Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. А. Тагиров, Квантовая механика в римановом пространстве: сравнение разных подходов к квантованию геодезического движения, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 2, 209–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:00:31

© 2003 г.

Э. А. Тагиров*

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ: СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ ПОДХОДОВ К КВАНТОВАНИЮ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Сравниваются различные подходы к построению квантовой механики частицы в общем римановом пространстве и пространстве-времени путем квантования движения по геодезическим линиям. Дается краткий обзор различных формализмов квантования и трудностей, возникающих в них при применении к геодезическому движению в римановом конфигурационном пространстве. Затем более детально рассматриваются канонический, квазиклассический (подход Паули–де Витта) и фейнмановский (интегрирование по путям) формализмы и сравниваются возникающие в них квантовые гамильтонианы частицы в случае статического и топологически элементарного риманова конфигурационного пространства. Это позволяет выделить единственное правило упорядочения операторов координат и импульсов в каноническом формализме и единственное определение интеграла по путям, что устраняет часть произвола в построении квантовой механики частицы в римановом пространстве. Предложено геометрическое объяснение другой основной трудности квантования – неинвариантности квантового гамильтониана и интеграла по путям относительно диффеоморфизмов конфигурационного пространства.

Ключевые слова: квантовая механика, риманово пространство, квантование, геодезическое движение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая механика в римановом конфигурационном пространстве V_3 и в римановом пространстве-времени $V_{1,3}$ интересна прежде всего тем, что она является частью фундаментальной проблемы объединения общей теории относительности и квантовой теории. В ней в более простой форме возникает та же трудность определения подходящих физических наблюдаемых, которая во всей полноте проявляется при квантовании гравитации (см., например, [1]). Далее, квантовая теория поля в $V_{1,3}$, используемая для описания процессов в экстремальных космологических и астрофизических ситуациях, должна основываться явно или неявно на квантовой механике (квази)одночастичных состояний. Квантовая теория геодезического движения в $V_{1,3}$ может рассматриваться

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: tagirov@thsun1.jinr.ru

как предельный случай квантовой теории струн. Наконец, рассмотрение такой фундаментальной теории, как квантовая механика, на более широком геометрическом фоне может способствовать более глубокому пониманию этой теории.

К построению квантовой механики на римановом фоне возможны два принципиально различных подхода. Один, развиваемый в работах [2]–[4], который уместно называть *теоретико-полевым*, воспроизводит квантовую механику как квазинерелятивистскую асимптотику квазиодночастичного сектора пространства Фока в квантовой теории поля. Это построение инвариантно относительно диффеоморфизмов конфигурационного пространства V_3 . Примечательно, что здесь канонические коммутационные соотношения для операторов координат Дарбу в фазовом пространстве частицы оказываются деформированными¹⁾ с параметром деформации $\hbar^{-2}$. По-видимому, квантовая механика в таком подходе может быть переформулирована как некоторая некоммутативная геометрия фазового пространства.

Этот интересный результат побудил автора настоящей статьи более внимательно рассмотреть, как строится квантовая механика частицы в более традиционных подходах, основанных на идее квантования классических гамильтоновых систем, т.е. отображения их на некоторые некоммутативные структуры по определенным (и различным) совокупностям правил (формализмам). Естественно ожидать, что для физически осмысленных систем разные формализмы должны давать сопоставимые результаты. Однако рассматриваемый здесь случай системы, фундаментальной в силу своей элементарности, показывает, что на самом деле этого не происходит.

В отличие от теоретико-полевого подхода, проблема квантования на римановом геометрическом фоне имеет долгую историю, связанную с именами Шредингера, Подольского, Дирака, де Витта и других, не столь известных, исследователей. Она рассматривалась обычно как квантование геодезического движения в римановом конфигурационном пространстве V_3 или, для общности, в V_n с метрикой, не зависящей от времени. В этом случае релятивистская и нерелятивистская формулировки геодезического движения эквивалентны и соответствуют разному выбору системы отсчета. Кроме того, квантовая динамика некоторых модельных систем, более сложных, чем материальная точка, строится как квантование геодезического движения в конфигурационном пространстве V_n или его обобщения с добавлением внешнего потенциала или связи (см., например, [5] и ссылки, приведенные там). Если же все-таки иметь в виду именно точечную частицу без заряда и спина, то ее геодезическое движение на статическом V_n можно рассматривать и как движение по геодезическим в $V_{1,n} \sim R_1 \otimes V_n$, поскольку возможно слоение глобально-статического пространства-времени пространственноподобными вполне геодезическими гиперповерхностями (геодезические последних являются также и геодезическими самого $V_{1,n}$).

Несмотря на длительный интерес к построению квантовой механики частицы на нетривиальном геометрическом фоне путем квантования, эта задача до сих пор не полу-

¹⁾ Термин “деформация” используется в данной статье весьма вольно лишь для краткого обозначения замены скобки Пуассона или скобки Ли асимптотической суммой, члены которой билинейны и антисимметричны в том же смысле, что и сами эти скобки; это лишь одно из свойств понятия “деформация”, встречающегося в математически строгих текстах.

чила удовлетворительного решения: различные формализмы квантования при применении к геодезическому движению на нетривиальном фоне приводят к разным квантовым динамикам. Более того, существенный произвол содержится, как правило, даже в пределах одного формализма.

В каноническом формализме (см. ниже раздел 2) этот произвол проявляется в двух формах. Во-первых, это известная проблема упорядочения операторов $\hat{\xi}$, $\hat{p}$, соответствующих координатам Дарбу ξ^i , p_j в фазовом пространстве $\mathcal{P}_{2n} \sim T^*V_n$, при подстановке их в функцию $f(\xi, p)$ (скажем, разложенную в степенной ряд) для получения ее квантового образа $\hat{f}$. Вообще говоря, имеется бесконечное множество способов упорядочения, и нет какого-либо руководящего принципа для выбора одного из них. Эта проблема не привлекает особого внимания ввиду того, что все способы приводят к одному и тому же оператору $\hat{f}$ с точностью до аддитивной постоянной, если $f(\xi, p) = f_0(\xi, p) + f_1(\xi) + f_2(p)$, где f_0 — полином не выше второй степени по ξ, p и f_1, f_2 — любые подходящие функции. К этому классу относятся классические гамильтонианы типичных физических задач, рассматриваемых в стандартной квантовой механике в E_n . В них явно или неявно предполагается, что исходно при квантовании в качестве ξ^i использовались привилегированные декартовы координаты; криволинейные координаты если и применяются, например, в связи с симметрией потенциала, то только апостериорно, в качестве технического средства. Однако квантование той же функции $f(\xi, p)$, когда в качестве *наблюдаемых* ξ^i выбраны криволинейные координаты, приводит, вообще говоря, к другому оператору $\hat{f}$, и результат зависит от выбранного правила упорядочения.

Во-вторых, результат (канонического) квантования зависит от выбора системы координат ξ^i , т.е. *неинвариантен относительно диффеоморфизмов конфигурационного пространства* V_n (будем говорить *диффеонеинвариантен*) даже при фиксированном правиле упорядочения. Опять же эта трудность завуалирована в плоском пространстве $E_{1,n}$ тем, что здесь есть привилегированные декартовы координаты. В стандартной теории как бы неявно присутствует постулат о том, что именно в них проводится квантование. Но как быть в V_n , где декартовых координат нет? Попытка дать ответ на этот вопрос будет сделана в разделе 5 на основании результатов предыдущих разделов.

В фейнмановском формализме интегралов по путям, *рассматриваемом как квантование*, в дополнение к диффеонеинвариантности и произволу в выборе упорядочения есть еще и произвол в выборе точек на решетке интегрирования, в которых берутся значения подинтегральных функций [6] (см. раздел 4 настоящей работы).

Геометрическое квантование в формализме Блаттнера–Костанта–Сурьо (см., например, [7], [8]) в случае геодезического движения в V_n с тривиальной топологией сводится, по существу, к квазиклассическому подходу Паули–де Витта [9], [10]. Последний не связан ни с какой процедурой упорядочения и приводит к гамильтониану, который выглядит диффеоинвариантным (см., однако, раздел 3), но по самому построению является приближенным.

Деформационное квантование (общую теорию можно найти, например, в [11]) с использованием конструкции Федосова [12] дает диффеоинвариантный результат [13], полученный, однако, с использованием популярного, но частного правила упорядочения

Вейля. В данной статье мы совсем не будем касаться этого подхода к построению квантовой механики в пространстве V_n , как и подхода, основанного на вложении V_n в евклидово пространство большей размерности [14]: их необходимо рассматривать отдельно именно ввиду их относительной новизны и особой привлекательности. Весьма интересным будет также сравнение всех упомянутых подходов, основанных на идее квантования, с упомянутым выше теоретико-полевым подходом [2]–[4].

В настоящей работе мы ограничимся сравнением и согласованием на простейшем, но нетривиальном геометрическом фоне результатов применения к геодезическому движению в V_n трех исторически появившихся первыми формализмов квантования: канонического, квазиклассического и интегрирования по путям. Это позволяет выделить единственный канонический квантовый гамильтониан и единственный рецепт построения квантового пропагатора в виде интеграла по путям, если классический гамильтониан есть однородная квадратичная форма по импульсам с коэффициентами, зависящими от координат ξ^i конфигурационного пространства V_n . Этот результат, важный сам по себе, ведет, по-видимому, к далеко идущим обобщениям.

В разделе 2 будет показано, что произвол в квантовании такого движения сводится к однопараметрическому семейству правил упорядочения канонически сопряженных операторов координат и импульса при построении квантового гамильтониана в каждой отдельно взятой системе координат на V_n , однако любой гамильтониан, определяемый этим семейством, не инвариантен относительно диффеоморфизмов V_n , определяемых выбором n произвольных функций на V_n . Фигурально выражаясь, произвол “ $(1 + \infty^n)$ ”-мерный.

В разделе 3 показана возможность устранения одномерной составляющей этого произвола, связанной с выбором правила упорядочения. Для этого рассматривается квантовый гамильтониан, полученный де Виттом [10] из квазиклассического (и потому приближенного) пропагатора частицы в V_n . Требование, чтобы канонический гамильтониан совпадал с гамильтонианом де Витта в области, где их можно сравнивать, выделяет единственное правило упорядочения из упомянутого однопараметрического семейства.

В разделе 4 рассматривается квантование геодезического движения с использованием интегрирования по путям. Подобно результату раздела 3, сравнение гамильтониана, полученного из интеграла по путям в лагранжевой форме с гамильтонианом де Витта приводит к тому же правилу упорядочения, которое выделяется в разделе 3. При этом однозначно фиксируется положение точек решетки, в которых нужно брать значения подинтегральных функций: ими оказываются узлы решетки.

В разделе 5 обсуждается полученное решение проблемы упорядочения и дается возможное объяснение второй трудности построения квантовой механики в V_n – диффеоинвариантности гамильтониана.

В настоящей работе принят уровень строгости, который часто называют эвристическим: многие определения и соотношения требуют дальнейших математических уточнений для того, чтобы обрести строгий смысл. Автор исходит из того, что если на этом несовершенном уровне получены физически осмысленные результаты, то им может быть придан и более строгий математический смысл.

2. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для того чтобы подчеркнуть связь рассматриваемой системы с общей теорией относительности, рассмотрим сначала геодезические в $V_{1,n}$ общего положения. Пусть $x^\alpha, x^\beta, \dots$ ($\alpha, \beta, \dots = 0, 1, \dots, n$) – общие координаты в $V_{1,n}$ и $t, \xi^i, \xi^j, \dots$ ($i, j, \dots = 1, 2, \dots, n$) – нормальные гауссовы координаты, порожденные нормальной геодезической трансляцией некоторой заданной гиперповерхности Коши $\Sigma \equiv \Sigma(t_0)$ и некоторых координат ξ^i на ней. Метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = c^2 dt^2 - \omega_{ij}(t, \xi) d\xi^i d\xi^j, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (1)$$

(Область применимости координат t, ξ^i и представления (1) метрики $V_{1,n}$ указана, например, в разделе 2 работы [15].)

Геодезические мировые линии суть экстремали $x^\alpha = x^\alpha(s)$ функционала действия

$$W = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{s_1}^{s_2} L' ds = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (2)$$

удовлетворяющие связи

$$g^{\alpha\beta}(x) p_\alpha p_\beta = m^2 c^2, \quad (3)$$

где p_α – обобщенные импульсы:

$$p_\gamma(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dL'}{d(dx^\gamma/ds)} = -mc \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \right)^{-1/2} g_{\gamma\delta} \frac{dx^\delta}{ds}. \quad (4)$$

Формально каноническое квантование как некоторое отображение Q функций на фазовом пространстве $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{2n+2} \sim T^*V_{1,n}$ на операторы, действующие в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (см. более точное определение ниже), может быть применено к этой общековариантной системе как к системе со связью (3) и, соответственно, с равной нулю функцией Гамильтона [8]. Однако такое отображение будет эквивалентно отображению на операторы, определенные на пространстве²⁾ $\mathcal{H} \sim L^2(V_{1,3}; \mathbb{C}; \sqrt{g} d_4x)$, которое не может быть интерпретировано как пространство состояний реальной частицы, характеризующихся положением на конфигурационном пространстве (см., например, [4]). Для стандартной вероятностной интерпретации в шредингеровском представлении операторы наблюдаемых должны быть определены на $L^2(\Sigma; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n x)$. Это достигается в редуцированном формализме, в котором квантование проводится после разрешения связи (3) на классическом уровне. Для этого связь представляют в виде

$$\left(p_0 + mc \sqrt{1 + \frac{2H_0}{mc^2}} \right) \left(p_0 - mc \sqrt{1 + \frac{2H_0}{mc^2}} \right) = 0, \quad x^0 \equiv ct, \quad (5)$$

²⁾ Здесь и далее пространства $L^2(V_{1,3})$ и $L^2(V_n)$ определяются относительно естественных мер, порожденных соответствующими римановыми метриками. Это позволяет рассматривать их элементы как скаляры относительно диффеоморфизмов в $V_{1,n}$ и V_n . В случае отсутствия метрики вводится более сложная конструкция, основанная на классе эквивалентных мер Лебега на конфигурационном пространстве и полуформах вместо скаляров (см., например, [7], с. 427).

где

$$H_0 \equiv H_0(\xi, p; t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2m} \omega^{ij}(\xi; t) p_i p_j. \quad (6)$$

Для неизлучающей бесспиновой частицы (а только она движется по геодезической в не-тривиальном $V_{1,3}$) возьмем, как обычно, решение (5) относительно p_0 с $p_0 > 0$. В теории с разрешенной таким образом связью (3) гамильтониан (и при том положительно определенный) будет иметь вид

$$H(\xi, p) = mc^2 \sqrt{1 + \frac{2H_0}{mc^2}}. \quad (7)$$

Имеется интересный промежуточный подход [16], который в $E_{1,3}$ использует оба решения связи (5), для чего вводится наблюдаемая “знак p_0 ”, что приводит к пространству состояний из двух $L^2(E_{1,3}; \mathbb{C}; d_3x)$, $\{x^i\} \in E_{1,3}$, описывающих соответственно частицы и античастицы, которые, однако, будучи нейтральными, тождественны. В работе [17] этот подход был распространен на случай $V_{1,3}$, однако в отношении этой работы возникает замечание, которое будет сделано в конце данного раздела.

Принципиальное различие между нередуцированным и редуцированным формализмами состоит в том, что в первом случае времениподобная координата x^0 является одной из наблюдаемых, тогда как во втором случае переменная t — это параметр эволюции. В классической теории это физически эквивалентные версии одной теории, однако в результате их квантования возникают (по меньшей мере) две разные теории. В редуцированной теории при каждом фиксированном значении t наблюдаемыми являются функции на фазовом пространстве $\mathcal{P}_{2n} \sim T^*\Sigma(t)$, т.е. кокасательном расслоении над $\Sigma(t)$. Локально их можно рассматривать как функции координат Дарбу ξ^i, p_j , причем $\{\xi^i\} \in \Sigma(t)$ и

$$p_k = \frac{mc\omega_{kl}(t, \xi)\dot{\xi}^l}{\sqrt{c^2 - \omega_{ij}(t, \xi)\dot{\xi}^i\dot{\xi}^j}}. \quad (8)$$

Естественно, что сами координаты Дарбу, фиксированные выбором координат ξ^i на $\Sigma(t)$, также являются наблюдаемыми, которые обычно называют *первичными* в том смысле, что остальные наблюдаемые суть функции от них.

Перейдем теперь к понятию квантования классической гамильтоновой системы. Общее современное определение асимптотического по $\hbar$ квантования можно найти в книге [18] (глава IV). Для наших целей возьмем упрощение деформационной версии этого определения, состоящее в том, что ниже, в условии (Q2), выражающем принцип соответствия, сразу предполагается некоторая деформация скобки Пуассона вместо взятого в [18] определения через *-произведение символов операторов.

Пусть $\mathfrak{s}_{2n}$ — некоторая подходящая подалгебра пуассоновой алгебры функций $f \in C^\infty(\mathcal{P}_{2n})$. *Квантование* есть отображение

$$\mathcal{Q}: \mathfrak{s}_{2n} \ni f \xrightarrow{\mathcal{Q}} \hat{f},$$

где $\hat{f}$ — операторы в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющее следующим требованиям³⁾:

³⁾Здесь мы полностью отвлекаемся от важной части постулатов квантования, связывающих симплектоморфизмы в $\mathcal{P}_{2n}$ с проективными унитарными преобразованиями в $\mathcal{H}$. Этот важный вопрос требует отдельного исследования.

(Q1) $1 \xrightarrow{\mathcal{Q}} \hat{1}$ (единичный оператор в $\mathcal{H}$);

(Q2) $\{f, g\}_\hbar \xrightarrow{\mathcal{Q}} i\hbar^{-1}[\hat{f}, \hat{g}] \stackrel{\text{def}}{=} i\hbar^{-1}(\hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f})$, где $\{f, g\}_\hbar \equiv \{f, g\}_0 + O(\hbar)$ есть некоторый антисимметричный по f и g билинейный функционал и $\{f, g\}_0 \equiv \{f, g\}$ есть скобка Пуассона на $\mathcal{P}_{2n}$;

(Q3) $\hat{f} \xrightarrow{\mathcal{Q}} (\hat{f})^\dagger$ (эрмитово сопряжение оператора $\hat{f}$ относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$);

(Q4) полный набор функций (максимальная неприводимая коммутативная подалгебра) $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$: $f^{(i)} \in \mathfrak{s}_{2n}$, отображается на полный (в смысле Дирака [19]) набор коммутирующих операторов $\hat{f}^{(1)}, \dots, \hat{f}^{(n)}$.

Из условия (Q4) и теоремы Стоуна-фон Неймана [7] следует, что $\mathcal{H} \sim L^2(\Sigma; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n x)$.

Основные трудности квантования состоят в бесконечном числе возможностей построения функционала $\{f, g\}_\hbar$ (деформации скобки Пуассона), сложности выбора полного набора в топологически нетривиальных $\mathcal{P}_{2n}$ и инвариантности получаемых квантовых наблюдаемых относительно выбора преобразований полного набора $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$. Здесь мы поставим простую и физически ориентированную цель: рассмотреть простейшую процедуру квантования в применении к геодезическому движению на максимально простом, но нетривиальном и достаточно общем геометрическом фоне. Поэтому введем следующие ограничения на рассматриваемые далее пространства $V_{1,n}$ и V_n .

(V1) Предположим, что $V_{1,n}$ — глобально-статическое пространство-время и $\Sigma(t) \sim V_n$ — его вполне геодезические сечения, существующие в этом случае. Это означает, что $\omega_{ij}(\xi, t) \equiv \omega_{ij}(\xi)$. Тогда классические динамики с гамильтоновыми функциями H и H_0 эквивалентны и лишь относятся к разным системам отсчета. Однако с их квантовыми аналогами дело обстоит значительно сложнее (см., в частности, раздел 5).

(V2) Основной целью поставим построение квантового образа классических гамильтонианов H_0 для произвольного $\omega_{ij}(\xi) \in C^\infty(V_n)$ в рамках общей схемы квантования (Q1)–(Q4). Минимальной алгеброй $\mathfrak{s}_{2n}$, содержащей все такие гамильтонианы, является алгебра полиномов по p_i с коэффициентами, зависящими от ξ^i . Если будет построен нерелятивистский квантовый гамильтониан $\hat{H}_0$, то одной, но не единственной возможностью построения релятивистского гамильтониана $\hat{H}$ (см. также раздел 5) будет применение к гамильтониану (7), понимаемому в асимптотическом смысле

$$\hat{H}(H_0) = H(\hat{H}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{H}_0 - \frac{1}{mc^2} \hat{H}_0^2 + \frac{1}{2m^2 c^4} \hat{H}_0^4 - \dots, \quad (9)$$

правила фон Неймана [20], определяющего функции от коммутирующих операторов $A_1, \dots, A_N$:

$$\hat{f}(A_1, \dots, A_N) \stackrel{\text{def}}{=} f(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_N). \quad (10)$$

(V3) Предположим, что топология V_n тривиальна. Это, конечно, не означает, что кривизна V_n по метрике ω_{ij} равна нулю. По физическому смыслу такое условие можно рассматривать не как ограничение на топологию V_n , а как локализацию квантовой частицы в области, достаточно малой для того, чтобы были существенны лишь локальные эффекты кривизны пространства.

(V4) В силу предыдущего предположения будем считать, что координаты ξ^i на V_n таковы, что их координатные линии полны и открыты. В этом смысле они подобны декартовым координатам.

Кстати, при предположениях (V1)–(V4) не возникает вопроса о квантово-полевых процессах рождения и уничтожения частиц внешним гравитационным полем, и задача становится чисто квантово-механической.

Каноническим квантованием здесь будет называться реализация отображения $\mathcal{Q}$ следующим образом.

(CQ1) В качестве полного набора $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ в условии (Q4) возьмем какие-нибудь координаты ξ^i , удовлетворяющие условию (V4).

(CQ2) В качестве алгебры $\mathbf{s}_{2n}$ возьмем сначала алгебру полиномов по степеням координат Дарбу ξ^i, p_j .

(CQ3) Уточним условие (Q2), наложив на скобку $\{f, g\}_\hbar$ следующие требования:

$$\{\xi^i, \xi^j\}_\hbar = \{\xi^i, \xi^j\}_0 \equiv \{\xi^i, \xi^j\} = 0, \quad (11)$$

$$\{\xi^i, p_j\}_\hbar = \{\xi^i, p_j\}_0 \equiv \{\xi^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad (12)$$

$$\{p_i, p_j\}_\hbar = \{p_i, p_j\}_0 \equiv \{p_i, p_j\} = 0. \quad (13)$$

(CQ4) Тогда квантовые образы $\hat{\xi}^i, \hat{p}_j$ этих первичных классических наблюдаемых должны удовлетворять каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{\xi}^i, \hat{\xi}^j] = 0, \quad [\hat{\xi}^i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_j^i, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (14)$$

и реализовываться в $L^2(\Sigma(=V_n); \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi)$ в виде следующих дифференциальных операторов⁴⁾:

$$\begin{aligned} \xi^i &\xrightarrow{\mathcal{Q}} \hat{\xi}^i = \xi^i \cdot \hat{\mathbf{1}}, \\ p_i &\xrightarrow{\mathcal{Q}} \hat{p}_i = -i\hbar \left(\partial_i + \frac{1}{4} \partial_i \ln \omega \right). \end{aligned} \quad (15)$$

(CQ5) Базис $\mathbf{s}_{2n}$, образованный мономами

$$(\xi^1)^{M_1} \dots (\xi^n)^{M_n} (p_1)^{N_1} \dots (p_n)^{N_n}, \quad (16)$$

отображается на симметризации (эрмитизации) таких же мономов из операторов $\hat{\xi}^i, \hat{p}_j$ по какому-либо правилу упорядочения (расстановки этих операторов между собой). Обычно правила упорядочения через коммутацию полученных таким образом операторов определяют функционалы $\{f, g\}_\hbar$ в условии квантования (Q2) (см. приведенные ниже примеры). Однако автору настоящей статьи не известно, имеет ли это место для любого правила упорядочения.

(CQ6) Зафиксированную тем или иным правилом упорядочения скобку $\{.,.\}_\hbar$ примем далее за общую для всех $f(\xi, p) \in C^\infty(\mathcal{P}_{2n})$ ввиду плотности полиномов в этом

⁴⁾ Операторы $\hat{\xi}^i, \hat{p}_j$ – симметрические (будем говорить *эрмитовы*), но не самосопряженные в $L^2(V_n; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi)$, поскольку они не ограничены. Последовательное преодоление этой трудности достигается введением оснащенного гильбертова пространства (см., например, [21]). Здесь же, упрощая, будем считать, что рассматривается подходящая плотная область в $L^2(V_n; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi)$.

пространстве [22] при тех ограничениях на $\mathcal{P}_{2n}$, которые были введены выше при дополнительном предположении, что $\omega(\xi)$ тоже является полиномом.

Вообще говоря, возможных правил упорядочения бесконечно много, и классификация их определенного класса (в нашей статье мы выходим за его пределы) дана в работе [23]. В литературе чаще других используется *упорядочение по Вейлю* [24], обладающее рядом свойств симметрии (см., например, [25]). Для случая, когда множество первичных операторов состоит из пар некоммутирующих операторов, это правило можно описать следующим образом. Возьмем, например, произведение $(\hat{p}_1)^a (\hat{\xi}^1)^b$, $a \geq 0$, $b \geq 0$. Тогда упорядочение по Вейлю $((\hat{p}_1)^a (\hat{\xi}^1)^b)^{(W)}$ этого произведения определяется из равенства [22]

$$(A\hat{p}_1 + B\hat{\xi}^1)^N = \sum_{a+b=N} \frac{N!}{a!b!} A^a B^b ((\hat{p}_1)^a (\hat{\xi}^1)^b)^{(W)}. \quad (17)$$

При выборе упорядочения по Вейлю скобка $\{f, g\}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{f, g\}_h^{(W)}$ есть скобка Мойала [26]. Учитывая условие (V3) и модифицируя на случай римановой метрики на V_n формулы из [22] (глава V), получим для квантования полиномов с использованием упорядочения по Вейлю следующее представление:

$$\begin{aligned} f(p, \xi) \xrightarrow{\mathcal{Q}} (\hat{f}^{(W)} \psi)(\xi) &= (2\pi\hbar)^{-n} \omega^{-1/4}(\xi) \times \\ &\times \int d^n \xi' d^n p \exp \left(-\frac{i}{\hbar} (\xi^i - \xi'^i) p_i \right) f \left(p, \frac{\xi + \xi'}{2} \right) \omega^{1/4}(\xi) \psi(\xi), \quad (18) \\ \psi(\xi) &\in L^2(V_n; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi). \end{aligned}$$

Следующий шаг в каноническом квантовании состоит в том, что ввиду плотности полиномов в $C^\infty(\mathcal{P}_{2n} \sim R_n \otimes V_n)$ эта формула принимается как общее определение квантования всех наблюдаемых $f(p, \xi) \in C^\infty(\mathcal{P}_{2n})$.

Другим примером может служить *упорядочение по Ривье* [25], [27], которое в применении к моному (16) означает следующую расстановку операторов:

$$\begin{aligned} (\xi^1)^{M_1} \dots (\xi^n)^{M_n} (p_1)^{N_1} \dots (p_n)^{N_n} &\xrightarrow{\mathcal{Q}} \\ &\xrightarrow{\mathcal{Q}} \frac{1}{2} ((\hat{\xi}^1)^{M_1} \dots (\hat{\xi}^n)^{M_n} (\hat{p}_1)^{N_1} \dots (\hat{p}_n)^{N_n} + (\hat{p}_1)^{N_1} \dots (\hat{p}_n)^{N_n} (\hat{\xi}^1)^{M_1} \dots (\hat{\xi}^n)^{M_n}) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} ((\hat{\xi}^1)^{M_1} \dots (\hat{\xi}^n)^{M_n} (\hat{p}_1)^{N_1} \dots (\hat{p}_n)^{N_n})^{(R)}. \quad (19) \end{aligned}$$

Аналогично упорядочению по Вейлю оно может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} f(\xi, p) \xrightarrow{\mathcal{Q}} (\hat{f}^{(R)} \psi)(\xi) &= (2\pi\hbar)^{-n} \omega^{-1/4}(\xi) \times \\ &\times \int d^n \xi' d^n p \exp \left(-\frac{i}{\hbar} (\xi^i - \xi'^i) p_i \right) \frac{f(\xi, p) + f(\xi', p)}{2} \omega^{1/4}(\xi') \psi(\xi'), \quad (20) \\ \psi(\xi) &\in L^2(V_n; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi), \end{aligned}$$

которая получается как полусумма таких же интегральных представлений для qp - и pq -упорядочений, приведенных в работе [22] (глава V). Далее, правило (20) распространяется на все $f(\xi, p) \in C^\infty(\mathcal{P}_{2n})$. Упорядочению по Ривье соответствует своя скобка в условии (Q2), обозначим ее $\{f, g\}_h^{(R)}$.

Перепишем (18) и (20) в виде

$$(\hat{f}^{(W)}\psi)(\xi) = \int d^n \xi' K_f^{(W)}(\xi; \xi') \psi(\xi'), \quad (\hat{f}^{(R)}\psi)(\xi) = \int d^n \xi' K_f^{(R)}(\xi; \xi') \psi(\xi'). \quad (21)$$

Очевидно, что ядра в виде линейных комбинаций

$$K_f^{(\nu)}(\xi, \xi') \stackrel{\text{def}}{=} \nu K_f^{(W)}(\xi, \xi') + (1 - \nu) K_f^{(R)}(\xi, \xi') \quad (22)$$

при каждом фиксированном значении параметра ν также определяют некоторое упорядочение и, вообще говоря, имеется много других подобных возможностей.

Теперь самое время обратиться к той конкретной физической системе, квантование которой мы хотим рассмотреть, т.е. к гамильтониану $H_0(\xi, p)$ (см. формулу (6)). По правилу фон Неймана (10) имеем

$$\omega^{ij}(\xi) \xrightarrow{\mathcal{Q}} \hat{\omega}^{ij} \equiv \omega^{ij}(\hat{\xi}) = \omega^{ij}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{1}}. \quad (23)$$

Положим также, что в канонически квантованном гамильтониане $\hat{H}_0$ не должно быть операторов вида⁵⁾ $(\partial_{i_1} \dots \partial_{i_M} \omega^{ij}(\xi))$; тогда все возможности выбора правила упорядочения для квантования, как легко видеть, ограничиваются однопараметрическим семейством (22). Попросту говоря, упорядочение состоит в такой эрмитовой расстановке операторов $\hat{p}_i$ и $\hat{\omega}^{jk}$, которая воспроизводит классический гамильтониан H_0 , если предположить, что эти операторы коммутируют.

Таким образом, оказывается, что *выбор скобки $\{.,.\}_\hbar$ в условии квантования (Q2) в определенном смысле зависит от того, какая физическая система квантуется*. Если бы мы рассматривали, например, систему с классическим гамильтонианом вида $\lambda^{ijk}(\xi) p_i p_j p_k p_l$, произвол в выборе упорядочения был бы двухпараметрическим.

Квантование (6) по правилу упорядочения (22) с учетом (18) и (20) приводит к следующему квантовому гамильтониану:

$$H_0(q, p) \xrightarrow{\mathcal{Q}} \hat{H}_0^{(\nu)} = \frac{2-\nu}{8m} \omega^{ij}(\hat{\xi}) \hat{p}_i \hat{p}_j + \frac{\nu}{4m} \hat{p}_i \omega^{ij}(\hat{\xi}) \hat{p}_j + \frac{2-\nu}{8m} \hat{p}_i \hat{p}_j \omega^{ij}(\hat{\xi}). \quad (24)$$

Подставляя сюда представление первичных операторов (15), получим представление $\hat{H}_0^{(\nu)}$ в виде дифференциального оператора в $L^2(V_n; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi)$:

$$\hat{H}_0^{(\nu)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{(\omega)}(\xi) + V_q^{(\nu)}(\xi), \quad (25)$$

где $\Delta_{(\omega)}$ – оператор Лапласа–Бельтрами для V_n ,

$$V_q^{(\nu)}(\xi) = -\frac{\hbar^2}{4m} \left(\partial_i (\omega^{ij} \gamma_j) + \frac{\nu}{2} \partial_i \partial_j \omega^{ij} + \frac{1-\nu}{2} \omega^{ij} \gamma_i \gamma_j \right) \quad (26)$$

– так называемый *квантовый потенциал*

$$\gamma_i \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{ij}^j, \quad \gamma_{ij}^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \omega^{kl} (\partial_i \omega_{jl} + \partial_j \omega_{il} - \partial_l \omega_{ij}), \quad (27)$$

⁵⁾ Это не означает, что в представлении $\hat{H}_0$ в виде дифференциального оператора в $L^2(V_n; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi)$ не должно быть функций вида $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_M} \omega^{ij}(\xi)$.

— символы Кристоффеля для V_n . Квантовый потенциал в отличие от кинетического члена $\hat{H}_0^{(\text{kin})} \stackrel{\text{def}}{=} -(\hbar^2/2m)\Delta_{(\omega)}(\xi)$ диффеоморфноинвариантен. В общем случае $V_q^{(\nu)}$ нельзя обратить в нуль в какой-либо области подбором координат ξ , что легко видеть из рассмотрения интегрируемости координатного условия $V_q^{(\nu)} = 0$. В этом смысле квантовые потенциалы не выделяют какую-либо предпочтительную систему координат. Их, по-видимому, можно назвать *квантовыми аномалиями диффеоморфизмов* конфигурационного пространства.

Таким образом, весь произвол в построении квантовой механики свободной частицы, движущейся в V_n , заключен в квантовом потенциале $V_q^{(\nu)}$ в виде его зависимости от параметра ν и выбора координат ξ^i . Этот произвол нетривиален, поскольку приводит к гамильтонианам с разным спектром. Нередко его устраняют “руками”, полагая $\hat{H}_0 \equiv \hat{H}_0^{(\text{kin})}$. Так фактически поступают, например, авторы работы [18], используя (в своих обозначениях) следующее представление $\hat{H}_0^{(\text{kin})}$ в пространстве $L^2(E_n; \mathbb{C}; d^n \xi)$:

$$\hat{H}_0^{(\text{kin})} = \frac{1}{2m} \hat{\omega}^{-1/4} \hat{p}_i \hat{\omega}^{1/2} \hat{\omega}^{ij} \hat{p}_j \hat{\omega}^{1/4} \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{\omega} \Delta_{(\omega)}; \quad (28)$$

здесь, конечно, $\hat{\omega}^{-1/4} \equiv \omega^{-1/4}(\xi) \cdot \hat{1}$ и т.д. Выполнение принципа соответствия очевидно: если считать, что $\hat{\xi}$ и $\hat{p}$ коммутируют, то получим H_0 . Проблема, однако, в том, чтобы пройти путь в обратном направлении и получить правило (28) в качестве оператора Гамильтона по какой-либо процедуре квантования. Впрочем, этот вопрос, по-видимому, тщательно и не исследовался. Представление (28) можно встретить в работе де Витта [10], но именно как кинетическую часть полного гамильтониана, содержащего еще и некоторый квантовый потенциал. К краткому описанию этого результата и использованию его для устранения произвола по параметру ν мы перейдем в следующем разделе.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Обобщая на случай $V_{1,n}$ ВКБ-пропагатор, построенный Паули [9] для частицы в электромагнитном поле в $E_{1,3}$, де Витт [10] использовал нерелятивистский пропагатор для частицы

$$\langle \xi, t | \xi_0, t_0 \rangle = \omega^{-1/4}(\xi) D^{1/2}(\xi, t | \xi_0, t_0) \omega^{-1/4}(\xi) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} S(\xi, t | \xi_0, t_0) \right), \quad (29)$$

где D — детерминант ван Флека [28]

$$D(\xi, t | \xi_0, t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \det \left(-\frac{\partial^2 S(\xi, t | \xi_0, t_0)}{\partial \xi^i \partial \xi_0^j} \right), \quad (30)$$

и

$$S(\xi, t | \xi_0, t_0) = \int_{t_0}^t \frac{1}{2} \omega_{ij}(\xi, t) \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j, \quad \xi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \xi(t_0), \quad (31)$$

— классическое действие; его минимум обеспечивается уравнением движения

$$\ddot{\xi}^i + \gamma_{kl}^i(\xi; t) \dot{\xi}^k \dot{\xi}^l + \omega^{ik}(\xi; t) \frac{\partial \omega_{kl}}{\partial t}(\xi; t) \dot{\xi}^l = 0. \quad (32)$$

Если $\partial\omega_{kl}(\xi; t)/\partial t = 0$, т.е. если $V_{1,n}$ – глобально-статическое пространство-время и $\Sigma(t) \sim \Sigma(t_0) \sim V_n$ – вполне геодезическая гиперповерхность, то (32) есть уравнение геодезической в V_n . Ограничимся рассмотрением этого простого случая, тем более что и сам де Витт поступал фактически так же.

Рассматривая предельный переход $t \rightarrow t_0$ ($\xi \rightarrow \xi_0$) *вдоль геодезической линии, соединяющей ξ и ξ_0* , де Витт пришел к уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \xi | \xi_0 \rangle + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\Delta_{(\omega)}(\xi) - \frac{1}{6} R_{(\omega)}(\xi) \right) \langle \xi | \xi_0 \rangle = o(\xi - \xi_0) \langle \xi | \xi_0 \rangle, \quad (33)$$

где $R_{(\omega)}$ – скалярная кривизна по метрике ω_{ij} при следующем определении тензоров Римана–Кристоффеля и Риччи:

$$R^a{}_{bcd} = \partial_d \gamma^a{}_{bc} - \partial_c \gamma^a{}_{bd} + \gamma^a{}_{de} \gamma^e{}_{bc} - \gamma^a{}_{ce} \gamma^e{}_{bd}, \quad R_{(\omega)ij} = (R_{(\omega)})^k{}_{ikj} \quad (34)$$

(де Витт определяет $R_{(\omega)ij}$ с противоположным знаком). Из уравнения (33) следует, что диффеоинвариантный оператор

$$\hat{H}_0^{(DW)}(\xi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\Delta_{(\omega)}(\xi) - \frac{1}{6} R_{(\omega)}(\xi) \right) \quad (35)$$

можно рассматривать как гамильтониан на подпространстве волновых функций (начальных данных для уравнения Шредингера)

$$\langle \xi | \xi_0 \rangle \equiv \psi_{\xi_0}(\xi) \in L^2(V_n; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi),$$

сосредоточенных в окрестности точки ξ_0 в том смысле, что они удовлетворяют условию

$$\frac{(\psi, o(\xi - \xi_0)\psi)}{(\psi, \hat{H}_0^{(DW)}\psi)} \ll 1, \quad (36)$$

где $o(\xi - \xi_0)$ – остаточный член в правой части (33). Таким образом, изложенный подход, который уместно называть квазиклассическим, дает в указанном приближенном смысле единственный и притом диффеоинвариантный гамильтониан.

Вместе с тем появление потенциала $(\hbar^2/12m)R_{(\omega)}(\xi)$ рассматривалось де Виттом и рядом последующих авторов как нежелательное явление, противоречащее установившейся традиции, и они “исправляли” гамильтониан добавлением подходящего контрчлена в лагранжиан, т.е. в подинтегральное выражение в формуле (31), так, чтобы получался $\hat{H}_0^{(\text{kin})}$. Но это уже не будет лагранжиан геодезического движения, квантование которого является предметом настоящей статьи.

На самом деле появление в гамильтониане скалярной кривизны $R_{(\omega)}$ вполне закономерно с точки зрения теоретико-полевого подхода. Действительно, уравнение Шредингера V_n есть не только постулат нерелятивистской теории, но и нерелятивистский предел [2], [4] общерелятивистского уравнения линейного скалярного поля в $V_{1,n}$ $\varphi(x)$, $x \in V_{1,n}$. Обычно рассматривают следующее простое обобщение уравнения Клейна–Гордона на случай $V_{1,n}$:

$$\square \varphi + \zeta R_{(g)}(x) \varphi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \varphi = 0, \quad x \in V_{1,n}, \quad (37)$$

$$\square \stackrel{\text{def}}{=} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta.$$

Здесь ζ – произвольная безразмерная действительная постоянная, $g_{\alpha\beta}$ – метрический тензор $V_{1,n}$, а $R_{(g)}(x)$ и ∇_α – соответственно скалярная кривизна и ковариантная производная в $V_{1,n}$. Два значения постоянной ζ явно выделены. При $\zeta = 0$ взаимодействие поля $\varphi(x)$ с внешним гравитационным полем $g_{\alpha\beta}(x)$ минимально: оно включается простой заменой частных производных по декартовым координатам в $E_{1,n}$ в стандартном уравнении Клейна–Гордона для ковариантных производных по криволинейным координатам в $V_{1,n}$. При $\zeta = (n-1)/4n$ это взаимодействие конформно-инвариантно в пределе $m = 0$ (впервые это свойство при $n = 3$ было отмечено Пенроузом [29] и детально изучено в работе [30]), а также обладает некоторыми другими свойствами, желательными с физической точки зрения [30], [31]. В случае глобально-статического пространства-времени, которым мы ограничились в настоящей статье, имеем $R_{(g)} = -R_{(\omega)}$. Если к тому же $n = 3$, то $\zeta = 1/6$, и нерелятивистским пределом уравнения (37) будет уравнение Шредингера именно с гамильтонианом $\hat{H}_0^{(DW)}(\xi)$. Однако при этом возникает почти метафизический вопрос: почему квазиклассическое приближение приводит к гамильтониану $\hat{H}_0^{(DW)}$ с коэффициентом $1/6$ при $R_{(\omega)}(x)$ для любой размерности n , тогда как теория скалярного поля φ с конформной связью приводит к тому же гамильтониану лишь при размерности реального мира $n = 3$?

Теперь сравним операторы $\hat{H}_0^{(\nu)}$, который получен в каноническом смысле точно, но с произволом в виде зависимости от ν , и $\hat{H}_0^{(DW)}$, который не содержит произвола, но является лишь квазиклассическим приближением к неизвестному нам точному гамильтониану. Вспомним, что последний был получен стягиванием точки ξ к точке ξ_0 вдоль соединяющей их *геодезической*. Таким образом, положение ξ относительно ξ_0 наиболее естественным образом описывается геодезическим расстоянием s между ними и касательным вектором $(d\xi/ds)_0$ к этой геодезической в точке ξ_0 . А это суть *римановы координаты* (обозначим их $\{y^i\}$) с началом в точке ξ_0 . В этих координатах метрический тензор ω_{ij} , его производные по y^i и, соответственно, символы Кристоффеля γ_{kl}^i выражаются в виде рядов по степеням y^i с коэффициентами, которые являются полиномами по степеням компонент тензора кривизны Римана–Кристоффеля (34) и по степеням ковариантных производных этого тензора, взятым в начале координат $y^i = 0$, т.е. в точке ξ_0 . Поэтому, применяя метод аффинных расширений Веблена [32] и свернутые тождества Бианки, можно представить в виде такого же ряда квантовый потенциал $V_q^{(\nu)}$. Для нашего обсуждения достаточно привести два первых члена этого ряда:

$$\hat{H}_0^{(\nu)}(y) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\Delta_{(\omega)}(y) - \frac{\nu}{12} R_{(\omega)} \Big|_{y=0} - \frac{\nu}{12} (\partial_i R_{(\omega)}) \Big|_{y=0} y^i + O((y^i)^2) \right). \quad (38)$$

С учетом приближенного характера $\hat{H}_0^{(DW)}$ мы приходим к замечательному результату: для согласования канонического подхода с квазиклассическим нужно выбрать $\nu = 2$ в (22) и (24). *Правильным нерелятивистским квантовым гамильтонианом* для точечной частицы в пространстве $V_{1,n}$ с этой точки зрения является замечательно простой по форме оператор

$$\hat{H}_0^{(2)} = \frac{1}{2m} \hat{p}_i \omega^{ij}(\xi) \hat{p}_j. \quad (39)$$

Этим решается проблема произвола в выборе правила упорядочения первичных операторов при каноническом квантовании геодезического движения. Однако проблема нековариантности полного квантового потенциала $V_q^{(2)}$ остается. Эта проблема и вопрос о

выборе упорядочения для гамильтонианов, отличных от квадратичных по импульсам, будут обсуждены в разделе 5. А пока мы перейдем к подтверждению полученного результата в рамках другого традиционного подхода к формулировке квантовой механики.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПУТЯМ

Не только движение точечной частицы во внешнем гравитационном поле, но и ряд других механических задач естественным образом формулируются как движение частицы на V_n . Примерами последних служат n -мерный ротатор и другие системы, которые могут быть представлены как движение на однородном пространстве группы симметрии (см., например, [5], [33] и ссылки, приведенные там). Для этого класса систем фейнмановский формализм интегралов по путям считается наиболее интересным подходом к решению уравнения Шредингера для пропагатора частицы, поскольку он учитывает метрику конфигурационного пространства представлением путей малыми отрезками геодезических линий и естественным выбором меры.

Для указанного класса систем интегрирование по путям в конфигурационном пространстве связывает, как известно (см., например, [33]), заданный квантовый оператор Гамильтона $\hat{H}$ с некоторой эффективной классической функцией Лагранжа $L_{\text{eff}}(\xi, \dot{\xi})$ и может рассматриваться как результат квантования соответствующей ей классической динамики. Можно поставить обратную задачу: подобрать $\hat{H}$ так, чтобы оказалось, что

$$L_{\text{eff}}(\xi, \dot{\xi}) = L_{\text{cl}}(\xi, \dot{\xi}) = \frac{m}{2} \omega_{ij}(\xi) \dot{\xi}^i \dot{\xi}^j. \quad (40)$$

Определенное таким образом соответствие $H_0 \rightarrow \hat{H}$ совместно с отображением первичных наблюдаемых (15) является квантованием геодезического движения в V_n . Рассмотрим такой подход в краткой описательной форме, поскольку пока для нас важен материал для сравнения с методами квантования, рассмотренными выше.

Итак, перед нами стоит задача представить в виде интеграла по путям в V_n формальный пропагатор

$$\mathbb{K}(\xi'', t'' | \xi', t') = \langle \xi'' | e^{-i(t''-t')\hat{H}/\hbar} | \xi' \rangle \quad (41)$$

для квантового гамильтониана вида

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_\omega(\xi) + V(\xi), \quad (42)$$

действующего в $L^2(V_n; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi)$. Здесь мы принимаем как уже установленный факт, что все множество возможных гамильтонианов движения частицы в V_n содержится в гамильтониане с произвольным потенциалом $V(\xi)$.

Следуя схеме вычислений, предложенной в работе [6], разобьем промежуток времени $[t', t'']$ на $N \rightarrow \infty$ отрезков исчезающе малой длительности $\epsilon = (t'' - t')/N$ и представим $\mathbb{K}(\xi'', t'' | \xi', t')$ в виде

$$\mathbb{K}(\xi'', t'' | \xi', t') = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{I=1}^{N-1} \sqrt{\omega(\xi_I)} d^n \xi_I \prod_{J=1}^{N-1} \langle \xi_I | e^{-i\epsilon \hat{H}/\hbar} | \xi_J \rangle, \quad (43)$$

причем $\xi_0 = \xi'$, $\xi_N = \xi''$. Для вычисления матричных элементов оператора $\hat{H}$ в конфигурационном представлении необходимо представить дифференциальный оператор $\Delta_\omega(\xi)$ в (42) через $\hat{\xi}$, $\hat{p}$. Это требует выбора правила упорядочения этих операторов. В отличие от работы [6], где (как и во многих других работах на эту тему) используется правило Вейля, применим более общее правило (22). Тогда получим

$$\hat{H} = \hat{H}_0^{(\nu)} - V_q^{(\nu)}(\xi) + V(\xi), \quad (44)$$

где под $\hat{H}_0^{(\nu)}$ и $V_q^{(\nu)}(\xi)$ имеются в виду соответственно выражения (24) и (26). Вычисление матричных элементов с точностью до линейных членов по ϵ по предложенной в [6] схеме, но с использованием этого обобщенного правила, приводит к выражению

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(\xi'', t'' | \xi', t') &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\frac{1}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\pi N/2} \prod_{I=1}^{N-1} \sqrt{\omega(\xi_I)} d^n \xi_I \times \\ &\times \prod_{J=1}^{N-1} \frac{(\widetilde{\sqrt{\omega}})^{(\nu)}(\xi_{J-1}, \xi_J)}{[\omega(\xi_J)\omega(\xi_{J-1})]^{1/4}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon \tilde{L}_{\text{eff}}^{(\nu)} \left(\xi_{J-1}, \xi_J; \frac{\Delta \xi_J}{\epsilon} \right) \right\}, \quad (45) \\ \Delta \xi_J &\equiv \Delta \xi_J^i \stackrel{\text{def}}{=} \xi_J^i - \xi_{J-1}^i. \end{aligned}$$

Здесь $(\widetilde{\sqrt{\omega}})^{(\nu)}(\xi_{J-1}, \xi_J)$ и $\tilde{L}_{\text{eff}}^{(\nu)}(\xi_{J-1}, \xi_J, \Delta \xi_J/\epsilon)$ суть величины, которые выражаются соответственно через функции $\sqrt{\omega}(\xi)$ и

$$L_{\text{eff}}^{(\nu)} \left(\xi, \frac{\Delta \xi_J}{\epsilon} \right) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\text{cl}}(\xi, \Delta \xi_J/\epsilon) - V(\xi) + V_q^{(\nu)} \quad (46)$$

по следующему общему правилу, вытекающему из (22):

$$\tilde{f}^{(\nu)}(\xi_{J-1}, \xi_J) = \nu f(\bar{\xi}_J) + \frac{1-\nu}{2} (f(\xi_{J-1}) + f(\xi_J)), \quad \bar{\xi}_J \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\xi_J + \xi_{J-1}). \quad (47)$$

Теперь произведение по J в выражении (45) надо представить в виде произведения экспонент от некоторого классического действия на отрезках $[\xi_{J-1}, \xi_J]$, т.е. произведения сомножителей вида

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon L'_{\text{eff}}(\xi'_J, \Delta \xi_J/\epsilon) \right\}, \quad (48)$$

где в показателе стоит значение некоторой эффективной функции Лагранжа $L'_{\text{eff}}(\xi, \dot{\xi})$ (вообще говоря, отличающейся от $L_{\text{eff}}^{(\nu)}$), взятое в некоторой (пока произвольной) точке $\xi'_J \in [\xi_{J-1}, \xi_J]$. Для этого все функции от ξ_{J-1} , ξ_J , $\bar{\xi}_J$ под знаком произведения по J надо разложить в ряд Тейлора в окрестности точки ξ'_J с точностью до квадратичных по $\Delta \xi_J$ членов, поскольку только они дают вклад в интеграл (45). Затем надо включить вклад предэкспоненциального множителя в показатель экспоненты в виде дополнительного квантового потенциала. Эту процедуру рассмотрим по отдельности для двух следующих принципиально различных случаев.

А. $\xi'_J = (1-\mu)\xi_{J-1} + \mu\xi_J$, $0 < \mu < 1$, т.е. $\xi'_J \in (\xi_{J-1}, \xi_J)$.

В. $\xi' = \xi_{J-1}$ или $\xi' = \xi_J$, т.е. ξ' выбирается на границах отрезка $[\xi_{J-1}, \xi_J]$.

Случай А. Для функции общего вида (47) имеем

$$\tilde{f}^{(\nu)}(\xi_{J-1}, \xi_J) = f(\xi'_J) + \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \partial_i f(\xi'_J) \Delta \xi_J^i + \frac{1}{2} \left(\frac{2-\nu}{4} - \mu + \mu^2\right) \partial_i \partial_j f(\xi'_J) \Delta \xi_J^i \Delta \xi_J^j. \quad (49)$$

Применим эту общую формулу к $f(\xi) \equiv L_{\text{eff}}^{(\nu)}(\xi, \Delta \xi / \epsilon)$. Последнее слагаемое в (49) в нужном приближении по ϵ оказывается при этом равным выражению

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2-\nu}{4} - \mu + \mu^2\right) \partial_i \partial_j \omega_{kl}(\xi'_J) \Delta \xi_J^i \Delta \xi_J^j \frac{\Delta \xi_J^l}{\epsilon} \frac{\Delta \xi_J^k}{\epsilon}. \quad (50)$$

Далее воспользуемся тем результатом из [34], согласно которому под знаком интеграла (45) можно сделать замену

$$\Delta \xi_J^i \Delta \xi_J^j \rightarrow i\epsilon \frac{\hbar}{m} \omega^{ij}(\xi'_J). \quad (51)$$

После такой замены в выражении (50) и симметризации полученного выражения по индексам i, j, k, l мы получим добавочный к $L_{\text{eff}}^{(\nu)}(\xi'_J, \Delta \xi_J / \epsilon)$ квантовый потенциал

$$V_L^{(\nu; \beta)}(\xi'_J; \nu; \mu) = -\frac{\hbar^2}{12m} \left(\frac{2-\nu}{4} - \mu + \mu^2\right) (\partial_i \partial_j \omega_{kl}(\omega^{ij} \omega^{kl} + 2\omega^{ik} \omega^{jl}))(\xi'). \quad (52)$$

Второе слагаемое в (49) после проведения той же замены (51) добавляет к $L_{\text{eff}}^{(\nu)}(\xi'_J, \Delta \xi_J / \epsilon)$ выражение

$$i \left(\frac{1}{2} - \mu\right) \frac{\hbar}{3} \partial_i \omega_{kl}(\xi'_J) \left(\omega^{kl}(\xi'_J) \frac{\Delta \xi_J^i}{\epsilon} + 2\omega^{ik}(\xi'_J) \frac{\Delta \xi_J^l}{\epsilon}\right). \quad (53)$$

В результате $L_{\text{eff}}^{(\nu)}(\xi, \dot{\xi})$ приобретает дополнительное слагаемое, пропорциональное $\Delta \xi^i / \epsilon \sim \dot{\xi}^i$, т.е. линейное по скорости; такого члена нет в L_{cl} . Скомпенсировать его для выполнения условия (40) нечем, поскольку фаза предэкспоненциального множителя

$$\tilde{\Omega}_J = \frac{(\widetilde{\sqrt{\omega}})^{(\nu)}(\xi_{J-1}, \xi_J)}{[\omega(\xi_J) \omega(\xi_{J-1})]^{1/4}} \quad (54)$$

при $\epsilon \rightarrow 0$ не содержит члена, линейного по $\epsilon \dot{\xi}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_J = 1 - \left(\frac{\nu}{8} \partial_i \partial_j \ln \omega(\xi'_J) - \left(\frac{3-\nu}{32} - \frac{\mu}{4} + \frac{\mu^2}{4}\right) \partial_i \ln \omega(\xi'_J) \partial_j \ln \omega(\xi'_J)\right) \Delta \xi^i \Delta \xi^j + \\ + O((\Delta \xi)^2) \equiv \Omega(\xi'_J, \nu; \mu). \end{aligned} \quad (55)$$

Поэтому, чтобы избежать появления в L_{eff} члена, пропорционального скорости, необходимо положить

$$\mu = \frac{1}{2}, \quad (56)$$

т.е. $\xi'_J = \bar{\xi}_J$, как в работе [6], использующей упорядочение Вейля (формулу (47) при $\nu = 1$) с самого начала. Отметим однако, что изучение в будущем версии с включением чисто квантового квазивекторного взаимодействия, вероятно, представляет интерес.

С учетом условия (56) и подстановки (51) вклад $\tilde{\Omega}$ в интеграл по путям (45) сводится к добавлению к $L_{\text{eff}}^{(\nu)}$ в показателе экспоненты еще одного квантового потенциала

$$V_{\Omega}^{(\nu)}(\bar{\xi}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\omega^{ij}(\bar{\xi})\left(\frac{a}{8}\partial_i\partial_j\ln\omega(\bar{\xi}) - \left(\frac{1-a}{32}\right)\partial_i\ln\omega(\bar{\xi})\partial_j\ln\omega(\bar{\xi})\right) + O(\epsilon^2). \quad (57)$$

В итоге, если мы выберем в исходной формуле (42)

$$\begin{aligned} V(\xi) &\equiv V_A^{(\nu)}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} V_q^{(\nu)}(\xi) + V_L^{(\nu)}(\xi) + V_{\Omega}^{(\nu)}(\xi) = \\ &= -\frac{\hbar^2}{24m}\left(\frac{2\nu+7}{2}\omega^{ij}\omega^{kl} - (5-2\nu)\omega^{ik}\omega^{jl}\right)\partial_i\partial_j\omega_{kl} + \\ &+ \frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{\nu+2}{4}\omega^{km}\omega^{ln}\omega^{ij} - \frac{\nu-2}{4}\omega^{im}\omega^{jn}\omega^{kl} - (\nu-2)\omega^{im}\omega^{kn}\omega^{jl}\right)\partial_i\omega_{mn}\partial_j\omega_{kl}, \end{aligned} \quad (58)$$

то под интегралом по путям в нужном приближении останется

$$\prod_{J=1}^{N-1} \exp\left\{\frac{i\epsilon}{\hbar}L_{\text{cl}}(\bar{\xi}_J)\right\}, \quad (59)$$

т.е. произведение экспонент от отношения классического действия геодезического движения между точками ξ_{J-1} и ξ_J к постоянной Планка $\hbar$.

Таким образом, мы установили отображение $H_0 \rightarrow \hat{H}$ функции Гамильтона геодезического движения в V_n на оператор (42) в $L^2(V_n; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi)$ с потенциалом (58). Этот результат можно назвать *фейнмановским квантованием геодезического движения в V_n* . Он тоже диффеоморфноинвариантен и содержит произвол в выборе параметра ν , соответствующий произволу в выборе правила упорядочения в каноническом квантовании. Нельзя ли выбрать ν так, чтобы $V_A(\xi)$ совпал с результатом квазиклассического квантования (35) в той области, где такое сравнение уместно, т.е. в окрестности начала нормальных римановых координат y^i ? Оказывается, нельзя:

$$V_A(y) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{R}{3}(0) + O(y) \quad (60)$$

независимо от значения параметра ν и даже независимо от выбора μ . Таким образом, произвол сохраняется. Более того, (60) не совпадает с квантовым потенциалом $V_q^{(\nu)}(y)$ при $y^i = 0$ и $\nu = 1$, т.е. при каноническом квантовании в римановых координатах с применением упорядочения Вейля и условия (56).

Случай В. В этом случае выбор $\mu = 0$ или $\mu = 1$ снова приводит к неприемлемому для нас появлению в показателе экспоненты члена, линейного по $\dot{\xi}$. Это является следствием несимметричного учета вклада концов отрезка $[\xi_{J-1}, \xi_J]$, тогда как для заданной функции $f(\xi)$ выражение (47) для $\tilde{f}^{(\nu)}(\xi_{J-1}, \xi_J)$ зависит от них симметрично. Однако при близких ξ_{J-1} и ξ_J для $\tilde{f}^{(\nu)}$ легко получить следующее симметричное представление:

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{(\nu)}(\xi_{J-1}, \xi_J) &= \frac{1}{2}f(\xi_{J-1}) + \frac{1}{2}f(\xi_J) + \frac{\nu}{8}(\partial_i f(\xi_{J-1}) - \partial_i f(\xi_J))\Delta\xi_J^i + \\ &+ \frac{\nu}{16}(\partial_i\partial_j f(\xi_{J-1}) + \partial_i\partial_j f(\xi_J))\Delta\xi_J^i\Delta\xi_J^j + O((\Delta\xi)^3). \end{aligned} \quad (61)$$

Применяя эту формулу к $\tilde{f}^{(\nu)} \equiv \tilde{L}_{\text{eff}}^{(\nu)}$, в показателе экспоненты в формуле (45) нужно учесть в точках ξ_{J-1} и ξ_J вклад смежных отрезков $[\xi_{J-2}, \xi_{J-1}]$ и $[\xi_J, \xi_{J+1}]$, соответственно. Совокупный вклад в фазу членов, линейных по $\Delta\xi$, в точке ξ_J от $\tilde{L}_{\text{eff}}^{(\nu)}$ после замен (51) и

$$\Delta\xi_{J-1} = \Delta\xi_J - \epsilon^2 \ddot{\xi}_J + O(\epsilon^3) \quad (62)$$

можно представить как

$$i \frac{\nu \hbar}{8m} \epsilon \omega^{kl}(\xi_J) \partial_i \omega_{kl}(\xi_J) \ddot{\xi}_J, \quad (63)$$

и потому им при интегрировании по путям можно пренебречь. Применяя эти же замены к членам, квадратичным по $\Delta\xi$, получим следующий дополнительный к $\tilde{L}_{\text{eff}}^{(\nu)}$ квантовый потенциал:

$$V_B^{(\nu)} = -\frac{\nu \hbar^2}{24m} ((\omega^{ij} \omega^{kl} + 2\omega^{ik} \omega^{jl}) \partial_i \partial_j \omega_{kl})(\xi_J). \quad (64)$$

Аналогично вычислим вклад в фазу в точке ξ_J смежных предэкспоненциальных множителей $\tilde{\Omega}_J$ и $\tilde{\Omega}_{J+1}$:

$$\tilde{\Omega}_J \tilde{\Omega}_{J+1} = \exp(\ln \tilde{\Omega}_J + \ln \tilde{\Omega}_{J+1}). \quad (65)$$

Для этого разложим слагаемые в показателе экспоненты соответственно по степеням $\Delta\xi_J$ и $\Delta\xi_{J+1}$ с точностью до $O((\Delta\xi)^3)$ и соберем слагаемые с коэффициентами, зависящими от ξ_J . Оставшиеся слагаемые “уходят” в аналогичные вклады в точках ξ_{J-1} и ξ_{J+1} . С помощью соотношения (62) получим следующую функцию от ξ_J :

$$\frac{\nu-2}{8} \epsilon^2 \ddot{\xi}_{J+1}^i \partial_i \ln \omega + \left(\frac{2-\nu}{16} \partial_i \partial_j \ln \omega + \frac{1}{32} \partial_i \ln \omega \partial_j \ln \omega \right) \Delta\xi_J^i \Delta\xi_J^j + O(\epsilon^2 \Delta\xi). \quad (66)$$

Очевидно, что первым слагаемым под знаком интеграла можно пренебречь. Отсюда с помощью замены (51) получим вклад в фазу в точке ξ_J в виде квантового потенциала

$$V_\Omega^{(\nu)}(\xi_J) = -\frac{\hbar^2}{32m} \omega^{ij} (2(2-\nu) \partial_i \partial_j \ln \omega(\xi_J) + \partial_i \ln \omega(\xi_J) \partial_j \ln \omega(\xi_J)). \quad (67)$$

Для того чтобы в фазе осталось только отношение классического действия в окрестности точки ξ_J за время ϵ к постоянной Планка, положим в (42)

$$V(\xi) \equiv V_B^{(\nu)}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} V_q^{(\nu)}(\xi) + V_L(\xi) + V_\Omega^{(\nu)}(\xi). \quad (68)$$

Теперь рассмотрим $V_B^{(\nu)}$ в начале нормальных римановых координат $\{y^i\}$. Отметим сразу, что $V_L(y) = O(y)$, так как

$$\partial_i \partial_j \omega_{kl}(y) = \frac{1}{3} (R_{(\omega)ikjl} + R_{(\omega)iljk})(0) + O(y)$$

(см., например, формулу (2.168) в работе [35]). В потенциале $V_\Omega^{(\nu)}$ неисчезающий вклад может дать только первое слагаемое в скобках. Необходимо положить

$$\nu = 2, \quad (69)$$

чтобы этот вклад исчез. Так замечательным образом подтверждается правило упорядочения, полученное при сравнении канонического и квазиклассического гамильтонианов. При этом фиксируется однозначный способ вычисления интеграла по путям и, в частности, рецепт выбора точек на решетке интегрирования, в которых надо брать значения интегрируемых функций: это узлы решетки. Этот рецепт отличается от того, который принимается при использовании упорядочения Вейля: для него, как уже отмечалось, эти значения берутся в середине отрезков решетки.

Заметим также, что упорядочение, соответствующее $\nu = 2$, упоминается среди ряда других в работе [6]. Мы же выделили его из двухпараметрического семейства возможностей (по ν и μ) в определенном смысле по необходимости. В следующем разделе мы, в частности, обсудим, почему сравнение гамильтонианов в окрестности начала римановых координат имеет особый геометрический смысл. Пока же приведем полное выражение для $V_B^{(2)}$:

$$V_B^{(2)} = -\frac{\hbar^2}{12m}(2\omega^{ij}\omega^{kl} + \omega^{ik}\omega^{jl})\partial_i\partial_j\omega_{kl} - \frac{\hbar^2}{16m}(2\partial_i\omega^{ij}\partial_j\ln\omega + \omega^{ij}\partial_i\ln\omega\partial_j\ln\omega). \quad (70)$$

Конечно, этот квантовый потенциал, вообще говоря, отличается от канонического (см. формулу (26) при $\nu = 2$)

$$V_q^{(2)}(\xi) = -\frac{\hbar^2}{4m}\left(\partial_i(\omega^{ij}\gamma_j) + \partial_i\partial_j\omega^{ij} - \frac{1}{2}\omega^{ij}\gamma_i\gamma_j\right), \quad (71)$$

и остается вопрос: какой из двух потенциалов и, следовательно, формализмов квантования “более правильный”?

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, из трех основных трудностей канонической квантовой механики в V_n (произвол в выборе правила упорядочения при построении операторов квантовых наблюдаемых, нековариантность этих операторов и проблема квантования в конфигурационном пространстве с нетривиальной топологией) для первой мы предложили конкретное и однозначное решение в виде выбора $\nu = 2$ в формуле (22). Однако это правило получено именно для наблюдаемых (гамильтонианов), квадратичных по импульсам, и только для них. Если пытаться следовать логике этого построения для наблюдаемых иной структуры, то правило упорядочения, которое при этом возникнет, должно определять свою “скобку” в условии квантования (Q2). Неясно, будет ли она определена однозначно, но в любом случае получается, что *для разных классов классических наблюдаемых должны быть разные “скобки”* $\{.,.\}_\hbar$ в условии (Q2).

Этот вывод может показаться очень странным, однако он не противоречит опыту, поскольку для наблюдаемых явлений (за исключением, возможно, космологии ранней Вселенной) поправки к скобке Пуассона в левой части условия (Q2) малы и, соответственно, мала разница между различными версиями поправок. Кроме того, не считаем же мы странным то, что в геометрическом квантовании вообще не возникает какого-либо правила упорядочения, поскольку любая квантовая наблюдаемая в шредингеровском представлении вычисляется локально в виде дифференциального оператора [8].

В любом случае сложившаяся ситуация весьма интересна и заслуживает дальнейшего исследования.

Представленные в данной статье результаты относятся к нерелятивистской версии геодезической динамики. Остается еще более трудная проблема квантования релятивистской версии, основанной на гамильтониане $H(\xi, p)$ (7). Ее возможное асимптотическое решение с применением правила фон Неймана в форме (9) уже упоминалось выше. Однако, если для каждого гамильтониана должно быть построено свое каноническое квантование, то для (7) должен быть заново преодолен путь, пройденный для (6). При этом аналогом квазиклассического гамильтониана $\hat{H}^{(DW)}$ может служить квантовый гамильтониан, вычисленный в формализме Блаттнера–Костанта–Сурьо для нескольких порядков асимптотического разложения (7) [36]. Он отличается от того, что получится при простом применении правила фон Неймана (9). Анализ этого расхождения также представляется интересной задачей для понимания связи различных формализмов квантования.

Перейдем теперь к тому важному обстоятельству, что при установлении правила $\nu = 2$ существенную роль играло сравнение гамильтонианов $\hat{H}_0^{(\nu)}$, $\hat{H}^{(DW)}$ и $\hat{H}_A^{(\nu)}$ в окрестности начала именно римановой системы координат. Чем же эта система выделена в континууме систем координат? Тем, что положение точки $\{\xi^i\}$ в ней полностью определяется геодезической линией, соединяющей эту точку с началом координат $\{\xi_0^i\}$, и, следовательно, только геометрией V_n . Нормальные римановы координаты $y^a(\xi) = n^{(a)}(\xi)s(\xi; \xi_0)$ точки $\{\xi^i\}$ определяются значениями геодезического расстояния $s(\xi; \xi_0)$ и $n^{(a)}(\xi) = e_i^{(a)}(d\xi^i/ds)_0$ – проекций касательного вектора к этой геодезической в начале координат на локальный репер $\{e_{(a)}^i\}$. Координатные линии

$$y^1 = \text{const}, \dots, \quad y^{k-1} = \text{const}, \quad y^{k+1} = \text{const}, \dots, \quad y^n = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (72)$$

замечательны тем, что все их кривизны равны нулю. Представим себе, что похожая система координат реализуется не с помощью геодезических, а с помощью линий, определяемых каким-нибудь другим уравнением, например, уравнением геодезической с правой частью (“внешней силой”). Такая линия имеет хотя бы одну кривизну, а в общем случае их число равно n (см., например, изложение этого вопроса в [35]). Следовательно, объектами теории являются также и внешние поля кривизны координатных линий.

Таким образом, класс римановых координат оказывается в указанном смысле выделенным, что, казалось бы, противоречит догме общей теории относительности о равноправии всех возможных систем координат. Разрешение этого противоречия, возможно, состоит в следующем. Квантово-механическое описание физической системы должно включать в себя указание на способ измерения (наблюдения) свойств этой системы (см. современное обсуждение этого вопроса в [37]). В конфигурационном представлении система координат $\{\xi^i\}$ играет двоякую роль. С одной стороны, она арифметизует (“цифрует”) точки конфигурационного пространства путем локального отображения на R_n . С другой стороны, она задает n первичных наблюдаемых, представляемых в квантовой механике операторами $\hat{\xi}$, спектры которых можно интерпретировать как формализацию показаний некоторого устройства для определения положения частицы. Эти показания не должны зависеть от способа арифметизации V_n и в этом смысле должны быть представлены скалярами. Исходя из сказанного, разделим эти две функции координат:

оставим за произвольными координатами ξ^i функцию арифметизации V_n и введем $2n$ канонически сопряженных скалярных функций $q^{(i)}(\xi)$, $p_{(j)}(\xi, p)$ с помощью канонического преобразования

$$\{\xi^i, p_j\} \longrightarrow \{q^{(k)}(\xi), p_{(l)}(\xi, p)\}. \quad (73)$$

Здесь $q^{(k)}(\xi)$ суть n произвольных фиксированных функций таких, что $\text{rang } \|\partial_i q^{(j)}\| = n$, а $p_{(l)}(\xi, p) \stackrel{\text{def}}{=} K_{(l)}^i(\xi) p_i$, причем

$$K_{(j)}^i(\xi) = \det \|\partial_k q^{(l)}\| \omega^{-1/2} \epsilon^{i i_2 \dots i_n} \epsilon_{(j j_2 \dots j_n)} \partial_{i_2} q^{(j_2)} \dots \partial_{i_n} q^{(j_n)} \quad (74)$$

— n векторных полей и $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$, $\epsilon_{(j j_2 \dots j_n)}$ — полностью антисимметричные символы независимо от верхнего или нижнего расположения индексов. Конечно, в частном случае можно принять $q^{(i)}(\xi) \equiv \xi^i$; это означает, что арифметизация V_n и наблюдение положения частицы осуществляются одинаковыми измерительными устройствами.

Операторы в $L^2(V_n; \mathbb{C}; \sqrt{\omega} d^n \xi)$, соответствующие скалярным первичным наблюдаемым $q^{(i)}(\xi)$, $p_{(j)}(\xi)$, имеют вид

$$\hat{q}^{(i)}(\xi) = q^{(i)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{1}}, \quad (75)$$

$$\hat{p}_{(j)}(\xi) = -i\hbar \left(K_{(j)}^l(\xi) \nabla_l + \frac{1}{2} \nabla_l K_{(j)}^l(\xi) \right). \quad (76)$$

Введем скалярный гамильтониан $\hat{H}_0^{(\nu)'}(\xi)$ из условия совпадения его с $\hat{H}_0^{(\nu)}(\xi)$ при $q^{(i)}(\xi) \equiv \xi^i$, взяв для краткости случай $\nu = 2$:

$$\hat{H}_0^{(2)'} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2m} \widehat{\hat{p}_{(i)} \partial_k q^{(i)} \omega^{kl} \partial_l q^{(j)} \hat{p}_{(j)}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\Delta_{(\omega)} - \frac{1}{2} \nabla^k v_k + \frac{1}{4} v^k v_k \right), \quad (77)$$

где

$$\widehat{\partial_l q^{(j)}} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_l q^{(j)}(\xi) \cdot \hat{\mathbf{1}}, \quad v_k \stackrel{\text{def}}{=} K_{(i)}^m \nabla_m \partial_k q^{(i)}.$$

Квантовый потенциал в правой части (77) не зависит от выбора координат ξ^i , но зависит от выбора наблюдаемых положения $q^{(i)}(\xi)$. Это соответствует концепции *относительной квантовой механики* (relational quantum mechanics), развиваемой Ровелли [37], согласно которой описание квантовой системы неизбежно должно включать указание на способ наблюдения этой системы, причем различные способы дают разный объем информации о ней. Можно думать, что выбор римановых координат y^a в качестве наблюдаемых, т.е. $q^{(a)}(\xi) \equiv y^a(\xi)$, дает максимум информации о квантовом аналоге частицы, движущейся по геодезической в V_n , поскольку при таком выборе не добавляется никакой посторонней информации в виде произвольных значений кривизны координатных линий, которые определяют способ наблюдения положения частицы.

Отметим также, что квантовый потенциал в (77) исчезает в том частном случае V_n , когда $R = 0$ и $q^{(i)}$ являются гармоническими функциями, т.е. $\Delta_\omega q^{(i)} = 0$.

Благодарности. Автор благодарен А. А. Шарапову и А. А. Владимирову за полезные ссылки и разъяснения. Исследование поддержано грантом № 00-01-00871 РФФИ.

Список литературы

- [1] *C. Rovelli*. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 3776; hep-th/9910131.
- [2] Э. А. Тазуров. ТМФ. 1990. Т. 84. № 3. С. 419.
- [3] Э. А. Тазуров. ТМФ. 1992. Т. 90. № 3. С. 412; 1996. Т. 106. № 1. С. 122.
- [4] Э. А. Тазуров. Class. Q. Grav. 1999. V. 16. P. 2165.
- [5] *C. Grosche, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian*. ЭЧАЯ. 1997. Т. 28. № 5. С. 1229.
- [6] *J. C. D'Olivo, M. Torres*. J. Phys. A. 1989. V. 21. P. 3355.
- [7] *R. Abraham, J. E. Marsden*. Foundations of Mechanics. Reading, MA: Benjamin/Cummings Publications Co, 1978.
- [8] *J. 'Sniatycki*. Geometric Quantization and Quantum Mechanics. Appl. Math. Sci. V. 30. New York–Heidelberg–Berlin: Springer, 1980.
- [9] *W. Pauli*. Feldquantisierung, Lecture Notes. Zurich, 1950–1951.
- [10] *B. S. De Witt*. Rev. Mod. Phys. 1951. V. 29. P. 377.
- [11] *F. Bayen et al.* Ann. Phys. 1978. V. 111. P. 111.
- [12] *B. V. Fedosov*. J. Diff. Geom. 1994. V. 40. P. 213.
- [13] *M. Bordemann, N. Neumaier, S. Waldmann*. Commun. Math. Phys. 1998. V. 198. P. 363.
- [14] *N. Ogawa, K. Fuji, A. Kobushkin*. Progr. Theor. Phys. 1990. V. 83. P. 894; *L. V. Prokhorov*. On motion in curved spaces. In: Proceedings of the Sixth Int. Conf. on Path Integrals from peV to TeV: 50 Years after Feynman's Paper. Eds. R. Casalbuoni et al. Singapore: World Scientific, 1998. P. 249.
- [15] *C. Destri, P. Maraner, E. Onofri*. Nuovo Cimento. A. 1994. V. 107. P. 237.
- [16] *D. M. Gitman, I. V. Tyutin*. Class. Q. Grav. 1990. V. 70. P. 2131.
- [17] *S. P. Gavrilov, D. M. Gitman*. Int. J. Mod. Phys. A. 2001. V. 15. P. 4499.
- [18] *М. В. Карасев, В. П. Маслов*. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [19] *П. А. М. Дирак*. Принципы квантовой механики. М.: Физматгиз, 1960.
- [20] *Дж. фон Нейман*. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
- [21] *А. Садбери*. Квантовая механика и физика элементарных частиц. М.: Мир, 1989.
- [22] *Ф. А. Березин, М. А. Шубин*. Уравнение Шредингера. М.: Издательство МГУ, 1983.
- [23] *G. S. Agarwal, E. Wolf*. Phys. Rev. D. 1970. V. 2. P. 2161.
- [24] *Г. Вейль*. Теория групп и квантовая механика. М.: Физматлит, 1986.
- [25] *G. L. Mehta*. J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 676.
- [26] *J. E. Moyal*. Proc. Camb. Philos. Soc. 1949. V. 45. P. 99.
- [27] *D. C. Rivier*. Phys. Rev. 1957. V. 83. P. 862.
- [28] *J. H. Van Vleck*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1928. V. 14. P. 178.
- [29] *R. Penrose*. Conformal treatment of infinity. In: Relativity, Groups and Topology. 1963 Summer School. Theor. Univ. Grenoble. Ed. B. De Witt. London: Gordon and Breach, 1964. P. 563.
- [30] *N. A. Chernikov, E. A. Tagirov*. Ann. Inst. H. Poincaré. 1969. V. A9. P. 109.
- [31] *E. A. Tagirov*. Ann. Phys. 1973. V. 76. P. 561.
- [32] *О. Веблен*. Инварианты дифференциальных квадратичных форм. М.: ИЛ, 1948.
- [33] *M. S. Marinov*. J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 2458.
- [34] *D. W. McLaughlin, L. S. Schulman*. J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 2520.
- [35] *Дж. Л. Сунг*. Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. литературы, 1963.
- [36] *D. Kalinin*. Rep. Math. Phys. 1999. V. 43. P. 147.
- [37] *C. Rovelli*. Int. J. Theor. Phys. 1996. V. 35. P. 1637.

Поступила в редакцию 10.VII.2002 г.