\xi + \xi^2 + 1} \right) \right] u(\lambda_0\xi) d\xi. \quad (3.28)$$

Сделаем в (3.28) замену $r = \lambda_0\zeta$, $t = \lambda_0\xi$, придем к утверждению леммы.

СЛЕДСТВИЕ. Уравнение (3.25) при $z = -\lambda^2$, $\lambda > \lambda_0$, имеет решение, которое можно получить из решения этого уравнения при $z = -\lambda_0^2$, $\varepsilon' = (\lambda_0/\lambda)\varepsilon$ заменой переменных $r \rightarrow (\lambda/\lambda_0)r$, $t \rightarrow (\lambda/\lambda_0)t$.

Заметим, что решения уравнения (3.25) лежат в области определения $D(T_1^*(-1))$ оператора $T_1^*(-1)$. Вернувшись к описанию (3.17) этой области и выполнив обратное преобразование Меллина, получим, что имеет место представление (с точностью до умножения на константу) решения уравнения (3.25) в виде

$$u(r) = \frac{r^{is_0}}{r^2 + 1} + \frac{c(\varepsilon)r^{-is_0}}{r^2 + 1} + \tilde{u}(r), \quad (3.29)$$

где $\tilde{u} \in D(\bar{T}_0(-1))$, $c(\varepsilon)$ – константа ($|c(\varepsilon)| = 1$ в силу вещественности решения).

ЛЕММА 6. Функция $c(\varepsilon)$ непрерывна в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (3.26) следует, что $u(r)$ непрерывна по ε . Следовательно, ее преобразование Меллина так же непрерывно по ε . Но оно имеет вид (3.17), и функция $c(\varepsilon)$ есть вычет в точке $s_0 + i/2$ преобразования Меллина $g(s)$ функции $u(r)$ и, следовательно, непрерывна по ε . Лемма доказана.

Приступим к непосредственному доказательству теоремы 3. Обозначим через $\hat{h}_\varepsilon(l)$ часть оператора $\hat{h}_\varepsilon$, действующую в подпространстве $\mathbb{N}_l$. Так как для любого $\mu \in (0, 2)$ оператор $h_\varepsilon(0)$ является самосопряженным, то оператор $h_\varepsilon(0)$ равен $\hat{h}_\varepsilon(0)$ и, следовательно, оператор $\hat{h}_\varepsilon(0)$ не имеет собственного значения левее существенного спектра

оператора $\hat{h}_\varepsilon$. Оператор $\hat{h}_\varepsilon(1)$ является самосопряженным расширением для оператора $h_\varepsilon(1)$. Поскольку все самосопряженные расширения оператора $h_\varepsilon(1)$ исчерпываются семейством $\{h_{\varepsilon\beta}(1), \beta \in \mathbb{C}^1, |\beta| = 1\}$, то найдется некоторое значение $\hat{\beta}$, $|\hat{\beta}| = 1$, такое, что $h_{\varepsilon\hat{\beta}}(1) = \hat{h}_\varepsilon(1)$. Поэтому достаточно исследовать оператор $h_{\varepsilon\hat{\beta}}(1)$.

В силу теоремы 2 область определения $D(T_{1,\hat{\beta}}(-1))$ оператора $T_{1,\hat{\beta}}(-1)$ состоит из функций вида

$$v(k) = \frac{r^{is_0} + \hat{\beta}r^{-is_0}}{r^2 + 1} + u(k), \quad u(k) \in D(\overline{T}_1(-1)). \quad (3.30)$$

Найдем теперь собственную функцию оператора $h_{\varepsilon\hat{\beta}}(1)$, отвечающую собственному значению $-\lambda^2$. Нетрудно видеть, что ее можно получить в виде (2.8) с учетом условия $v = A_{\varepsilon,\hat{\beta}}(1)u$ из решения $u(k)$ уравнения (3.26) при $z = -\lambda^2$ с дополнительным условием $u(k) \in D(T_{1,\hat{\beta}}(-1))$. Это значит, что функция $v(k)$ должна удовлетворять представлению (3.30).

В силу леммы 4 и следствия леммы 5 при достаточно больших λ условие (3.30) равносильно условию

$$c(0) \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{2is_0} = \hat{\beta}, \quad (3.31)$$

где $c(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c(\varepsilon)$, λ_0 — некоторое фиксированное число, при котором уравнение (3.25) с $z = -\lambda_0^2$ имеет решение. Но условию (3.31) удовлетворяет бесконечный набор значений

$$\lambda_n = \lambda_0 \exp \left(\frac{\arg(\hat{\beta}/c(0))}{2s_0} + \frac{\pi n}{s_0} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Таким образом, для оператора $\hat{h}_\varepsilon$ мы получили бесконечный набор собственных значений $z_n = -\lambda_n^2$, уходящих на $-\infty$. Теорема 3 доказана.

Благодарности. Автор выражает особую признательность Р. А. Минлосу за постановку задачи и ценные советы. Работа частично поддержана Фондом фундаментальных исследований АН РУз.

Список литературы

- [1] Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев. ДАН СССР. 1961. Т. 141. № 6. С. 1335–1338.
- [2] Р. А. Минлос, Л. Д. Фаддеев. ЖЭТФ. 1961. Т. 41. № 12. С. 1850–1851.
- [3] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
- [4] Р. А. Минлос, М. Х. Шерматов. Вестн. МГУ. Сер. 1. 1989. № 6. С. 7–14.
- [5] А. М. Mel'nikov, R. A. Minlos. Adv. Sov. Math. 1991. V. 5. P. 99–112.
- [6] М. Ш. Бирман. Матем. сб. 1956. Т. 38. № 4. С. 431–450.
- [7] М. Х. Шерматов. ТМФ. 2000. Т. 125. № 1. С. 74–91.
- [8] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. Представление группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматгиз, 1958.
- [9] К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций. М.–Л.: ИЛ, 1963.

Поступила в редакцию 4.IX.2002 г.