Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, О кохомологиях алгебры Пуассона, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 2, 179–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 04:17:50

© 2003 г.

В. В. Жаринов*

О КОГОМОЛОГИЯХ АЛГЕБРЫ ПУАССОНА

Предложена техника вычислений когомологий алгебры Пуассона, использующая преобразование Лапласа обобщенных функций с компактным носителем. Найдены когомологии низших порядков этой алгебры с коэффициентами в двух естественных представлениях: тривиальном и присоединенном.

Ключевые слова: алгебры Ли, алгебры Пуассона, когомологии.

Когомологические методы глубоко проникли в современную математическую физику (см., например, [1], [2]) и даже привели к понятию *когомологическая физика* (см., например, [3]). Со своей стороны, скобки Пуассона и порождаемая ими одноименная алгебра Ли лежат в основе всех исследований динамики как классических, так и квантовых процессов, а изучение их когомологических свойств – активно развивающаяся область (см., например, [4]).

В настоящей работе изучаются когомологии алгебры Пуассона с коэффициентами в тривиальном и присоединенном представлениях. Используется техника вычислений, предложенная в работе [5] и основанная на преобразовании Лапласа обобщенных функций с компактным носителем. В частности, вычислены когомологии низших порядков, имеющие естественные алгебро-геометрические интерпретации.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Алгебра Пуассона. Пусть V – вещественное m -мерное векторное пространство и V^* – его дуальное. Пусть также задан невырожденный бивектор $\chi \in \wedge^2 V$, так что определен обратный элемент – бивектор $\chi^{-1} \in \wedge^2 V^*$ (в частности, $m = 2D$ четное). При естественных отождествлениях $\chi: V \rightarrow V^*$, $\chi^{-1}: V^* \rightarrow V$ имеем $\chi \circ \chi^{-1} = \text{id}_V$, $\chi^{-1} \circ \chi = \text{id}_{V^*}$, или в координатах $\chi = (\chi^{\alpha\beta})$, $\chi^{\alpha\beta} + \chi^{\beta\alpha} = 0$, $\det(\chi^{\alpha\beta}) \neq 0$, $\chi^{-1} = (\chi_{\alpha\beta})$, $\sum_{\gamma} \chi^{\alpha\gamma} \chi_{\gamma\beta} = \sum_{\gamma} \chi_{\beta\gamma} \chi^{\gamma\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, причем здесь и всюду ниже $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{1, m} = \{1, \dots, m\}$.

Пусть $\mathcal{E}(V) = \mathcal{C}^{\infty}(V)$ – пространство всех гладких комплексных функций на V с естественной топологией равномерной сходимости на компактах вместе с производными

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

всех порядков. Для каждой пары $u, v \in \mathcal{E}(V)$ определена *скобка Пуассона* $\{u, v\} = (du \wedge dv, \chi) \in \mathcal{E}(V)$, или в координатах

$$\{u, v\}(x) = \sum_{\alpha, \beta} (\partial_{x^\alpha} u(x)) (\partial_{x^\beta} v(x)) \chi^{\alpha\beta}, \quad x = (x^1, \dots, x^m) \in V.$$

Скобки Пуассона обладают стандартными свойствами скобок Ли: они билинейны, кососимметричны и удовлетворяют тождеству Якоби. Таким образом, определена *алгебра Пуассона* $\mathcal{P} = (\mathcal{E}(V); \{\cdot, \cdot\})$, т.е. определены линейное топологическое пространство $\mathcal{E}(V)$ и скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ в качестве скобок Ли. Конечно, пространство $\mathcal{E}(V)$ обладает также структурой ассоциативной алгебры относительно обычных поточечных операций, но здесь она играет второстепенную роль.

1.2. Когомологии. Необходимые сведения об алгебрах Ли, их представлениях и когомологиях можно найти в книгах [6]–[8] и в обзоре [9]. Напомним здесь, что представление алгебры Ли $\mathfrak{A}$ в линейном пространстве $\mathfrak{K}$ есть линейное отображение $\pi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{K})$, причем выполнено *коммутаторное правило* $\pi([a, b]) = [\pi(a), \pi(b)]$, где $[a, b]$ – скобка Ли элементов $a, b \in \mathfrak{A}$, а $[\pi(a), \pi(b)] = \pi(a) \circ \pi(b) - \pi(b) \circ \pi(a)$ – коммутатор линейных отображений $\pi(a), \pi(b): \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$. Далее, пусть $\wedge \mathfrak{A} = \bigoplus_{q \geq 0} \wedge^q \mathfrak{A}$ – внешняя алгебра линейного пространства $\mathfrak{A}$ и $\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}) = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{K})$ – линейное пространство всех *коцепей на $\mathfrak{A}$ с коэффициентами в $\mathfrak{K}$* , где $\mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{K})$ – линейные пространства всех линейных отображений из $\wedge^q \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{K}$ (другими словами, q -линейных кососимметрических отображений из $\mathfrak{A}^q = \times^q \mathfrak{A}$ в $\mathfrak{K}$), $q = 0, 1, \dots$. Если пространства $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{K}$ наделены топологиями (как это имеет место в нашем случае), то все операции предполагаются непрерывными. Каждая алгебра Ли $\mathfrak{A}$ имеет два естественных представления, а именно *тривиальное* и *присоединенное*. В первом случае $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\pi(a) = 0$ для всех $a \in \mathfrak{A}$, а во втором $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}$ и $(\pi(a))(b) = [a, b]$ для всех $a, b \in \mathfrak{A}$.

Внешний дифференциал d на $\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{K})$ задается правилом

$$(d\omega)(a_0, \dots, a_q) = \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \pi(a_i) (\omega(a_0, \dots, \check{a}_i, \dots, a_q)) + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \omega([a_i, a_j], a_0, \dots, \check{a}_i, \dots, \check{a}_j, \dots, a_q) \right\}$$

для всех $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{K})$ и $a_0, \dots, a_q \in \mathfrak{A}$ (аргумент под знаком “ $\cdot$ ” опускается), так что $d: \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}) \rightarrow \mathcal{C}^{q+1}(\mathfrak{A}; \mathfrak{K})$, $q = 0, 1, \dots$. В силу тождества Якоби и коммутаторного правила композиция $d \circ d = 0$, так что определен комплекс $\{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}); d\}$ с когомологиями

$$H(\{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}); d\}) = H(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}) = \bigoplus_{q \geq 0} H^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{K}).$$

В нашем случае $\mathfrak{A} = \mathcal{P}$ – алгебра Пуассона, и мы рассмотрим оба естественных представления.

1.3. Тривиальное представление. В этом случае $\mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathbb{C})$ — линейные пространства всех q -линейных кососимметрических непрерывных функционалов на $\mathcal{P}^q$, наделенные сильной топологией. В частности, q -коцепи суть обобщенные функции с компактными носителями (элементы из пространства $\mathcal{E}(V^q)^*$, дуального к пространству $\mathcal{E}(V^q)$), обладающие кососимметрией. Внешний дифференциал $d_{\mathbb{C}}$ на $\mathcal{C}(\mathcal{P}; \mathbb{C})$ действует по правилу

$$(d_{\mathbb{C}}\omega)(u_0, \dots, u_q) = \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \omega(\{u_i, u_j\}, u_0, \dots, \check{u}_i, \dots, \check{u}_j, \dots, u_q)$$

для всех $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathbb{C})$, $u_0, \dots, u_q \in \mathcal{P}$, $q = 0, 1, \dots$.

1.4. Присоединенное представление. В этом случае $\mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathcal{P})$ — линейные пространства всех q -линейных кососимметрических непрерывных отображений из $\mathcal{P}^q$ в $\mathcal{P}$, наделенные сильной топологией. В частности, q -коцепи суть $\mathcal{P}$ -значные обобщенные функции с компактными носителями, обладающие кососимметрией. Внешний дифференциал $d_{\mathcal{P}}$ на $\mathcal{C}(\mathcal{P}; \mathcal{P})$ действует по правилу

$$(d_{\mathcal{P}}\omega)(x; u_0, \dots, u_q) = \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \{u_i, \omega(u_0, \dots, \check{u}_i, \dots, u_q)\}(x) + \right. \\ \left. + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \omega(x; \{u_i, u_j\}, u_0, \dots, \check{u}_i, \dots, \check{u}_j, \dots, u_q) \right\}$$

для всех $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathcal{P})$, $x \in V$, $u_0, \dots, u_q \in \mathcal{P}$, $q = 0, 1, \dots$.

1.5. Экспоненциальное преобразование. Пусть $\mathbb{V} = V + iV$ и $\mathbb{V}^* = V^* + iV^*$ — комплексификации пространств V и V^* , соответственно. Каждому $\xi \in \mathbb{V}^*$ поставим в соответствие функцию $e^{\xi} \in \mathcal{E}(V)$, где $e^{\xi}(x) = e^{(\xi, x)}$ для всех $x \in V$, (ξ, x) — естественное спаривание ковектора и вектора, в координатах $(\xi, x) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} x^{\alpha}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $x = (x^1, \dots, x^m)$. Очевидно, $\{e^{\xi}, e^{\eta}\} = \langle \xi, \eta \rangle e^{\xi+\eta}$ для всех $\xi, \eta \in \mathbb{V}^*$, где $\langle \xi, \eta \rangle = (\xi \wedge \eta, \chi)$ — естественное спаривание биковектора и бивектора, в координатах

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{\alpha, \beta} \xi_{\alpha} \eta_{\beta} \chi^{\alpha\beta}.$$

Пусть $q = 0, 1, \dots$. Обозначим через $\text{Exp}((\mathbb{V}^*)^q)$ пространство всех целых функций экспоненциального типа на $(\mathbb{V}^*)^q \simeq \mathbb{C}^{mq}$. Преобразование Лапласа $\omega \mapsto L[\omega]$ определено формулой

$$L[\omega](\xi_1, \dots, \xi_q) = \omega(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_q}) \quad \forall \omega \in \mathcal{E}(V^q)^*, \quad \xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{V}^*.$$

Линейное отображение $L: \mathcal{E}(V^q)^* \rightarrow \text{Exp}((\mathbb{V}^*)^q)$ инъективное, его образ $L[\mathcal{E}(V^q)^*]$ состоит из всех целых функций на $(\mathbb{V}^*)^q$, растущих не быстрее линейной экспоненты в вещественных направлениях и не быстрее степени в мнимых направлениях. Линейное пространство $L[\mathcal{E}(V^q)^*]$ наделается топологией, индуцированной из $\mathcal{E}(V^q)^*$, так что определен изоморфизм линейных топологических пространств $L: \mathcal{E}(V^q)^* \simeq L[\mathcal{E}(V^q)^*]$ (см., например, [10]).

По построению пространство $\mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathbb{C})$ есть замкнутое подпространство в $\mathcal{E}(V^q)^*$. Надеясь образ $\Phi^q = L[\mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathbb{C})]$ топологией, индуцированной из $L[\mathcal{E}(V^q)^*]$, получаем изоморфизм линейных топологических пространств $L: \mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathbb{C}) \simeq \Phi^q$. Пространство Φ^q состоит из всех целых функций $\phi(\xi_1, \dots, \xi_q)$, растущих не быстрее линейной экспоненты в вещественных направлениях и не быстрее степени в мнимых направлениях и кососимметрических по аргументам $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{V}^*$. Оно наделено естественной топологией, конкретный вид которой для нас здесь не важен, мы лишь будем следить, явно об этом не упоминая, чтобы все вводимые операции были непрерывными. Положив $\Phi = \bigoplus_{q \geq 0} \Phi^q$, получим изоморфизм $L: \mathcal{C}(\mathcal{P}; \mathbb{C}) \simeq \Phi$. Внешний дифференциал $d_{\mathbb{C}}$ на $\mathcal{C}(\mathcal{P}; \mathbb{C})$ индуцирует одноименный внешний дифференциал $d_{\mathbb{C}}$ на Φ , действующий по правилу

$$(d_{\mathbb{C}}\phi)(\xi_0, \dots, \xi_q) = \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \langle \xi_i, \xi_j \rangle \phi(\xi_i + \xi_j, \xi_0, \dots, \check{\xi}_i, \dots, \check{\xi}_j, \dots, \xi_q)$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_0, \dots, \xi_q \in \mathbb{V}^*$, $q = 0, 1, \dots$.

Итак, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Определен комплекс $\{\Phi; d_{\mathbb{C}}\}$, причем имеет место изоморфизм комплексов*

$$L: \{\mathcal{C}(\mathcal{P}; \mathbb{C}); d_{\mathbb{C}}\} \simeq \{\Phi; d_{\mathbb{C}}\}. \quad (1.1)$$

Далее, для каждого $q = 0, 1, \dots$ линейное пространство $\mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathcal{P}) = \mathcal{P} \widehat{\otimes} \mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathbb{C})$, где символ $\widehat{\otimes}$ означает замыкание тензорного произведения в подходящей топологии. Отождествление $L \equiv \text{id}_{\mathcal{P}} \otimes L$ распространяет преобразование Лапласа на $\mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathcal{P})$ и приводит к изоморфизму $L: \mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathcal{P}) \simeq \mathcal{F}^q$, где $\mathcal{F}^q = \mathcal{P} \widehat{\otimes} \Phi^q$. Введем “подкрученное” преобразование $\Lambda: \mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathcal{P}) \simeq \mathcal{F}^q$ правилом

$$\Lambda[\omega](x; \xi_1, \dots, \xi_q) = \exp\left(-\sum_{1 \leq i \leq q} (\xi_i, x)\right) L[\omega](x; \xi_1, \dots, \xi_q)$$

для всех $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathcal{P}; \mathcal{P})$, $x \in V$, $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathbb{V}^*$. Таким образом, определен изоморфизм $\Lambda: \mathcal{C}(\mathcal{P}; \mathcal{P}) \simeq \mathcal{F}$, где $\mathcal{F} = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{F}^q$. Внешний дифференциал $d_{\mathcal{P}}$ на $\mathcal{C}(\mathcal{P}; \mathcal{P})$ индуцирует внешний дифференциал $d_{\mathcal{P}}$ на $\mathcal{F}$, действующий по правилу

$$(d_{\mathcal{P}}f)(x; \xi_0, \dots, \xi_q) = \frac{1}{q+1} \left\{ \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \left\langle \xi_i, \sum_{j \neq i} \xi_j + \partial_x \right\rangle f(x; \xi_0, \dots, \check{\xi}_i, \dots, \xi_q) + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \langle \xi_i, \xi_j \rangle f(x; \xi_i + \xi_j, \xi_0, \dots, \check{\xi}_i, \dots, \check{\xi}_j, \dots, \xi_q) \right\}$$

для всех $f \in \mathcal{F}^q$, $x \in V$, $\xi_0, \dots, \xi_q \in \mathbb{V}^*$, $q = 0, 1, \dots$.

Итак, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Определен комплекс $\{\mathcal{F}; d_{\mathcal{P}}\}$, причем имеет место изоморфизм комплексов*

$$\Lambda: \{\mathcal{C}(\mathcal{P}; \mathcal{P}); d_{\mathcal{P}}\} \simeq \{\mathcal{F}; d_{\mathcal{P}}\}. \quad (1.2)$$

2. ТРИВИАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В силу изоморфизма (1.1) достаточно изучить когомологии комплекса $\{\Phi; d_{\mathbb{C}}\}$.

2.1. Случай $q = 0$. По построению $\Phi^0 = \mathbb{C}$, причем $d_{\mathbb{C}}|_{\Phi^0} = 0$, так что

$$H^0(\mathcal{P}; \mathbb{C}) \simeq H^0(\{\Phi; d_{\mathbb{C}}\}) = \mathbb{C}.$$

2.2. Случай $q = 1$. Пусть $\phi \in \Phi^1$, тогда

$$(d_{\mathbb{C}}\phi)(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}\langle \xi, \eta \rangle \phi(\xi + \eta) \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{V}^*.$$

Очевидно, $d_{\mathbb{C}}\phi = 0$ тогда и только тогда, когда $\phi = 0$. Учитывая, что $d_{\mathbb{C}}|_{\Phi^0} = 0$, получаем

$$H^1(\mathcal{P}; \mathbb{C}) \simeq H^1(\{\Phi; d_{\mathbb{C}}\}) = 0.$$

2.3. Случай $q = 2$. Пусть $\phi \in \Phi^2$. Условие $d_{\mathbb{C}}\phi = 0$ имеет вид

$$\langle \xi, \eta \rangle \phi(\xi + \eta, \zeta) + \text{ц.п.} = 0 \quad (2.1)$$

для всех $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{V}^*$, где сокращение “ц.п.” означает циклическую перестановку по аргументам $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{V}^*$. В частности, $\langle \xi, \eta \rangle \phi(\xi + \eta, \zeta) = 0$ при всех $\langle \xi, \zeta \rangle = \langle \eta, \zeta \rangle = 0$. Следовательно, и $\phi(\xi, \zeta) = 0$ при всех $\langle \xi, \zeta \rangle = 0$, откуда $\phi(\xi, \zeta) = \langle \xi, \zeta \rangle \psi(\xi, \zeta)$, где $\psi(\xi, \zeta)$ — целая функция, с оценками роста того же типа, что и у функции $\phi(\xi, \zeta)$, причем $\psi(\xi, \zeta) = \psi(\zeta, \xi)$ для всех $\xi, \zeta \in \mathbb{V}^*$. Подставляя это представление в (2.1), получаем

$$\langle \xi, \eta \rangle \langle \xi + \eta, \zeta \rangle \psi(\xi + \eta, \zeta) + \text{ц.п.} = 0,$$

иначе

$$\langle \xi, \eta \rangle \langle \xi, \zeta \rangle \Delta\psi(\xi, \eta, \zeta) + \text{ц.п.} = 0, \quad (2.2)$$

где $\Delta\psi(\xi, \eta, \zeta) = \psi(\xi + \eta, \zeta) - \psi(\xi + \zeta, \eta)$, для всех $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{V}^*$. Легко проверяется тождество

$$\Delta\psi(\xi, \eta, \zeta) + \text{ц.п.} = 0 \quad (2.3)$$

для всех $\psi(\xi, \eta)$ и $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{V}^*$, так что $\Delta\psi(\zeta, \xi, \eta) = -\Delta\psi(\xi, \eta, \zeta) - \Delta\psi(\eta, \zeta, \xi)$. Подставляя последнее равенство в (2.2), получаем

$$(\langle \xi, \eta \rangle \langle \xi, \zeta \rangle - \langle \zeta, \xi \rangle \langle \zeta, \eta \rangle) \Delta\psi(\xi, \eta, \zeta) + (\langle \eta, \xi \rangle \langle \eta, \zeta \rangle - \langle \zeta, \xi \rangle \langle \zeta, \eta \rangle) \Delta\psi(\eta, \zeta, \xi) = 0,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \xi, \zeta \rangle \langle \xi + \zeta, \eta \rangle \Delta\psi(\xi, \eta, \zeta) &= \langle \zeta, \eta \rangle \langle \eta + \zeta, \xi \rangle \Delta\psi(\eta, \zeta, \xi) = \\ &= \langle \xi, \zeta \rangle \langle \zeta, \eta \rangle \langle \xi + \zeta, \eta \rangle \langle \eta + \zeta, \xi \rangle g(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned}$$

где $g(\xi, \eta, \zeta)$ — некоторая целая функция. Отсюда

$$\Delta\psi(\xi, \eta, \zeta) = \psi(\xi + \eta, \zeta) - \psi(\xi + \zeta, \eta) = \langle \zeta, \eta \rangle \langle \eta + \zeta, \xi \rangle g(\xi, \eta, \zeta).$$

Полагая в этом представлении $\eta = 0$, получаем

$$\psi(\xi, \zeta) = -\frac{1}{2}\rho(\xi + \zeta) \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{V}^*,$$

где $\rho(\xi) = -2\psi(\xi, 0) \in \Phi^1$. Другими словами, $\phi = d_{\mathbb{C}}\rho$ и, значит,

$$H^2(\mathcal{P}; \mathbb{C}) \simeq H^2(\{\Phi; d_{\mathbb{C}}\}) = 0.$$

2.4. Обсуждение. Равенство $H^0(\mathcal{P}; \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ специальной информации об алгебре Пуассона не несет, поскольку аналогичное равенство справедливо для всех алгебр Ли и отражает лишь билинейность скобки Ли. Равенство $H^1(\mathcal{P}; \mathbb{C}) = 0$ эквивалентно известному соотношению $\{\mathcal{P}; \mathcal{P}\} = \mathcal{P}$ и отражает полноту скобок Пуассона. Наконец, равенство $H^2(\mathcal{P}; \mathbb{C}) = 0$ означает, что с точки зрения алгебр Ли алгебра Пуассона не имеет нетривиальных одномерных центральных расширений.

3. ПРИСОЕДИНЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В силу изоморфизма $\Lambda: \{\mathcal{C}(\mathcal{P}; \mathcal{P}); d_{\mathcal{P}}\} \simeq \{\mathcal{F}; d_{\mathcal{P}}\}$ достаточно изучить когомологии комплекса $\{\mathcal{F}; d_{\mathcal{P}}\}$. Заметим, что отождествление $\Phi \equiv 1_{\mathcal{P}} \otimes \Phi$, где $1_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$, $1_{\mathcal{P}}(x) \equiv 1$, определяет вложение $\Phi \in \mathcal{F}$. С другой стороны, всякое линейное отображение $A: \Phi \rightarrow \Phi$ распространяется на $\mathcal{F}$ отождествлением $A \equiv \text{id}_{\mathcal{P}} \otimes A: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

3.1. Внешний дифференциал. Прежде всего разобьем внешний дифференциал $d_{\mathcal{P}}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ на два естественных слагаемых: $d_{\mathcal{P}} = \delta + \nabla$. Отображение $\delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ определено правилом

$$(\delta f)(x; \xi_0, \dots, \xi_q) = \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \langle \xi_i, \partial_x \rangle f(x; \xi_0, \dots, \check{\xi}_i, \dots, \xi_q) \quad (3.1)$$

для всех $f \in \mathcal{F}^q$, $x \in V$, $\xi_0, \dots, \xi_q \in \mathbb{V}^*$, $q = 0, 1, \dots$. В свою очередь, отображение $\nabla: \Phi \rightarrow \Phi$ действует по формуле

$$\begin{aligned} (\nabla \phi)(\xi_0, \dots, \xi_q) = \\ = \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} \langle \xi_i, \xi_j \rangle (\nabla_{\xi_i \xi_j} \phi)(\xi_0, \dots, \check{\xi}_i, \dots, \check{\xi}_j, \dots, \xi_q) \end{aligned} \quad (3.2)$$

для всех $\phi \in \Phi^q$, $\xi_0, \dots, \xi_q \in \mathbb{V}^*$, $q = 0, 1, \dots$, где

$$(\nabla_{\xi \eta} \phi)(\zeta_1, \dots, \zeta_{q-1}) = \phi(\xi + \eta, \zeta_1, \dots, \zeta_{q-1}) - \phi(\xi, \zeta_1, \dots, \zeta_{q-1}) - \phi(\eta, \zeta_1, \dots, \zeta_{q-1})$$

для всех $\xi, \eta, \zeta_1, \dots, \zeta_{q-1} \in \mathbb{V}^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Линейные отображения $\delta, \nabla: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ обладают свойствами*

$$\delta \circ \delta = 0, \quad \delta \circ \nabla + \nabla \circ \delta = 0, \quad \nabla \circ \nabla = 0. \quad (3.3)$$

В частности, δ и ∇ – внешние дифференциалы на $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямыми вычислениями.

3.2. Вспомогательные операции. Линейное отображение $\iota: \Phi \rightarrow \Phi$, $\Phi^q \ni \phi \mapsto \iota\phi \in \Phi^{q-1}$, зададим правилом

$$(\iota\phi)(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}) = q\phi(0, \xi_1, \dots, \xi_{q-1})$$

для всех $\xi_1, \dots, \xi_{q-1} \in \mathbb{V}^*$, $q = 0, 1, \dots$. Легко проверить, что

$$d\mathcal{P} \circ \iota + \iota \circ d\mathcal{P} = 0. \quad (3.4)$$

Далее, каждой паре $f \in \mathcal{F}^p$, $g \in \mathcal{F}^q$ поставим в соответствие внешнее произведение $f \wedge g \in \mathcal{F}^{p+q}$, определяемое равенством

$$\begin{aligned} (f \wedge g)(x; \xi_1, \dots, \xi_{p+q}) &= \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \text{sign } \sigma f(x; \xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) g(x; \xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

для всех $x \in V$, $\xi_1, \dots, \xi_{p+q} \in \mathbb{V}^*$, где $\text{sign } \sigma$ — знак перестановки σ индексов $\{1, \dots, p+q\}$. В частности, для $p = 0, 1, 2$ имеем соответственно

$$\begin{aligned} (f \wedge g)(x; \xi_1, \dots, \xi_q) &= f(x)g(x; \xi_1, \dots, \xi_q), \\ (f \wedge g)(x; \xi_0, \dots, \xi_q) &= \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i f(x; \xi_i) g(x; \xi_0, \dots, \check{\xi}_i, \dots, \xi_q), \\ (f \wedge g)(x; \xi_0, \dots, \xi_{q+1}) &= \frac{2}{(q+1)(q+2)} \sum_{0 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j-1} f(x; \xi_i, \xi_j) \times \\ &\quad \times g(x; \xi_0, \dots, \check{\xi}_i, \dots, \check{\xi}_j, \dots, \xi_{q+1}). \end{aligned}$$

Билинейная операция $\wedge$ задает в линейном пространстве $\mathcal{F}$ структуру внешней алгебры, а линейные отображения ι, δ, ∇ суть внешние дифференцирования этой алгебры. Именно,

$$\begin{aligned} \iota(f \wedge g) &= (\iota f) \wedge g + (-1)^p f \wedge (\iota g), \\ \delta(f \wedge g) &= (\delta f) \wedge g + (-1)^p f \wedge (\delta g), \\ \nabla(f \wedge g) &= (\nabla f) \wedge g + (-1)^p f \wedge (\nabla g) \end{aligned} \quad (3.5)$$

для всех $f \in \mathcal{F}^p$, $g \in \mathcal{F}^q$.

Каждый элемент $u \in \mathcal{F}^p$ задает линейное отображение $\hat{u}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $\mathcal{F}^q \ni f \mapsto \hat{u}f = u \wedge f \in \mathcal{F}^{q+p}$. В частности, для $e \in \mathcal{F}^1$, $e(x; \xi) = 1 - (\xi, x)/2$, где $x \in V$, $\xi \in \mathbb{V}^*$, $(\xi, x) = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} x^{\alpha}$, имеем

$$\iota \circ \iota = 0, \quad \iota \circ \hat{e} + \hat{e} \circ \iota = \text{id}, \quad \hat{e} \circ \hat{e} = 0, \quad (3.6)$$

$$d\mathcal{P} \circ \hat{e} + \hat{e} \circ d\mathcal{P} = 0, \quad (3.7)$$

поскольку $\iota e = 1 \in \mathcal{F}^0$ ($1(x) \equiv 1$) и $d\mathcal{P}e = 0$.

3.3. Расщепление комплекса $\{\mathcal{F}; d_{\mathcal{P}}\}$. Положим $\text{pr}_\iota = \iota \circ \hat{e}$ и $\text{pr}_e = \hat{e} \circ \iota$. В силу равенств (3.6) имеем $\text{pr}_\iota \circ \text{pr}_\iota = \text{pr}_\iota$, $\text{pr}_e \circ \text{pr}_e = \text{pr}_e$, причем $\text{pr}_\iota + \text{pr}_e = \text{id}$. Другими словами, проекторы pr_ι и pr_e разлагают пространство $\mathcal{F}$ в прямую сумму двух подпространств. Первое подпространство $\mathcal{F}_\iota = \text{pr}_\iota \mathcal{F} = \ker \iota = \{f \in \mathcal{F} : \iota f = 0\}$, а второе $\mathcal{F}_e = \text{pr}_e \mathcal{F} = \ker \hat{e} = \{f \in \mathcal{F} : \hat{e} f = 0\}$ в силу тех же равенств (3.6). Итак, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\iota \oplus \mathcal{F}_e$, причем в силу равенств (3.4) и (3.7) имеем

$$d_{\mathcal{P}}: \mathcal{F}_\iota \rightarrow \mathcal{F}_\iota, \quad d_{\mathcal{P}}: \mathcal{F}_e \rightarrow \mathcal{F}_e,$$

так что определены подкомплексы $\{\mathcal{F}_\iota; d_{\mathcal{P}}\}$ и $\{\mathcal{F}_e; d_{\mathcal{P}}\}$. Из приведенных рассуждений следует, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Имеет место расщепление*

$$H^q(\{\mathcal{F}; d_{\mathcal{P}}\}) = H^q(\{\mathcal{F}_\iota; d_{\mathcal{P}}\}) \oplus H^q(\{\mathcal{F}_e; d_{\mathcal{P}}\}), \quad q = 0, 1, \dots$$

Далее, из равенств (3.6) следует, что

$$\hat{e}: \mathcal{F}_\iota^q \simeq \mathcal{F}_e^{q+1}, \quad \iota: \mathcal{F}_e^q \simeq \mathcal{F}_\iota^{q-1}, \quad q = 0, 1, \dots,$$

причем эти изоморфизмы взаимно обратные, например $\mathcal{F}_\iota^q = \mathcal{F}_\iota \cap \mathcal{F}^q = \{f \in \mathcal{F}^q : \iota f = 0\}$. Учитывая равенства (3.4) и (3.7), приходим к выводу, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Имеют место изоморфизмы*

$$H^q(\{\mathcal{F}_\iota; d_{\mathcal{P}}\}) \simeq H^{q+1}(\{\mathcal{F}_e; d_{\mathcal{P}}\}), \quad H^q(\{\mathcal{F}_e; d_{\mathcal{P}}\}) \simeq H^{q-1}(\{\mathcal{F}_\iota; d_{\mathcal{P}}\}),$$

$q = 0, 1, \dots$, индуцированные изоморфизмами $\hat{e}$ и ι .

Таким образом, достаточно знать когомологии хотя бы одного из комплексов $\{\mathcal{F}_\iota; d_{\mathcal{P}}\}$, $\{\mathcal{F}_e; d_{\mathcal{P}}\}$. Например, в терминах первого комплекса имеем

$$H^q(\{\mathcal{F}; d_{\mathcal{P}}\}) \simeq H^q(\{\mathcal{F}_\iota; d_{\mathcal{P}}\}) \times H^{q-1}(\{\mathcal{F}_\iota; d_{\mathcal{P}}\}), \quad q = 0, 1, \dots, \quad (3.8)$$

где $H^{-1}(\{\mathcal{F}_\iota; d_{\mathcal{P}}\}) = 0$ (так же как и $\mathcal{F}^{-1}$).

3.4. Дополнительные операции. Выберем на V и $\mathbb{V}^*$ согласованные системы координат. Обозначим через $\{\Omega; d_x\}$ комплекс де Рама гладких дифференциальных форм на V , где $\Omega = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p$,

$$\Omega^p = \left\{ \omega = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}; \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \in \mathcal{E}(V) = \mathcal{P} \right\},$$

а внешний дифференциал $d_x: \Omega \rightarrow \Omega$, $\Omega^p \ni \omega \mapsto d_x \omega \in \Omega^{p+1}$, действует по формуле

$$d_x \omega = \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} \partial_{x[\alpha_0} \omega_{\alpha_1, \dots, \alpha_p]} dx^{\alpha_0} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}$$

для всех $p = 0, 1, \dots$, где $[\dots]$ обозначает кососимметризацию по индексам, находящимся внутри квадратных скобок. В силу известной леммы Пуанкаре получаем, что когомологии $H^0(\{\Omega; d_x\}) = \mathbb{C}$, $H^p(\{\Omega; d_x\}) = 0$, $p = 1, 2, \dots$.

Введем биградуированное линейное пространство $\Omega\Phi = \bigoplus_{p,q \geq 0} \Omega^p \Phi^q$, где $\Omega^p \Phi^q = \Omega^p \widehat{\otimes} \Phi^q$, в частности $\Omega^0 \Phi^q = \mathcal{F}^q$. Всякое линейное отображение $X: \Omega \rightarrow \Omega$ распространяется на $\Omega\Phi$ отождествлением $X \equiv X \otimes \text{id}_\Phi$, а всякое линейное отображение $A: \Phi \rightarrow \Phi$ распространяется на $\Omega\Phi$ отождествлением $A \equiv \text{id}_\Omega \otimes A$. Очевидно, отображения первого и второго типов всегда коммутируют. Введенное выше отображение $\delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ распространяется на $\Omega\Phi$ формулой

$$\delta\omega = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_p} \delta\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}$$

для каждого $\omega \in \Omega^p \Phi^q$ (заметим, что коэффициенты $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \in \mathcal{F}^q$ для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \overline{1, m}$). Для каждого $\alpha \in \overline{1, m}$ определим линейное отображение $\kappa_\alpha: \Phi \rightarrow \Phi$, $\Phi^q \ni \phi \mapsto \kappa_\alpha \phi \in \Phi^{q-1}$, правилом

$$(\kappa_\alpha \phi)(\xi_1, \dots, \xi_{q-1}) = q \partial_{\xi^\alpha} \phi(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{q-1})|_{\xi=0}$$

для всех $\xi_1, \dots, \xi_{q-1} \in \mathbb{V}^*$ (поясним, что $\xi^\alpha = \sum_\beta \xi_\beta \chi^{\beta\alpha}$, $\xi_\alpha = \sum_\beta \xi^\beta \chi_{\beta\alpha}$). Линейное отображение $\kappa: \Omega\Phi \rightarrow \Omega\Phi$, $\Omega^p \Phi^q \ni \omega \mapsto \kappa\omega \in \Omega^{p+1} \Phi^{q-1}$, зададим формулой

$$\kappa\omega = \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} \kappa_{[\alpha_0} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} dx^{\alpha_0} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}.$$

Для каждого $\alpha \in \overline{1, m}$ определена координатная функция $\xi_\alpha \in \Phi^1$. Как показано в п. 3.2, ей отвечает линейное отображение $\widehat{\xi_\alpha}: \Phi \rightarrow \Phi$, $\Phi^q \ni \phi \mapsto \widehat{\xi_\alpha} \phi \in \Phi^{q+1}$, где

$$(\widehat{\xi_\alpha} \phi)(\xi_0, \dots, \xi_q) = \frac{1}{q+1} \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \xi_{i\alpha} \phi(\xi_0, \dots, \check{\xi}_i, \dots, \xi_q).$$

В частности, определено линейное отображение $\hat{\xi}: \Omega\Phi \rightarrow \Omega\Phi$, действующее по правилу $\Omega^p \Phi^q \ni \omega \mapsto \hat{\xi}\omega \in \Omega^{p+1} \Phi^{q+1}$, где

$$\hat{\xi}\omega = \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} \widehat{\xi_{[\alpha_0}} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} dx^{\alpha_0} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Имеют место равенства*

- 1) $\kappa_\alpha \circ \kappa_\beta + \kappa_\beta \circ \kappa_\alpha = 0$ для всех $\alpha, \beta \in \overline{1, m}$;
- 2) $\kappa \circ \iota + \iota \circ \kappa = 0$;
- 3) $\kappa \circ \delta + \delta \circ \kappa = d_x$, $\kappa \circ \nabla + \nabla \circ \kappa = \hat{\xi} \circ \iota$;
- 4) $\kappa \circ d_x + d_x \circ \kappa = 0$;
- 5) $\widehat{\xi_\alpha} \circ \widehat{\xi_\beta} + \widehat{\xi_\beta} \circ \widehat{\xi_\alpha} = 0$ для всех $\alpha, \beta \in \overline{1, m}$;
- 6) $\widehat{\xi_\alpha} \circ \iota + \iota \circ \widehat{\xi_\alpha} = 0$ для всех $\alpha \in \overline{1, m}$;
- 7) $\widehat{\xi_\alpha} \circ \nabla + \nabla \circ \widehat{\xi_\alpha} = 0$ для всех $\alpha \in \overline{1, m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямыми вычислениями.

3.5. Изучение комплекса $\{\mathcal{F}_l; d_{\mathcal{P}}\}$. По построению пространства $\Omega^p \Phi^q$, $p, q = 0, 1, \dots$, состоят из p -форм $\omega = \sum \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}$ с коэффициентами $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \in \mathcal{F}^q$. Обозначим через $\Omega^p \Phi_l^q$, $\Omega_{\mathbb{C}}^p \Phi^q$, $\Omega_{\mathbb{C}}^p \Phi_l^q = \Omega_{\mathbb{C}}^p \Phi^q \cap \Omega^p \Phi_l^q$ их подпространства, состоящие из всех p -форм с коэффициентами $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \in \mathcal{F}_l^q$, Φ^q , $\Phi_l^q = \mathcal{F}_l^q \cap \Phi^q$, соответственно. В частности, $\Omega^0 \Phi_l^q = \mathcal{F}_l^q$, $\Phi_l^q = \{\omega \in \mathcal{F}_l^q : d_x \omega = 0\}$.

Положим $\kappa^1 = \kappa$, $\kappa^2 = \kappa \circ \kappa$, $\dots$, так что $\kappa^r : \Omega^p \Phi^q \rightarrow \Omega^{p+r} \Phi^{q-r}$.

ЛЕММА 1. Пусть $\omega \in \Omega^p \Phi_l^q$, $d_{\mathcal{P}} \omega = 0$. Тогда

$$d_{\mathcal{P}} \kappa^r \omega = r d_x \kappa^{r-1} \omega \quad \forall r = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $r = 1$ равенство $d_{\mathcal{P}} \kappa \omega = d_x \omega$ следует из п. 3 предложения 6. По индукции предположим, что $d_{\mathcal{P}} \kappa^r \omega = r d_x \kappa^{r-1} \omega$. Тогда для $r + 1$ в силу тех же формул п. 3 с учетом п. 4 предложения 6 получим

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{P}} \kappa^{r+1} \omega &= -\kappa d_{\mathcal{P}} \kappa^r \omega + d_x \kappa^r \omega = -r \kappa d_x \kappa^{r-1} \omega + d_x \kappa^r \omega = \\ &= r d_x \kappa^r \omega + d_x \kappa^r \omega = (r+1) d_x \kappa^r \omega, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. Пусть $\omega \in \Omega^p \Phi_l^q$. Равенство $d_{\mathcal{P}} \omega = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо представление

$$\omega = \begin{cases} d_{\mathcal{P}} g + \phi, & p = 0, \\ d_{\mathcal{P}} \rho + d_x \sigma, & p > 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

с некоторыми $g \in \mathcal{F}_l^{q-1}$, $\phi \in \Phi_l^q$, $\rho \in \Omega^{p-1} \Phi_l^{q-1}$, $\sigma \in \Omega^{p-1} \Phi_l^q$, где $\nabla \phi = 0$, $d_x d_{\mathcal{P}} \sigma = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega \in \Omega^p \Phi_l^q$ и $d_{\mathcal{P}} \omega = 0$. Положив в предыдущей лемме $r = q + 1$, получим $d_x \kappa^q \omega = 0$, поскольку $\Omega^{p+q+1} \Phi^{-1} = 0$. В силу леммы Пуанкаре отсюда следует, что $\kappa^q \omega = d_x \omega^{(0)}$ для некоторого $\omega^{(0)} \in \Omega^{p+q-1} \Phi_l^0$ (заметим, что $\kappa^q \omega \in \Omega^{p+q} \Phi_l^0$). Полагая теперь в равенстве (3.9) $r = q$, получим $d_{\mathcal{P}} \kappa^q \omega = d_{\mathcal{P}} d_x \omega^{(0)} = q \times d_x \kappa^{q-1} \omega$. Таким образом, $d_x (\kappa^{q-1} \omega - q^{-1} d_{\mathcal{P}} \omega^{(0)}) = 0$, поскольку отображения d_x и $d_{\mathcal{P}}$ коммутируют. Опять в силу леммы Пуанкаре имеем $\kappa^{q-1} \omega = d_x \omega^{(1)} + (1/q) d_{\mathcal{P}} \omega^{(0)}$, где $\omega^{(1)} \in \Omega^{p+q-2} \Phi_l^1$. Равенство (3.9) теперь дает $d_{\mathcal{P}} \kappa^{q-1} \omega = d_{\mathcal{P}} d_x \omega^{(1)} = d_x \kappa^{q-2} \omega$. Продолжая в том же духе, на q -м шаге получим $\kappa^1 \omega = d_x \omega^{(q-1)} + 2^{-1} d_{\mathcal{P}} \omega^{(q-2)}$, где $\omega^{(q-1)} \in \Omega^p \Phi_l^{q-1}$. Равенство (3.9) на этом шаге дает $d_{\mathcal{P}} \kappa^1 \omega = d_{\mathcal{P}} d_x \omega^{(q-1)} = d_x \omega$, откуда $d_x (\omega - d_{\mathcal{P}} \omega^{(q-1)}) = 0$. Если $p = 0$, то лемма Пуанкаре дает $\omega = d_{\mathcal{P}} \omega^{(q-1)} + \phi$, где $\omega^{(q-1)} = g \in \mathcal{F}_l^{q-1}$, $\phi \in \Phi_l^q$, причем $\nabla \phi = d_{\mathcal{P}} \phi = d_{\mathcal{P}} (\omega - d_{\mathcal{P}} g) = 0$. Если же $p > 0$, то лемма Пуанкаре дает $\omega = d_{\mathcal{P}} \omega^{(q-1)} + d_x \omega^{(q)}$, где $\omega^{(q-1)} = \rho \in \Omega^{p-1} \Phi_l^{q-1}$, $\omega^{(q)} = \sigma \in \Omega^{p-1} \Phi_l^q$, причем $d_x d_{\mathcal{P}} \sigma = d_{\mathcal{P}} (\omega - d_{\mathcal{P}} \rho) = 0$.

Обратное утверждение очевидно.

Доказанная лемма имеет следующее усиление.

ЛЕММА 3. Пусть $\omega \in \Omega^p \Phi_\ell^q$. Равенство $d_{\mathcal{P}}\omega = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда справедливо представление

$$\omega = d_{\mathcal{P}}\rho + \tau, \quad \rho \in \Omega^p \Phi_\ell^{q-1}, \quad \tau \in \Omega_{\mathbb{C}}^p \Phi_\ell^q, \quad \nabla\tau = 0. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\omega = \sum \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \in \Omega^p \Phi_\ell^q, \quad d_{\mathcal{P}}\omega = 0,$$

тогда каждый коэффициент $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \in \mathcal{F}_\ell^q = \Omega^0 \Phi_\ell^q$, причем $d_{\mathcal{P}}\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = 0$. В силу предыдущей леммы ($p = 0$) имеем $\omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = d_{\mathcal{P}}\rho_{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \tau_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$, где $\rho_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \in \mathcal{F}_\ell^{q-1}$, $\tau_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \in \Phi_\ell^q$, $\nabla\tau_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = 0$, причем без ограничения общности коэффициенты $\rho_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ и $\tau_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ можно считать кососимметрическими по индексам $\alpha_1, \dots, \alpha_p$. Положив

$$\rho = \sum \rho_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}, \quad \tau = \sum \tau_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p},$$

получим формы с требуемыми свойствами. Обратное утверждение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $\omega = \sum \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \in \Omega_{\mathbb{C}}^p \Phi_\ell^q$. Положим $(x, \omega) = \sum x^{\alpha_1} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}$, $\langle \hat{\xi}, \omega \rangle = \sum \widehat{\xi^{\alpha_1}} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p} dx^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p}$, тогда $d_x(x, \omega) = \omega$ и $\delta(x, \omega) = \langle \hat{\xi}, \omega \rangle$. Если, кроме того, $\nabla\omega = 0$, то $\nabla(x, \omega) = 0$ и $\nabla\langle \hat{\xi}, \omega \rangle = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямыми вычислениями с использованием п. 7 предложения 6.

ЛЕММА 4. Пусть $\phi \in \Phi_\ell^q$. Равенство $\phi = d_{\mathcal{P}}g$ с некоторым $g \in \mathcal{F}_\ell^{q-1}$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\phi = (\hat{\xi}, \psi) + \nabla\varphi, \quad \psi \in \mathbb{V} \otimes \Phi_\ell^{q-1}, \quad \nabla\psi = 0, \quad \varphi \in \Phi_\ell^{q-1} \quad (3.12)$$

(подробнее, $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$, $\psi^\alpha \in \Phi_\ell^{q-1}$, $\nabla\psi^\alpha = 0$, $(\hat{\xi}, \psi) = \sum_\alpha \widehat{\xi^\alpha} \psi^\alpha$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\phi = \phi^{(0)} \in \Phi_\ell^q$, $\phi = d_{\mathcal{P}}g$, где $g = g^{(0)} \in \mathcal{F}_\ell^{q-1}$. В частности, $d_x\phi^{(0)} = 0$, откуда $d_{\mathcal{P}}d_xg^{(0)} = d_xd_{\mathcal{P}}g^{(0)} = 0$, так что в силу представления (3.11) имеем $d_xg^{(0)} = \phi^{(1)} + d_{\mathcal{P}}g^{(1)}$, где $\phi^{(1)} \in \Omega_{\mathbb{C}}^1 \Phi_\ell^{q-1}$, $\nabla\phi^{(1)} = 0$, $g^{(1)} \in \Omega^1 \Phi_\ell^{q-2}$. Далее,

$$d_{\mathcal{P}}d_xg^{(1)} = d_xd_{\mathcal{P}}g^{(1)} = d_x(d_xg^{(0)} - \phi^{(1)}) = 0,$$

откуда, опять в силу представления (3.11), имеем $d_xg^{(1)} = \phi^{(2)} + d_{\mathcal{P}}g^{(2)}$, где $\phi^{(2)} \in \Omega_{\mathbb{C}}^2 \Phi_\ell^{q-2}$, $\nabla\phi^{(2)} = 0$, $g^{(2)} \in \Omega^2 \Phi_\ell^{q-3}$, и т.д. На очередном шаге получим $d_xg^{(q-1)} = \phi^{(q)} + d_{\mathcal{P}}g^{(q)}$, где $\phi^{(q)} \in \Omega_{\mathbb{C}}^q \Phi_\ell^0$, $\nabla\phi^{(q)} = 0$, $g^{(q)} \in \Omega^q \Phi_\ell^{-1} = 0$. Итак, $d_xg^{(q-1)} = \phi^{(q)} = d_x(x, \phi^{(q)})$ в силу предложения 7, так что $d_x(g^{(q-1)} - (x, \phi^{(q)})) = 0$, и в силу леммы Пуанкаре имеем $g^{(q-1)} = (x, \phi^{(q)}) + d_xh^{(q-2)}$, где $h^{(q-2)} \in \Omega^{q-2} \Phi_\ell^0$. Далее,

$$d_{\mathcal{P}}g^{(q-1)} = \delta(x, \phi^{(q)}) + d_{\mathcal{P}}d_xh^{(q-2)} = \langle \hat{\xi}, \phi^{(q)} \rangle + d_xd_{\mathcal{P}}h^{(q-2)}$$

в силу предложения 7, откуда

$$\begin{aligned} d_x g^{(q-2)} &= \phi^{(q-1)} + d_{\mathcal{P}} g^{(q-1)} = \phi^{(q-1)} + \langle \hat{\xi}, \phi^{(q)} \rangle + d_x d_{\mathcal{P}} h^{(q-2)} = \\ &= d_x ((x, \tilde{\phi}^{(q-1)}) + d_{\mathcal{P}} h^{(q-2)}), \end{aligned}$$

где $\tilde{\phi}^{(q-1)} = \phi^{(q-1)} + \langle \hat{\xi}, \phi^{(q)} \rangle \in \Omega_{\mathbb{C}}^{q-1} \Phi_{\ell}^1$, $\nabla \tilde{\phi}^{(q-1)} = 0$. Отсюда

$$g^{(q-2)} = (x, \tilde{\phi}^{(q-1)}) + d_{\mathcal{P}} h^{(q-2)} + d_x h^{(q-3)},$$

где $h^{(q-3)} \in \Omega^{q-3} \Phi_{\ell}^1$, так что

$$d_{\mathcal{P}} g^{(q-2)} = \delta(x, \tilde{\phi}^{(q-1)}) + d_{\mathcal{P}} d_x h^{(q-3)} = \langle \hat{\xi}, \tilde{\phi}^{(q-1)} \rangle + d_x d_{\mathcal{P}} h^{(q-3)}$$

и, значит,

$$d_x g^{(q-3)} = \phi^{(q-2)} + \langle \hat{\xi}, \tilde{\phi}^{(q-1)} \rangle + d_x d_{\mathcal{P}} h^{(q-3)} = d_x ((x, \tilde{\phi}^{(q-2)}) + d_{\mathcal{P}} h^{(q-3)}),$$

где $\tilde{\phi}^{(q-2)} \in \Omega_{\mathbb{C}}^{q-2} \Phi_{\ell}^2$, $\nabla \tilde{\phi}^{(q-2)} = 0$. Продолжая в том же духе, на очередном шаге получим $g^{(2)} = (x, \tilde{\phi}^{(3)}) + d_{\mathcal{P}} h^{(2)} + d_x h^{(1)} \in \Omega^2 \Phi_{\ell}^{q-3}$, где $h^{(1)} \in \Omega^1 \Phi_{\ell}^{q-3}$, $h^{(2)} \in \Omega^2 \Phi_{\ell}^{q-4}$, $\tilde{\phi}^{(3)} \in \Omega_{\mathbb{C}}^3 \Phi^{q-3}$, $\nabla \tilde{\phi}^{(3)} = 0$. Далее, $d_{\mathcal{P}} g^{(2)} = \langle \hat{\xi}, \tilde{\phi}^{(3)} \rangle + d_x d_{\mathcal{P}} h^{(1)}$, затем

$$d_x g^{(1)} = \phi^{(2)} + \langle \hat{\xi}, \tilde{\phi}^{(3)} \rangle + d_x d_{\mathcal{P}} h^{(1)} = d_x ((x, \tilde{\phi}^{(2)}) + d_{\mathcal{P}} h^{(1)}),$$

откуда $g^{(1)} = (x, \tilde{\phi}^{(2)}) + d_{\mathcal{P}} h^{(1)} + d_x h^{(0)}$, где $\tilde{\phi}^{(2)} \in \Omega_{\mathbb{C}}^2 \Phi^{q-2}$, $\nabla \tilde{\phi}^{(2)} = 0$, $h^{(0)} \in \Omega^0 \Phi_{\ell}^{q-2} = \mathcal{F}_{\ell}^{q-2}$, поэтому $d_{\mathcal{P}} g^{(1)} = \langle \hat{\xi}, \tilde{\phi}^{(2)} \rangle + d_x d_{\mathcal{P}} h^{(0)}$. Таким образом,

$$d_x g^{(0)} = \phi^{(1)} + \langle \hat{\xi}, \tilde{\phi}^{(2)} \rangle + d_x d_{\mathcal{P}} h^{(0)} = d_x ((x, \tilde{\phi}^{(1)}) + d_{\mathcal{P}} h^{(0)}),$$

где

$$\tilde{\phi}^{(1)} = \sum_{\alpha} \tilde{\psi}_{\alpha} dx^{\alpha} \in \Omega_{\mathbb{C}}^1 \Phi_{\ell}^{q-1}, \quad \nabla \tilde{\psi}_{\alpha} = 0, \quad \alpha \in \overline{1, m},$$

так что $g^{(0)} = (x, \tilde{\phi}^{(1)}) + d_{\mathcal{P}} h^{(0)} + \varphi$, $\varphi \in \Omega_{\mathbb{C}}^0 \Phi_{\ell}^{q-1} = \Phi_{\ell}^{q-1}$ и, значит, $\phi = \sum_{\alpha} \widehat{\xi}_{\alpha} \psi^{\alpha} + \nabla \varphi$, где

$$\psi^{\alpha} = \sum_{\beta} \chi^{\alpha\beta} \tilde{\psi}_{\beta} \in \Phi_{\ell}^{q-1}, \quad \nabla \psi^{\alpha} = 0, \quad \alpha \in \overline{1, m}.$$

Обратное утверждение очевидно.

Для $p, q = 0, 1, \dots$ положим

$$\Phi_{\ell}^{p,q} = \{\phi \in \Phi_{\ell}^q : \phi(t\xi_1, \dots, t\xi_q) = t^p \phi(\xi_1, \dots, \xi_q) \text{ для всех } t > 0\}.$$

В частности, $\Phi_{\ell}^{0,0} = \Phi_{\ell}^0 = \Phi^0 = \mathbb{C}$, а при $q \geq 1$ имеем

$$\Phi_{\ell}^{q,q} = \{\phi(\xi_1, \dots, \xi_q) = (\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_q, c); c \in \wedge^q \mathbb{V}\} \simeq \wedge^q \mathbb{V}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\phi \in \Phi_\ell^{q,q}$, $q \geq 1$, тогда $\nabla\phi = 0$ и $\phi = (\hat{\xi}, \psi)$, где $\psi = (\psi^\alpha) \in \mathbb{V} \otimes \Phi_\ell^{q-1,q-1}$.

Первое утверждение проверяется элементарно, а что касается второго, то для

$$\phi(\xi_1, \dots, \xi_q) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_q} c^{\alpha_1 \dots \alpha_q} \xi_{1\alpha_1} \dots \xi_{q\alpha_q}$$

следует положить

$$\psi^\alpha(\xi_2, \dots, \xi_q) = \sum_{\alpha_2, \dots, \alpha_q} c^{\alpha\alpha_2 \dots \alpha_q} \xi_{2\alpha_2} \dots \xi_{q\alpha_q}.$$

Далее, для $q = 0, 1, \dots$ положим

$$\Phi_\kappa^q = \{\phi \in \Phi_\ell^q : \phi(t\xi_1, \dots, t\xi_q) = o(t^q) \text{ при } t \rightarrow 0\}.$$

По построению $\Phi_\kappa^0 = 0$, и легко проверяется, что $\Phi_\ell^q = \Phi_\ell^{q,q} \oplus \Phi_\kappa^q$, причем $\nabla : \Phi_\ell^q \rightarrow \Phi_\kappa^{q+1}$, для всех $q = 0, 1, \dots$. Объединяя эти рассуждения с леммами 3, 4 и предложением 8, убеждаемся, что справедлива

ТЕОРЕМА. Для всех $q = 1, 2, \dots$ имеет место представление

$$H^q(\{\mathcal{F}_\ell; d_{\mathcal{P}}\}) \simeq \frac{\{\phi \in \Phi_\kappa^q : \nabla\phi = 0\}}{\{\phi = (\hat{\xi}, \psi) + \nabla\varphi; \psi \in \mathbb{V} \otimes \Phi_\kappa^{q-1}, \nabla\psi = 0, \varphi \in \Phi_\kappa^{q-1}\}}.$$

3.6. Случай $q = 0$. По построению $\Phi_\ell^0 = \Phi^0 = \mathbb{C}$, $\nabla|_{\Phi^0} = 0$, $\Phi_\ell^{-1} = \Phi^{-1} = 0$, так что согласно леммам 3 и 4 имеем

$$H^0(\{\mathcal{F}_\ell; d_{\mathcal{P}}\}) = \mathbb{C}. \quad (3.13)$$

В частности, в силу изоморфизмов (1.2) и (3.8)

$$H^0(\mathcal{P}; \mathcal{P}) = \mathbb{C}.$$

3.7. Случай $q = 1$. Пусть $\phi \in \Phi_\kappa^1$, $\nabla\phi = 0$. Подробнее, $(\nabla\phi)(\xi, \eta) = -2^{-1}\langle \xi, \eta \rangle \times \nabla_{\xi\eta}\phi = 0$ для всех $\xi, \eta \in \mathbb{V}^*$. В частности, $\nabla_{\xi\eta}\phi = \phi(\xi + \eta) - \phi(\xi) - \phi(\eta) = 0$ для всех $\xi, \eta \in \mathbb{V}^*$, откуда с учетом условия $\phi(t\xi) = o(t)$ при $t \rightarrow 0$ следует, что $\phi(\xi) = 0$. Итак, в силу теоремы

$$H^1(\{\mathcal{F}_\ell; d_{\mathcal{P}}\}) = 0. \quad (3.14)$$

Отсюда в силу изоморфизмов (1.2), (3.8) и равенства (3.13) имеем

$$H^1(\mathcal{P}; \mathcal{P}) \simeq \mathbb{C}.$$

Порождающим коциклом пространства когомологий $H^1(\mathcal{P}; \mathcal{P})$ является, например, отображение $\varepsilon = \Lambda^{-1}[e] : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, где элемент $e \in \mathcal{F}^1$ был определен выше формулой $e(x; \xi) = 1 - (\xi, x)/2$ для всех $x \in V$ и $\xi \in \mathbb{V}^*$. Легко проверяется, что

$$\varepsilon(x; u) = u(x) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} x^\alpha \partial_{x^\alpha} u(x)$$

для всех $x \in V$ и $u(x) \in \mathcal{P}$.

3.8. Случай $q = 2$. Прежде всего заметим, что в силу только что доказанного равенства (3.14) утверждение теоремы в данном случае имеет простой вид:

$$H^2(\{\mathcal{F}_i; d_{\mathcal{P}}\}) \simeq \frac{\{\phi \in \Phi_{\kappa}^2: \nabla \phi = 0\}}{\{\phi = \nabla \varphi; \varphi \in \Phi_{\kappa}^1\}}.$$

Пусть $\phi \in \Phi_{\kappa}^2$, $\nabla \phi = 0$. В частности, $\phi(0, \eta) = 0$, $\phi(t\xi, t\eta) = o(t^2)$ при $t \rightarrow 0$. Кроме того, в силу п. 3 предложения 6 имеем $\nabla \kappa^{\alpha} \phi = -\kappa^{\alpha} \nabla \phi = 0$, причем $\kappa^{\alpha} \phi \in \Phi_{\kappa}^1$, так что опять согласно равенству (3.14) $\kappa^{\alpha} \phi = 0$, т.е. $\partial_{\xi_{\alpha}} \phi(\xi, \eta)|_{\xi=0} = 0$ для всех $\alpha \in \overline{1, m}$. Далее, условие $\nabla \phi = 0$ имеет вид

$$\langle \xi, \eta \rangle \nabla_{\xi \eta} \phi(\zeta) + \text{п.п.} = 0. \quad (3.15)$$

В частности, $\langle \xi, \eta \rangle \nabla_{\xi \eta} \phi(\zeta) = 0$, а значит, и $\nabla_{\xi \eta} \phi(\zeta) = 0$ при $\langle \eta, \zeta \rangle = \langle \zeta, \xi \rangle = 0$. Отсюда следует, что

$$\nabla_{\xi \eta} \phi(\zeta) = \phi(\xi + \eta, \zeta) - \phi(\xi, \zeta) - \phi(\eta, \zeta) = \langle \xi, \zeta \rangle f(\xi, \eta, \zeta) + \langle \eta, \zeta \rangle g(\xi, \eta, \zeta) \quad \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathbb{V}^*,$$

где f, g — некоторые целые функции соответствующего роста. Применяя к этому равенству операцию $\partial_{\xi_{\alpha}}|_{\xi=0}$, $\alpha \in \overline{1, m}$, и учитывая условие $\partial_{\xi_{\alpha}} \phi(\xi, \eta)|_{\xi=0} = 0$ и равенство $\partial_{\xi_{\alpha}} \langle \xi, \zeta \rangle = -\zeta^{\alpha}$, получим

$$\begin{aligned} \partial_{\eta_{\alpha}} \phi(\eta, \zeta) &= -\zeta^{\alpha} f(0, \eta, \zeta) + \langle \eta, \zeta \rangle \partial_{\xi_{\alpha}} g(\xi, \eta, \zeta)|_{\xi=0} = \\ &= \partial_{\eta_{\alpha}} (\langle \eta, \zeta \rangle f(0, \eta, \zeta)) + \langle \eta, \zeta \rangle (\partial_{\xi_{\alpha}} g(\xi, \eta, \zeta)|_{\xi=0} - \partial_{\eta_{\alpha}} f(0, \eta, \zeta)), \end{aligned}$$

откуда

$$\partial_{\eta_{\alpha}} \tilde{\phi}(\eta, \zeta) = \langle \eta, \zeta \rangle h^{\alpha}(\eta, \zeta) \quad \forall \alpha \in \overline{1, m},$$

где

$$\tilde{\phi}(\eta, \zeta) = \phi(\eta, \zeta) - \langle \eta, \zeta \rangle f(0, \eta, \zeta), \quad h^{\alpha}(\eta, \zeta) = \partial_{\xi_{\alpha}} g(\xi, \eta, \zeta)|_{\xi=0} - \partial_{\eta_{\alpha}} f(0, \eta, \zeta).$$

В частности, $\partial_{\eta_{\alpha}} \tilde{\phi}(\eta, \zeta) = 0$ при $\langle \eta, \zeta \rangle = 0$, $\alpha \in \overline{1, m}$, что влечет $\tilde{\phi}(\eta, \zeta) = \nu(\eta) + \langle \eta, \zeta \rangle \times \mu(\eta, \zeta)$, где $\nu(\eta)$, $\mu(\eta, \zeta)$ — некоторые целые функции. Условие $\phi(0, \zeta) = 0$ дает $\nu(\eta) = 0$, так что

$$\phi(\eta, \zeta) = \langle \eta, \zeta \rangle \psi(\eta, \zeta) \quad (3.16)$$

для всех $\eta, \zeta \in \mathbb{V}^*$, где $\psi(\eta, \zeta) = f(0, \eta, \zeta) + \mu(\eta, \zeta)$ — целая функция с необходимыми оценками роста, причем $\psi(\eta, \zeta) = \psi(\zeta, \eta)$, поскольку $\phi(\eta, \zeta) = -\phi(\zeta, \eta)$ и, кроме того, $\psi(0, \zeta) = 0$ в силу условия $\partial_{\xi_{\alpha}} \phi(\xi, \zeta)|_{\xi=0} = 0$.

Далее,

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi \eta} \phi(\zeta) &= \langle \xi + \eta, \zeta \rangle \psi(\xi + \eta, \zeta) - \langle \xi, \zeta \rangle \psi(\xi, \zeta) - \langle \eta, \zeta \rangle \psi(\eta, \zeta) = \\ &= \langle \xi, \zeta \rangle \Delta_{\eta} \psi(\xi, \zeta) + \langle \eta, \zeta \rangle \Delta_{\xi} \psi(\eta, \zeta), \end{aligned}$$

где, например, $\Delta_\eta \psi(\xi, \zeta) = \psi(\xi + \eta, \zeta) - \psi(\xi, \zeta)$. Подставляя это и аналогичные выражения, получаемые циклическими перестановками, в равенство (3.15), получим

$$\langle \zeta, \xi \rangle \langle \xi, \eta \rangle \Delta \psi(\xi, \eta, \zeta) + \text{ц.п.} = 0, \quad (3.17)$$

где $\Delta \psi(\xi, \eta, \zeta) = \Delta_\zeta \psi(\xi, \eta) - \Delta_\eta \psi(\xi, \zeta)$. Легко проверяется тождество

$$\Delta \psi(\xi, \eta, \zeta) + \text{ц.п.} = 0$$

для всех функций $\psi(\xi, \eta)$ и аргументов $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{V}^*$. В частности,

$$\Delta \psi(\zeta, \xi, \eta) = -\Delta \psi(\xi, \eta, \zeta) - \Delta \psi(\eta, \zeta, \xi).$$

Подстановка этого выражения в (3.17) дает

$$\langle \xi, \zeta \rangle \langle \xi + \zeta, \eta \rangle \Delta \psi(\xi, \eta, \zeta) + \langle \eta, \zeta \rangle \langle \eta + \zeta, \xi \rangle \Delta \psi(\eta, \zeta, \xi) = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \langle \xi, \zeta \rangle \langle \xi + \zeta, \eta \rangle \Delta \psi(\xi, \eta, \zeta) &= -\langle \eta, \zeta \rangle \langle \eta + \zeta, \xi \rangle \Delta \psi(\eta, \zeta, \xi) = \\ &= \langle \xi, \zeta \rangle \langle \xi + \zeta, \eta \rangle \langle \eta, \zeta \rangle \langle \eta + \zeta, \xi \rangle g(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned}$$

где $g(\xi, \eta, \zeta)$ — некоторая целая симметрическая функция аргументов $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{V}^*$. В частности,

$$\Delta \psi(\xi, \eta, \zeta) = \langle \eta, \zeta \rangle \langle \eta + \zeta, \xi \rangle g(\xi, \eta, \zeta).$$

Применив к этому равенству операцию $\partial_{\eta_\alpha} |_{\eta=0}$, $\alpha \in \overline{1, m}$, получим

$$\partial_{\xi_\alpha} \psi(\xi, \zeta) = \rho^\alpha(\xi + \zeta) - \rho^\alpha(\xi) - \zeta^\alpha \langle \xi, \zeta \rangle h(\xi, \zeta), \quad (3.18)$$

где $\rho^\alpha(\xi) = \partial_{\eta_\alpha} \psi(\xi, \eta) |_{\eta=0}$, $h(\xi, \zeta) = g(\xi, 0, \zeta) = h(\zeta, \xi)$. Равенство смешанных производных приводит к условиям разрешимости

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_\alpha} \partial_{\xi_\beta} \psi(\xi, \zeta) &= \partial_{\xi_\alpha} (\rho^\beta(\xi + \zeta) - \rho^\beta(\xi)) - \langle \xi, \zeta \rangle \zeta^\beta \partial_{\xi_\alpha} h(\xi, \zeta) = \\ &= \partial_{\xi_\beta} (\rho^\alpha(\xi + \zeta) - \rho^\alpha(\xi)) - \langle \xi, \zeta \rangle \zeta^\alpha \partial_{\xi_\beta} h(\xi, \zeta) \end{aligned}$$

для всех $\alpha, \beta \in \overline{1, m}$. Другими словами,

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_\alpha} (\rho^\beta(\xi + \zeta) - \rho^\beta(\xi)) - \partial_{\xi_\beta} (\rho^\alpha(\xi + \zeta) - \rho^\alpha(\xi)) &= \\ = \langle \xi, \zeta \rangle (\zeta^\beta \partial_{\xi_\alpha} - \zeta^\alpha \partial_{\xi_\beta}) h(\xi, \zeta). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Полагая здесь $\xi = 0$, получим

$$\partial_{\zeta_\alpha} \rho^\beta(\zeta) - \partial_{\zeta_\beta} \rho^\alpha(\zeta) = \partial_{\xi_\alpha} \rho^\beta(\xi) |_{\xi=0} - \partial_{\xi_\beta} \rho^\alpha(\xi) |_{\xi=0} = 0,$$

поскольку

$$\partial_{\xi_\alpha} \rho^\beta(\xi)|_{\xi=0} = \partial_{\xi_\alpha} \partial_{\eta_\beta} \psi(\xi, \eta)|_{\xi=\eta=0} = \partial_{\xi_\beta} \rho^\alpha(\xi)|_{\xi=0}$$

согласно условию $\psi(\xi, \eta) = \psi(\eta, \xi)$. Следовательно, в силу леммы Пуанкаре существует функция $\rho(\xi) \in \Phi^1$, $\rho(0) = 0$, такая, что $\rho^\alpha(\xi) = \partial_{\xi_\alpha} \rho(\xi)$. Условия разрешимости (3.19) теперь принимают вид

$$(\zeta^\beta \partial_{\xi_\alpha} - \zeta^\alpha \partial_{\xi_\beta}) h(\xi, \zeta) = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \overline{1, m}$$

и имеют общее решение $h(\xi, \zeta) = k(\langle \xi, \zeta \rangle)$, где $k(z)$ — целая функция аргумента $z \in \mathbb{C}$. Равенство (3.18) можно переписать теперь в виде

$$\partial_{\xi_\alpha} (\psi(\xi, \zeta) - \nabla_{\xi \zeta} \rho - K(\langle \xi, \zeta \rangle)) = 0 \quad \forall \alpha \in \overline{1, m},$$

где $K(z)$ — целая функция такая, что $-\zeta^\alpha \langle \xi, \zeta \rangle k(\langle \xi, \zeta \rangle) = \partial_{\xi_\alpha} K(\langle \xi, \zeta \rangle)$, $K(0) = 0$. Итак,

$$\psi(\xi, \zeta) = \nabla_{\xi \zeta} \rho + K(\langle \xi, \zeta \rangle) + c(\zeta),$$

где $c(\zeta)$ — некоторая функция. Учитывая, что $\psi(0, \zeta) = 0$, $\rho(0) = 0$, $K(0) = 0$, находим $c(\zeta) = 0$. Условие $\psi(\xi, \zeta) = \psi(\zeta, \xi)$ дает $K(z) = K(-z)$, так что $K(z) = F(z^2)$, где $F(z)$ — другая целая функция, $F(0) = 0$. Таким образом,

$$\psi(\xi, \zeta) = \nabla_{\xi \zeta} \rho + F(\langle \xi, \zeta \rangle^2).$$

Здесь $\rho(\xi) \in \Phi^1$, $\rho(0) = 0$, более того, можно считать, что $\partial_{\xi_\alpha} \rho(0)|_{\xi=0} = 0$ для всех $\alpha \in \overline{1, m}$, поскольку $\nabla_{\xi \zeta} \tilde{\rho} = 0$ для любой линейной функции $\tilde{\rho}(\xi) = \langle \xi, c \rangle = \sum_{\alpha} c^\alpha \xi_\alpha$, $c \in \mathbb{V}$. Итак, с учетом равенства (3.16) получаем представление

$$\phi = \tilde{\phi} + \nabla \varphi, \tag{3.20}$$

где $\varphi(\xi) = -2\rho \in \Phi_\kappa^1$, $\tilde{\phi}(\xi, \eta) = \langle \xi, \eta \rangle \tilde{\psi}(\xi, \eta)$, $\tilde{\psi}(\xi, \eta) = F(\langle \xi, \eta \rangle^2)$, $F(z)$ — целая функция соответствующего роста, $F(0) = 0$.

ЛЕММА 5. *Для данной целой функции $\psi(\xi, \eta) = \psi(\eta, \xi)$, $\psi(0, \eta) = 0$, существует целая функция $\rho(\xi)$, $\rho(0) = 0$, такая, что $\psi(\xi, \eta) = \nabla_{\xi \eta} \rho$, тогда и только тогда, когда $\Delta \psi = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что

$$\nabla_{\xi \eta} \rho = \rho(\xi + \eta) - \rho(\xi) - \rho(\eta), \quad \Delta \psi(\xi, \eta, \zeta) = \psi(\xi + \zeta, \eta) - \psi(\xi, \eta) - \psi(\xi + \eta, \zeta) + \psi(\xi, \zeta).$$

Легко проверяется, что представление $\psi(\xi, \eta) = \nabla_{\xi \eta} \rho$ влечет равенство $\Delta \psi = 0$. Итак, предположим, что $\Delta \psi = 0$ для данной функции ψ с указанными свойствами. Применяя к этому равенству операцию $\partial_{\zeta_\alpha}|_{\zeta=0}$, $\alpha \in \overline{1, m}$, получим соотношения

$$\partial_{\xi_\alpha} \psi(\xi, \eta) - \rho^\alpha(\xi + \eta) + \rho^\alpha(\xi) = 0, \quad \rho^\alpha(\xi) = \partial_{\zeta_\alpha} \psi(\xi, \zeta)|_{\zeta=0}. \tag{3.21}$$

Равенство смешанных производных приводит к условиям разрешимости

$$\partial_{\xi_\alpha} \partial_{\xi_\beta} \psi(\xi, \eta) = \partial_{\xi_\alpha} (\rho^\beta(\xi + \eta) - \rho^\beta(\xi)) = \partial_{\xi_\beta} (\rho^\alpha(\xi + \eta) - \rho^\alpha(\xi))$$

для всех $\alpha, \beta \in \overline{1, m}$. Положив $\xi = 0$, получим

$$\partial_{\eta_\alpha} \rho^\beta(\eta) - \partial_{\eta_\beta} \rho^\alpha(\eta) = \partial_{\xi_\alpha} \rho^\beta(\xi)|_{\xi=0} - \partial_{\xi_\beta} \rho^\alpha(\xi)|_{\xi=0} = 0,$$

поскольку $\partial_{\xi_\alpha} \rho^\beta(\xi)|_{\xi=0} = \partial_{\xi_\alpha} \partial_{\xi_\beta} \psi(\xi, \zeta)|_{\xi=\zeta=0} = \partial_{\xi_\beta} \rho^\alpha(\xi)|_{\xi=0}$, так как по условию леммы $\psi(\xi, \eta) = \psi(\eta, \xi)$. Отсюда в силу леммы Пуанкаре найдется целая функция $\rho(\eta)$, $\rho(0) = 0$, такая, что $\rho^\alpha(\eta) = \partial_{\eta_\alpha} \rho(\eta)$, $\alpha \in \overline{1, m}$. Подставляя это представление в (3.21), получим

$$\partial_{\xi_\alpha} (\psi(\xi, \eta) - \rho(\xi + \eta) + \rho(\xi)) = 0 \quad \forall \alpha \in \overline{1, m},$$

так что

$$\psi(\xi, \eta) = \rho(\xi + \eta) - \rho(\xi) + c(\eta),$$

а подстановка $\psi(0, \eta) = 0$, $\rho(0) = 0$ дает $c(\eta) = -\rho(\eta)$, что и требовалось доказать.

Итак, для того чтобы найти нетривиальные 2-коциклы, следует среди целых функций вида $\psi(\xi, \eta) = F(\langle \xi, \eta \rangle^2)$ выделить такие, что $\Delta \psi \neq 0$, но выполнено равенство (3.17). Учитывая, что операция Δ переводит однородный многочлен в однородный, достаточно провести указанную проверку для однородных многочленов вида $\psi(\xi, \eta) = \langle \xi, \eta \rangle^{2n}$, $n = 1, 2, \dots$. Элементарные вычисления показывают, что в этом случае $\Delta \psi \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$, в то время как равенство (3.17) выполнено лишь для $n = 1$. Таким образом,

$$H^2(\{\mathcal{F}_t; d\mathcal{P}\}) = \mathbb{C}, \quad (3.22)$$

причем порождающим коциклом является элемент $s(\xi, \eta) = \langle \xi, \eta \rangle^3 \in \mathcal{F}_t^2$. Отсюда в силу изоморфизмов (1.2), (3.8) и равенства (3.14) имеем

$$H^2(\mathcal{P}; \mathcal{P}) \simeq \mathbb{C}, \quad (3.23)$$

причем в качестве порождающего коцикла здесь можно взять 2-коцепь $\sigma = \Lambda^{-1}[s]: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, где

$$\sigma(x; u, v) = \langle \partial_y, \partial_z \rangle^3 u(y) v(z)|_{y=z=x} \quad \forall u, v \in \mathcal{P}.$$

3.9. Обсуждение. Приведенная выше теорема кардинально упрощает вычисление когомологий алгебры Пуассона с коэффициентами в присоединенном представлении.

Равенство $H^0(\mathcal{P}; \mathcal{P}) = \mathbb{C}$ означает, что центр алгебры Пуассона

$$\text{сеп } \mathcal{P} = \{u \in \mathcal{P}: \{u, v\} = 0 \text{ для всех } v \in \mathcal{P}\} = \mathbb{C}.$$

Изоморфизм $H^1(\mathcal{P}; \mathcal{P}) \simeq \mathbb{C}$ означает, что алгебра Пуассона имеет единственное нетривиальное внешнее дифференцирование, или, другими словами, единственное нетривиальное одномерное правое расширение.

Изоморфизм $H^2(\mathcal{P}; \mathcal{P}) \simeq \mathbb{C}$ означает, что алгебра Пуассона имеет единственную нетривиальную инфинитезимальную деформацию. Заметим, что в книге [8] и обзоре [9] для размерности $m = 2$ приведен 2-коцикл $\omega: \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, где

$$\omega(x; u, v) = (\partial_{x^1} \partial_{x^1} u(x))(\partial_{x^2} \partial_{x^2} v(x)) - (\partial_{x^2} \partial_{x^2} u(x))(\partial_{x^1} \partial_{x^1} v(x))$$

для всех $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ и $u, v \in \mathcal{P}$, и утверждается, что он порождает пространство $H^2(\mathcal{P}; \mathcal{P}) \simeq \mathbb{C}$. В действительности этот коцикл тривиальный, а именно $\omega = d\rho$, где 1-коцикл $\rho: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ задается правилом

$$\rho(x; u) = -2\partial_{x^1} \partial_{x^2} u(x)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^2$ и $u \in \mathcal{P}$.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 01-01-00516.

Список литературы

- [1] N. Kamran, P. J. Olver (Eds.). Lie algebras, Cohomology, and New Applications to Quantum Mechanics. Contemp. Math. V. 160. Providence, Rhode Island: AMS, 1994.
- [2] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, J. C. Pérez Bueno. An introduction to some novel applications of Lie algebra cohomology in mathematics and physics. physics/9803046.
- [3] M. Henneaux, J. Krasil'shchik, A. Vinogradov (Eds.). Secondary Calculus and Cohomological Physics. Contemp. Math. V. 219. Providence, Rhode Island: AMS, 1998.
- [4] M. Bordemann. The deformation quantization of certain super-Poisson brackets and BRST cohomology. math.QA/0003218; P. Monnier. Poisson cohomology in dimension two. math.DG/0005261; Computation of Nambu-Poisson cohomologies. math.DG/0007103; Z. Givnishvili. Differential complex of Poisson manifold and distributions. math-ph/0103038; Non-commutative geometry of phase space. math-ph/0203027; O. Radko. A classification of topologically stable Poisson structures on a compact oriented surface. math.SG/0110304; V. V. Korniyak. Computation of cohomology of Lie algebra of Hamiltonian vector fields by splitting cochain complex into minimal subcomplexes. math.NA/0205046; A. Gammel-la. Pacific. J. Math. 2002. V. 203. P. 280–320; math.DG/0207215; J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, J. C. Pérez Bueno. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. L607–L616; hep-th/9703019; S. Evens, J.-H. Lu. Poisson harmonic forms, Kostant harmonic forms, and the S^1 -equivariant cohomology of K/T . dg-ga/9711019; M. Penkava, P. Vanhaecke. Deformation quantization of polynomial Poisson algebras. math.QA/9804022.
- [5] В. В. Жаринов. ТМФ. 2001. Т. 128. № 2. С. 147–160.
- [6] Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1976.
- [7] П. Картье. Когомологии алгебр Ли. В сб.: Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар “Софус Ли”. Ред. Е. Б. Дынкин. М.: ИЛ, 1962. С. 32.
- [8] Д. Б. Фукс. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. М.: Наука, 1984.
- [9] Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс. Когомологии групп и алгебр Ли. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 21. Ред. Р. В. Гамкрелдзе. М.: ВИНТИ, 1988. С. 121.
- [10] Л. Хермандер. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 15.XII.2002 г.